

图3 结构单元图

4 结论

本文以传递函数作为故障诊断特征量,建立了用子矩阵比例因子表示的辨识方程,并采用在频域内滑动的最小二乘法求解辨识方程。

结构发生故障前后的传递函数可由实测得到,传递函数对比例因子的敏感度通过对原结构的分析得出,根据本文给出的方法,求解辨识方程,可诊断出结构刚度变化的部位及变化的相对比值。

通过算例说明本文所提出的方法具有一定的

工程应用价值。

参 考 文 献

- 1 Lim Tae W. Submatrix approach to stiffness matrix correction using modal test data. *AIAA J*, 1990, 28
- 2 Zimmerman D C, Widengven M. Correcting finite element models using a symmetric eigenstructure assignment technique. *AIAA J*, 1990, 28(9): 1676~1679
- 3 王谓季, 张阿舟. 结构振动特性对故障的敏感性与故障诊断. *南京航空学院学报*, 1984 (4): 80~90
- 4 张建霖, 姜节胜. 一种结构故障的振动诊断法. *应用力学学报*, 1990, 7(1): 74~82

(1995年11月22日收到)

耦合 van der Pol 振子的数值解

侯之超

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要 本文简要介绍 NNR 方法, 用以求解非线性系统的时间历程. 求出二自由度耦合 van der Pol 振子的两组极限环, 分析了出现不同极限环的初值条件.

关键词 耦合 van der Pol 振子, 极限环, 数值解

目前, 对非线性系统的研究方兴未艾. 对于单自由度系统和极少数的两自由度系统, 人们已经建立相当成熟的方法, 揭示分叉、混沌等本质非线性现象. 然而将这些方法应用到多自由度的实际工程系统中, 则面临着许多困难.

80 年代, 二自由度耦合 van der Pol 振子曾经引起广泛的兴趣^[1-3]. 人们已能够运用渐近方法求出该类振子的两组极限环, 并进行稳定性分析. 然而对其呈现不同极限环的初始条件, 则尚未见报导. 此外, 各类渐近方法虽然可以求出稳态响应的近似表达式, 但是用于多自由度系统都将导致非常复杂、繁琐的求解过程.

鉴于 Newmark-Newton-Raphson(NNR) 方法

能够有效地求出多自由度非线性系统的稳态周期解, 本文着重用以求解一耦合 van der Pol 振子的稳定周期解, 以检验方法的适用性, 为分析高自由度非线性系统奠定基础. 通过计算, 分析响应对初始条件的敏感性.

1 NNR 方法

NNR 方法是应用 Newmark 直接积分法对非线性振动方程作时间离散, 并将每一积分时刻(也称积分步)的振动方程转化为只有该步位移为未知量的非线性代数方程组, 然后通过 Newton-Raphson 迭代过程求解. 下面简单介绍其基本过程.

设时间步长为 Δt , 算法常数为 γ 、 β , 线性系统

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = Q(t) \quad (1)$$

在第 $i+1$ 积分时刻各响应矢量满足如下运动方程

$$M\ddot{x}_{i+1} + C\dot{x}_{i+1} + Kx_{i+1} = Q(t_{i+1}) \quad (2)$$

按照 Newmark 对位移与速度的假设, 可知

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_{i+1} &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} x_{i+1} - \left[\frac{1}{\beta(\Delta t)^2} x_i + \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{x}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_i \right] \\ \dot{x}_{i+1} &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t} x_{i+1} - \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t} x_i + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{x}_i + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{x}_i \right] \end{aligned} \right\} (3)$$

将式 (3) 代入式 (2) 中, 有

$$K_e x_{i+1} = Q_e \quad (4)$$

式中

$$K_e = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} M + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} C + K$$

$$Q_e = Q(t_{i+1}) + M a_i^e + C v_i^e$$

$$a_i^e = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} x_i + \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{x}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_i$$

$$v_i^e = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} x_i + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{x}_i + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{x}_i$$

对于每一积分步, 求解式 (4) 即得到该时刻的系统位移响应, 由式 (3) 结合前一刻的响应就确定了该时刻系统的速度、加速度响应. 重复这一过程即可求出系统的时间历程. 这就是 Newmark 直接积分方法.

对于非线性系统

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + F_{NL}(x, \dot{x}) = Q(t) \quad (5)$$

按照与线性系统同样的 Newmark 过程, 有

$$\left. \begin{aligned} K_e x_{i+1} + G_{NL}(x_{i+1}) &= Q_e \\ G_{NL}(x_{i+1}) &= F_{NL}(x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}) \end{aligned} \right\} (6)$$

K_e 、 Q_e 等量意义与式 (4) 中相应量一致; G_{NL} 中未知量只有 x_{i+1} . 对方程 (6) 应用著名的 Newton-Raphson 迭代算法求解, 这样就建立了 NNR 方法.

2 耦合 van der Pol 振子的稳定极限环与初始条件

二自由度耦合 van der Pol 振子, 以矩阵方程 (5) 表示, 取

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon\eta & -\varepsilon\eta \\ -\varepsilon\eta & 1 + \varepsilon\delta \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{bmatrix}, \quad F_{NL}(x, \dot{x}) = \varepsilon \begin{bmatrix} \dot{x}_1 x_1^2 \\ \dot{x}_2 x_2^2 \end{bmatrix}$$

当 $\eta = 0.4, \delta = 0.56, \varepsilon = 0.25, Q(t) = 0$, 就得到文 [3] 的算例. 文 [3] 已经运用渐近分析方法求出系统的两组极限环. 问题在于各组极限环出现的条件怎样?

为此, 本文首先根据由 NNR 方法所求得的各项时刻的位移与速度矢量画出任一自由度的相轨线, 然后变更系统的初位移或初速度分别求解, 比较相轨线的异同. 两组极限环分别如图 1(a)、1(b) 所示, 与文 [3] 结果吻合.

计算表明大部分初始条件下, 只能得到如图 1(a) 所示那组极限环. 图 2 所示自由度 1 在 4 种不同初始条件的相轨线殊途同归正说明这一点. 变化两个初始位移的比值, 通过计算发现. 当

$$\frac{x_2(0)}{x_1(0)} > c, \quad 1.99 < c < 2 \quad (7)$$

时得到图 1(b) 所示第二组极限环. 式中, c 为 δ/η 的函数. 需要说明, 图 1 中所标注数字 1、2 代表自由度序号, 图 2 中 1、2、3、4 则表示不同的初始条件. 当然变化 η 、 δ 、 ε , 阈值 c 将不同.

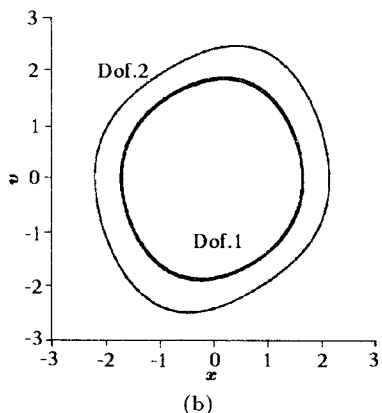
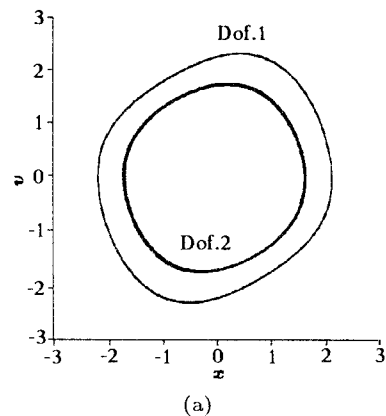


图 1 二自由度耦合 van der Pol 振子的两组极限环

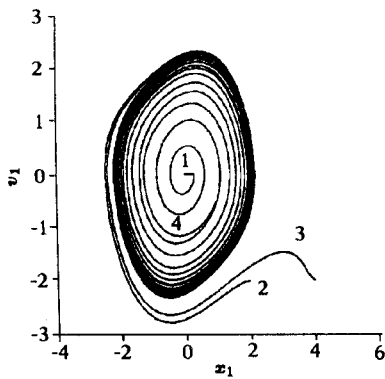


图 2 常见的极限环(自由度 1)

3 结论

本文及作者另外的工作表明: NNR 方法能够揭示一些本质非线性现象, 除耦合 van der Pol 振子的稳定极限环及其出现的初始条件外, 还有单自由度或多自由度非线性系统的跳跃. 直接在位形空间求解而不使方程数目加倍是 Newmark 方法的

一大优点. 可以预期, 经过改进或与其他方法相结合, NNR 方法在分析高维非线性系统的本质特性方面将大有作为.

参 考 文 献

- 1 刘炼生, 黄克累. 两自由度耦合 van der Pol 振子的拟主振动解. 力学学报, 1987, 19(5)
- 2 Rand R H, Holmes P J. Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1980, 75
- 3 刘世龄, 徐兆. 多自由度非线性振动系统的内共振. 应用数学和力学, 1992, 13(1)
- 4 凌复华. 非线性振动系统周期解的数值分析. 应用数学和力学, 1983, 4(4)
- 5 侯之超. 大型结构动力分析中的数值方法研究. 清华大学博士学位论文, 1995

(1996 年 1 月 14 日收到)

关于材料的应变率敏感效应

郑 坚

孙成友

(中国科学院力学研究所 LNM 开放研究实验室, 北京 100080) (中国航空工业总公司, 北京 100831)

摘要 本文讨论材料的应变率敏感效应, 介绍了确定材料应变率敏感参数的实验方法.

关键词 应变率敏感, 增量实验, 减量实验

材料在高应变率下的力学行为研究越来越受到人们的重视. 大量的实验结果表明^[1], 对大多数金属材料其屈服应力和流动应力会随实验中应变率的增加而提高. 对不同的材料其提高的程度有所不同, 这种差异是由每一种材料对应变率的敏感程度不同所导致. 通常体心立方金属材料对应变率的敏感程度要明显高于面心立方金属材料的敏感程度. 材料的应变率 $\dot{\epsilon}$ 可由下式定义

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt} \quad (1)$$

即单位时间内应变的变化表示了材料的变形速率. 早在 1909 年 Ludwick^[2] 就提出了一个非常简单的

公式来表示应变率敏感对材料屈服应力的影响

$$\sigma_y = \sigma_{ys} + \beta \log \dot{\epsilon} / \dot{\epsilon}_0 \quad (2)$$

式中, σ_y 为在应变率 $\dot{\epsilon}$ 时的屈服应力, σ_{ys} 为在应变率为 $\dot{\epsilon}_0$ 时的准静态屈服应力, β 为材料的应变率敏感参数, 应由实验来确定.

材料的应变率敏感参数 β 通常可由分别进行的两个常应变率实验来确定¹⁾, 即在较低应变率下 $\dot{\gamma}_i$ (通常 $10^{-3}/s$) 得到一条应力应变曲线, 然后将实验中的应变率提高在应变率为 $\dot{\gamma}_r$ (通常为 $10^3/s$ 左右) 时得到第二条应力应变曲线, $\dot{\gamma}_r > \dot{\gamma}_i$ (图 1). 低应变率实验可在准静态实验机上进行, 而高应变率实验可在分段式 Hopkinson 杆装置上进行^[3]. 由实验得到的曲线图, 可以确定在相同的应变下两条应力曲线之间的应力差 $\Delta\tau = \tau_r - \tau_i$, 这个应力差

1) 确定材料的应变率敏感参数实验通常都是在扭转 Hopkinson 杆上进行的, 所以在下文中使用了剪切应变率 $\dot{\gamma}$.