

弹塑性矩阵 D_{ep} 的特性和有限元边坡稳定性分析中的极限状态标准

郑宏^{1,2}, 刘德富¹

(1. 三峡大学 土木水电学院, 湖北 宜昌 443002; 2. 中国科学院 武汉岩土力学研究所, 湖北 武汉 430071)

摘要:证明了关联流动条件下的弹塑性矩阵在硬化、理想塑性和软化情况下分别为正定、半正定(亏一秩)和不定矩阵, 然后利用理想弹塑性矩阵的奇异性证明当边坡达到极限平衡状态时, 坡内必存在一个由坡底贯通到坡顶的单元层, 该单元层内的所有单元全都进入塑性状态, 从而为利用等效塑性应变或塑性功的等值线图来判别边坡的极限状态找到了力学依据。还定性分析了利用有限元法在分析边坡问题时塑性区往往被夸大的本质原因, 也给出了克服这一缺陷的技术性办法。

关键词: 岩土力学; 弹塑性矩阵; 有限元; 边坡失稳判据

中图分类号: TU 45 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-6915(2005)07-1099-07

PROPERTIES OF ELASTO-PLASTIC MATRIX D_{ep} AND A CRITERION ON LIMITING STATE OF SLOPE STABILITY BY FEM

ZHENG Hong^{1,2}, LIU De-fu¹

(1. College of Civil and Hydroelectric Engineering, China Three Gorges University, Yichang 443002, China;

2. Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: It is proven that under assumption of the associated flow rule, the elasto-plastic matrix D_{ep} is positive definite for hardening materials, positive semi-definite (the rank deficiency being one) for perfectly plastic materials and indefinite for softening materials, respectively. Based on the fact that D_{ep} is singular for perfectly plastic materials, it is stated that if a slope arrives at the state of limit equilibrium, a layer of elements must go through the slope from the bottom of the slope to the top, each element in the layer being in plastic state. Hence, it is rational that the contour plots of the equivalent plastic strain or the plastic work are used to judge if slopes reach the limit equilibrium state. The paper makes a qualitative analysis for the abnormal phenomenon in which the plastic zones are usually overestimated in analyzing slope problems by FEM. The skill for overcoming such an abnormal phenomenon is proposed as well.

Kew words: rock and soil mechanics; elasto-plastic matrix; finite element; criterion of the instability of slope

1 引言

有限元求解边坡安全系数所采用的方法一般是

强度折减法^[1-10]。虽然从理论上说, 有限元比经典的极限平衡法具有许多独特的优势, 但目前有限元的结果在边坡设计中却仍然仅作为参考。究其原因, 笔者认为主要是由于两个主要矛盾未能在有限

收稿日期: 2003-12-01; 修回日期: 2004-02-25

作者简介: 郑宏(1964-), 男, 博士, 1985年毕业于东北大学机械系, 现任教授, 主要从事岩土力学方面的教学和研究工作。E-mail: hzheng@whrsm.ac.cn.

元-强度折减技术中得以很好的解决。其一是缺乏统一的与有限元-强度折减技术相关联的边坡极限状态的判定标准,亦即边坡失稳判据,其将直接影响到安全系数的计算结果和边坡在极限状态下的塑性区分布;其二是缺乏系统而严密的确定边坡潜在滑面的方法,然而这一问题在二维情况下已获得初步解决,如文[11]利用人工智能方法解决了基于 Fellenius 法安全系数定义(即抗滑力比滑动力)的边坡潜在滑面的搜索。文[12]通过建立并求解潜在滑面的初值问题,解决了基于 Bishop 法安全系数定义(即强度储备系数)的潜在滑面的定位。

目前,失稳判据大致有以下几种类型:

(1) 以迭代过程不收敛为标准^[1~4],这是最常用的标准,其认为当边坡处于极限平衡状态时,非线性有限元方程组的迭代过程将不收敛。由于收敛的标准通常是由用户指定的失衡力的大小来控制的,且不收敛可由很多其他因素而引起,并不一定意味着结构已经崩溃^[13],因此这一标准缺乏客观性。

(2) 以某个特征点为标准^[5,6],认为当边坡达到极限状态时,某些点的位移会趋于流动状态,这在理论上是正确的,但在选取特征点时应非常慎重,否则在某些复杂情况下选取不同的特征点,可能会给出不同的安全系数。此外,取位移-强度折减系数曲线上的哪一点作为极限状态尚未取得共识。

(3) 广义剪应变标准^[7]或广义塑性应变标准^[8,9],这类标准认为当边坡达到极限平衡态时,广义剪应变^[7]或广义塑性应变^[8,9]的等值线图中,必有一条等值线,通常是数值较小的那条等值线,由坡底贯通到坡顶。本文将论证这一标准的合理性。但是,由于坡内应变值的大小与岩土材料的软硬程度是密切相关的,当坡内含有软硬相差很大的材料时,广义剪应变或广义塑性应变的等值线图将会非常怪异,因此,笔者建议改用塑性功等值线图来弥补这一不足。

(4) 能量准则^[14],由邵国建、卓家寿等提出的基于能量准则的岩体稳定性分析方法是一个在概念上有别于经典极限平衡法的分析方法。该方法是通过干扰能量等值线图来确定潜在滑面的。为了得到单元的干扰能量,需考虑系统的几何非线性,计算中会涉及到几何刚度矩阵的求逆和特征值问题的求解,其运算量和存贮量甚至高于应力分析本身。虽然一般情况下,所求得的安全系数及其潜在滑面都不同于经典的极限平衡法,但笔者认为这仍然是一个很有前景的研究方法。

虽然在有限元-强度折减技术中可以考虑更复

杂的本构模型^[10],但是为了与相对成熟的极限平衡法的成果相比,目前大都采用基于 Mohr-Coulomb 准则的理想弹塑性模型。至于选用何种流动法则尚未取得共识,如文[2~4]等采用的是非关联法则,而文[1,9,10]等采用的是关联法则。原则上非关联流动可能更适合岩土类材料,但关联法则会给计算带来不少麻烦,如切线刚度矩阵的非对称以及解的不唯一^[15]等,且一直主张采用非关联法则的 Griffiths 本人的最新成果^[3]也表明:流动法则对于边坡整体安全系数的精度影响很小(低于 5%),失效时的破损区无论在形状上还是在大小上都很类似。因此,本文将采用关联流动法则。

对于理想弹塑性体,本文证明当坡内任一点处于塑性状态时,该点所对应的弹塑性矩阵 D_{ep} 是亏一秩的半正定矩阵,且给出了亏值方向。利用这一成果,笔者建议将边坡的极限平衡状态取为下列时刻,在该时刻边坡内部存在一由坡底通向坡顶的单元层,在该单元层内的所有单元都已经进入了屈服状态。文[16]采用的也是类似的标准,文中给出的数值算例支持了这一标准。

2 弹塑性矩阵 D_{ep} 的特性

2.1 椭球范数

为了讨论弹塑性矩阵 D_{ep} 的特性,需要引入椭球范数的概念。设 $A \in R^{n \times n}$ 为正定对称矩阵, R^n 代表 n 维 Euclidean 空间。由 A 的正定性可以构造 R^n 空间中任意向量 $x \in R^n$ 的椭球范数^[17]为

$$\|x\|_A = (x^T A x)^{1/2} \tag{1}$$

以及任意 2 个向量 $x \in R^n$ 和 $y \in R^n$ 之间的内积为

$$(x, y)_A = (x^T A y)^T \tag{2}$$

因为式(1)所定义的范数可由式(2)所定义的内积来诱导,所以必有如下 Cauchy-Schwarz 不等式^[17]:对于任意的 2 个向量 $x \in R^n$ 和 $y \in R^n$,有

$$|(x, y)_A| \leq \|x\|_A \|y\|_A \tag{3}$$

当且仅当 x 和 y 线性相关时,上式取等号。

2.2 D_{ep} 的特性

记 $F(\sigma, \rho) = 0$ 为一材料的屈服面, σ 为应力张量, ρ 为塑性史参数,增量形式的塑性本构方程^[15]为

$$d\sigma = D_{ep} d\epsilon \tag{4}$$

式中： $d\sigma$ 和 $d\varepsilon$ 分别为应力增量和应变增量， D_{ep} 为弹塑性矩阵。

$$D_{ep} = D - \frac{D \frac{\partial F}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D}{h + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D \frac{\partial F}{\partial \sigma}} \quad (5)$$

式中： D 为弹性矩阵，是正定对称的； h 为硬化速率，可定义为

$$h = - \frac{\partial F}{\partial \rho} \sigma^T \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (6)$$

且对于硬化材料 $h > 0$ ，对于理想塑性材料， $h = 0$ ；对于软化材料， $h < 0$ 。

利用 Cauchy-Schwarz 不等式(式(3))，可以证明：

- (1) 若 $h > 0$ ，则 D_{ep} 为正定矩阵；
- (2) 若 $h = 0$ ，则 D_{ep} 为亏一秩的半正定矩阵，且其亏值向量为 $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$ ；
- (3) 若 $h < 0$ ，则 D_{ep} 为非正定矩阵。

若记 $\xi = \frac{\partial F}{\partial \sigma}$ ，则

$$D_{ep} = D - \frac{D \xi \xi^T D}{h + \xi^T D \xi}$$

对于任意的向量 $\varepsilon \neq 0$ ，由 D 的正定性可得

$$\varepsilon^T D_{ep} \varepsilon = \varepsilon^T D \varepsilon - \frac{\varepsilon^T D \xi \xi^T D \varepsilon}{h + \xi^T D \xi} = \|\varepsilon\|_D^2 - \frac{(\varepsilon, \xi)_D^2}{h + \|\xi\|_D^2} \quad (7)$$

如果 $h = 0$ ，有

$$\varepsilon^T D_{ep} \varepsilon = \|\varepsilon\|_D^2 - \frac{(\varepsilon, \xi)_D^2}{\|\xi\|_D^2} = \|\varepsilon\|_D^2 - \frac{\|\xi\|_D^2 \|\xi\|_D^2}{\|\xi\|_D^2} \quad (8)$$

Cauchy-Schwarz 不等式(式(3))=0

由以上推导过程可知，对于 $h = 0$ 的情形，当且仅当向量 $\varepsilon = \beta \xi = \beta \frac{\partial F}{\partial \sigma}$ 时， β 为任意非零实数， $\varepsilon^T D_{ep} \varepsilon = 0$ ，即 D_{ep} 为亏一秩的半正定矩阵，其亏值方向为 $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$ 。

因此对于理想弹塑性材料，有

$$D_{ep} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0 \quad (9)$$

如果 $h < 0$ ，可令 $h = -p$ ，其中 $0 < p < \|\xi\|_D^2$ ，注意经典塑性力学对于软化速率是有限的^[18]，要求 $p < \|\xi\|_D^2$ 。由式(7)可得

$$\varepsilon^T D_{ep} \varepsilon = \|\varepsilon\|_D^2 - \frac{(\varepsilon, \xi)_D^2}{\|\xi\|_D^2 - p} = \frac{\|\varepsilon\|_D^2 \|\xi\|_D^2 - (\varepsilon, \xi)_D^2 - p \|\varepsilon\|_D^2}{\|\xi\|_D^2 - p} \quad (10)$$

特别地，如果取 ε 满足 $(\varepsilon, \xi)_D = 0$ ，则由式(9)可得 $\varepsilon^T D_{ep} \varepsilon = \|\varepsilon\|_D^2 > 0$ ；如果取 $\varepsilon = \lambda \xi$ ， λ 是任意非零实数，由(9)式得 $\varepsilon^T D_{ep} \varepsilon = -\frac{p \|\varepsilon\|_D^2}{\|\xi\|_D^2 - p} < 0$ 。因

此， D_{ep} 为不定矩阵。

注意，对于软化材料，常常会想当然地认为 D_{ep} 为负定矩阵，由以上证明过程可知这一认识是错误的。

3 强度折减法中的极限平衡态的定义

本文将仅针对理想弹塑性体的二维问题为例来讨论。已知单元 Ω^e 的切线刚度矩阵^[15]为

$$K_{ep}^e = \int_{\Omega^e} B^T D_{ep} B^T d\Omega$$

在单元未完全屈服时是亏秩数为 3 的半正定矩阵，其中 3 个亏值向量分别代表 2 个平动向量和 1 个转动向量，但是当单元完全屈服时，所有积分点处的 D_{ep} 将失去正定性而成为亏一秩的半正定矩阵，此时 K_{ep}^e 的亏秩数将大于 3，这样当边坡内存在由坡底贯通到坡顶的单元层且该单元层内的单元都处于塑性态时，整个系统的切线总刚 K_{ep} 即使在消除刚体位移后仍然是奇异的。然而，由于通常采用的是数值积分， K_{ep} 仅是近似奇异的，所以在对 K_{ep} 进行 LDL^T 分解时未发现异常。

再者，由于 D_{ep} 为半正定矩阵，此时，以位移为未知函数的二阶平衡方程组(即 Lamé 方程)在塑性区内也将失去椭圆性而变为抛物型方程组。由于知道抛物型方程在其定义域内存在一簇特征曲面^[19]，特征曲面至少是位移二阶偏导数的一个间断面，边坡的潜在滑面就是某一特征曲面，应该含于上述单元层内。文[12]已经建立了基于有限元强度折减技术在二维情况下确定边坡潜在滑面的数值方法。

从物理上看，当上述单元层形成之后，边坡也将失去其超静定性而变为一个可以沿该单元层滑动的机构。

基于以上讨论可知，当边坡达到极限状态时，由于塑性区已经贯通，所以等效塑性应变等值线也

将贯通整个边坡，因此，由文[9, 12]所建议的利用等效塑性应变等值线图来判别边坡的极限平衡态是合理的。

值得注意的是为了得到合理的边坡在极限状态下的塑性区分布以及等效塑性应变等值线图，在对抗剪强度参数 c 和 φ 打折扣的同时，应同时对泊松比 ν 做相应的调整，调整的原则是确保 $\varphi - \nu$ 不等式始终成立，即 $\sin \varphi = 1 - 2\nu$ 。具体的调整策略详见文[9]所述。

4 算 例

假设有一均质边坡，如图 1 所示，坡高 10 m，坡度为 45° ， $c = 12.38 \text{ kPa}$ ， $\varphi = 20^\circ$ ，单位重度 $\gamma = 20$

kN/m^3 。对于本例，文[20]基于上限法和对潜在滑移线的对数螺旋线假定，给出的安全系数为 1。文[11]基于有限元分析结果，通过求解一个常微分方程的初值问题，给出了与文[20]相一致的潜在滑移线。

根据 $\varphi - \nu$ 不等式^[9]： $\sin \varphi = 1 - 2\nu$ ， ν 应满足 $\nu = 0.5(1 - \sin \varphi) \approx 0.33$ 。为了使 $\varphi - \nu$ 不等式在对 c 和 φ 打折扣的过程中始终成立，取 $\nu = 0.35$ 。

计算表明，当强度折减系数达到 1.06 时，坡内的塑性区由坡底贯通到坡顶。这里，本文采用的是文[21]所建议的求解非线性有限元组的位移控制法，该方法即使在边坡处于流动状态也能求解且很快收敛。

图 2 是达到极限状态时边坡的破损区。这里笔者是按照单元内部 Gauss 点的破损类型来绘制破损

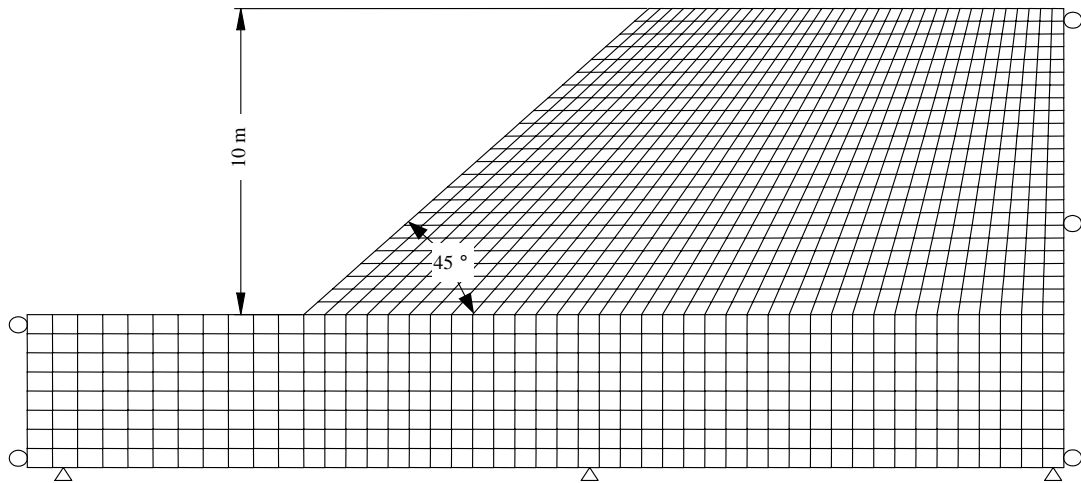


图 1 均质边坡的计算网格

Fig.1 Regular mesh for a homogeneous slope

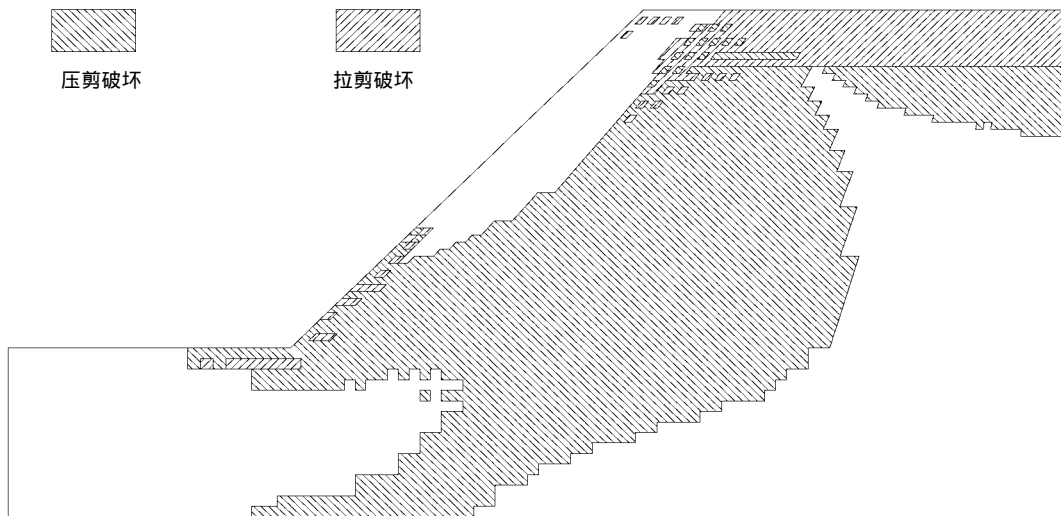


图 2 极限状态下的破损区

Fig.2 Damaged zones in the limited state

区的。本例所采用的单元为四边形 4 节点等参元，每个单元采用的是 2×2 的 Gauss 积分，若某一 Gauss 点的破损类型为压剪型，就将该 Gauss 点所对应的四分之一单元块用与水平向成 135° 的剖面线来表示，如图 2 所示。

图 3 是等效塑性应变的等值线图。等效塑性应变 $\bar{\epsilon}_p$ 的定义为

$$\bar{\epsilon}_p = \int d\bar{\epsilon}_p, \quad d\bar{\epsilon}_p = [(d\epsilon_p)^T d\epsilon_p]^{\frac{1}{2}}$$

利用 $\bar{\epsilon}_p$ 等值线图的另一好处是可以将边坡内部不同区域的破损程度清楚地显现出来：某一等值线的 $\bar{\epsilon}_p$ 大，表明由该等值线所围成的区域内的土体所经

历的塑性变形就越大，因此破损程度也就越大。这是一般的破损区图所不具备的优点。例如在本例中坡角部位的 $\bar{\epsilon}_p$ 最大，达到 0.81，如图 3 所示，说明在接近极限状态时，坡角部位将首先破坏，破损程度也最严重。

作为对比，笔者将折减系数为 1.03 时的破损区也绘制出来，如图 4 所示。

5 塑性区被夸大的原因及对策

有过有限元计算经验的人都知道，在利用有限元法分析边坡问题时，基于理想弹塑性模型的计算

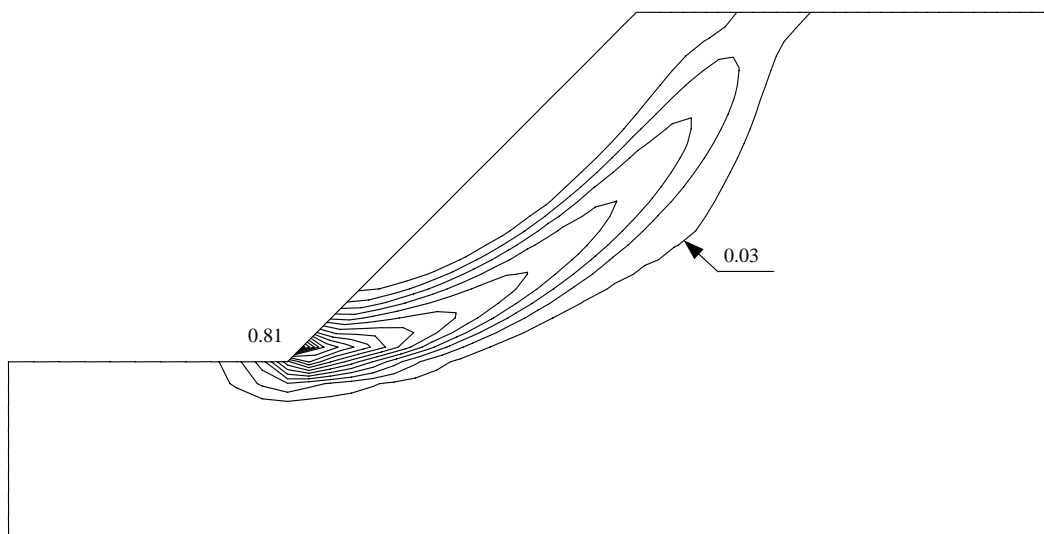


图 3 极限状态下的等效塑性应变等值线图

Fig.3 Contour plot of the slope in the limited state

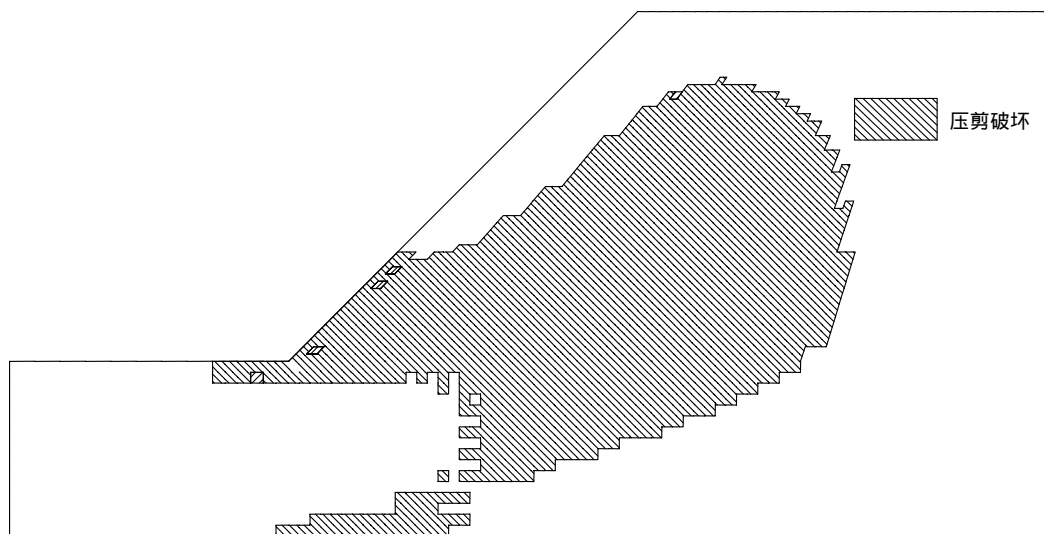


图 4 对应于折减系数为 1.03 时的破损区

Fig.4 Damaged zones corresponding to the reduction factor of 1.03

结果往往过大地估计了塑性区范围,且这种情况在边坡临近极限平衡状态时或者在不满足 $\varphi-v$ 不等式^[9]时会更趋严重,正如图2,4所示的那样。至今尚无文献分析这一反常现象的根本原因,笔者在此将对这一反常现象做一定性的分析。

由于知道边坡的失稳破坏通常都是渐进式的,即首先在应力集中部位或材料属性较差的部位出现破坏,破坏的形式一般也表现为局部裂纹的形成。当该局部裂纹形成后,在沿裂纹的长度方向上裂纹仅能承受与其抗剪强度相适应的剪力水平,而将导致该裂纹形成的剪力中超出裂纹抗剪强度的那部分剪力转移到与该裂纹在长度方向上相邻的土体中去,从而导致在临近土体中新的裂纹的形成。随着裂纹的不断形成和扩展,最终会在边坡内部形成一个大的剪切带,当该剪切带贯通至整个边坡后就将发生滑坡。因此,这种破坏过程是渐进式的和局部的,即使发生滑坡,破坏也仅局限于剪切带内部。这就是我们通常所说的应变局部化现象。

然而,通常所采用的等参元是不能模拟剪切带的形成过程的。为了能够模拟应变局部化现象,单元在进入破坏时的位移模式至少应该能够模拟“位移在穿越剪切带时保持连续,但应变却不连续”,即所谓若不连续模型,而通常所使用的等参元是不能反映这一变形模式的,不仅如此,等参插值模式还总是试图均化应变场以阻止剪切带的形成^[22]。为了在有限元中模拟剪切带的形成,文[22]在单元进入破坏的一开始就在单元的等参插值位移模式中再迭加一个能够反映上述应变突变模式的非协调项。由于在迭代的每一步都需要对所有单元的所有积分点进行分叉计算,以求得剪切带的方位和跨越剪切带的应变突变量,其计算量即使在当今的计算机条件下也是非常浩大的,因而至今未能得以普遍应用。

正是等参元内应变的连续性才使得载荷转移机制偏离实际过程而采用如下的破坏机制:当局部区域发生屈服后,该区域将只能够承担与其强度相适应的载荷水平,而将导致该区域屈服的载荷中超出强度所能承受的那部分载荷转移到周围的土体中,而不是仅限于与裂纹在长度方向上相邻的土体,从而导致周围土体的屈服。它的这种破坏机制向金属一样是各向同性的,而不是沿着剪切带展开的,所以就夸大了边坡在临近极限状态时的塑性区的范围,并且也是有限元-强度折减技术所算得的安全系数有所偏高的原因之一。

好在被夸大的那部分塑性区所经历的塑性变形

都很小,因此,在绘制等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}_p$ 的等值线图时,可以通过设置一个略大于零的 $\bar{\varepsilon}_p$ 来将被夸大的塑性区给过滤掉。例如,在本例中的 $\bar{\varepsilon}_p$ 的最大值为0.81,在绘制 $\bar{\varepsilon}_p$ 的等值线时,仅绘制不小于 $\bar{\varepsilon}_p = 0.03$ 的等值线,就可得到比较合理的塑性区分布,如图3所示。利用 $\bar{\varepsilon}_p$ 的等值线图也可大致估计出潜在滑面的位置^[12]。

6 结 论

通过以上分析,可以认为:

(1) 利用贯通的等效塑性应变或塑性功的等值线图来确定边坡的极限状态是合理的;

(2) 弹塑性矩阵 D_{ep} 在硬化、理想塑性和软化情况下分别为正定、半正定(亏一秩)和不定矩阵;

(3) 基于理想弹塑性模型的有限元法在分析边坡时所导致的塑性区被高估的现象是由于等参元的位移插值方式引起的,等参位移模式阻止了剪切带的形成,从而造成单元在进入屈服后载荷按照各向同性方式进行转移;

(4) 在绘制等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}_p$ 的等值线时,通过设置一个略大于零的 $\bar{\varepsilon}_p$ 可以将被夸大的塑性区过滤掉,而得到更为合理的塑性区分布。

致谢 本文的工作得到了湖北省杰出青年基金和湖北省优秀科技创新团队基金的资助,在此谨表感谢!

参考文献(References):

- [1] Dawson E M, Roth W H, Drescher A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. *Geotechnique*, 1999, 49(6): 835-840.
- [2] Griffiths D V, Lane P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. *Geotechnique*, 1999, 49(3): 387-403.
- [3] Lechman J B, Griffiths D V. Analysis of the progression of failure of earth slopes by finite elements[A]. In: *Geotechnical Special Publication: Slope Stability 2000*[C]. U. S. A: ASCE, 2000. 250-265.
- [4] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. *岩土工程学报*, 2002, 24(3): 343-346. (Zhao Shangyi, Zheng Yinren, Shi Weimin et al. Analysis on safety factor of slope by strength reduction FEM[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, 24(3): 343-346. (in Chinese))
- [5] 宋二祥. 土工结构安全系数的有限元计算[J]. *岩土工程学报*, 1997, 19(1): 1-7. (Song Erxiang. Finite element analysis of safety factor for soil structures[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1997, 19(1): 1-7. (in Chinese))

- [6] 葛修润, 任建喜, 李春光等. 三峡左厂 3[#]坝段深层抗滑稳定三维非线性有限元分析[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(4): 389–394.(Ge Xiurun, Ren Jianxi, Li Chunguang, et al. 3D-FEM analysis of deep sliding stability of 3[#] dam foundation of left power house of the Three Gorges Project[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, 25(4): 389–394.(in Chinese))
- [7] 连镇营, 韩国城, 孔宪京. 强度折减有限元研究开挖边坡的稳定性[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(4): 406–411.(Lian Zhenying, Han Guocheng, Kong Xianjing. Stability analysis of excavation by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(4): 406–411.(in Chinese))
- [8] 栾茂田, 武亚军, 年廷凯. 强度折减有限元法中边坡失稳的塑性区判据及其应用[J]. 防灾减灾工程学报, 2003, 3: 1–8.(Luan Maotian, Wu Yajun, Nian Tingkai. A criterion for evaluating slope stability based on development of plastic zone by shear strength reduction FEM[J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2003, 3: 1–8.(in Chinese))
- [9] 郑 宏, 李春光, 葛修润等. 求解安全系数的有限元法[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(5): 626–628.(Zheng Hong, Li Chunguang, Ge Xiurun, et al. Finite element method for the factor of safety [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(5): 626–628.(in Chinese))
- [10] Dawson E, You K, Park Y. Strength-reduction stability analysis of rock slopes using the Hoek-Brown failure criterion[A]. In: Labuz J F ed. Geotechnical Special Publication: Trends in Rock Mechanics[C]. [s. l.]: ASCE, 2000. 65–77.
- [11] 王成华, 夏绪勇, 李广信. 基于应力场的土坡临界滑动面的蚂蚁算法搜索技术[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(5): 813–819.(Wang Chenghua, Xia Xuyong, Li Guangxin. Ant algorithm in search of the critical slip surface in soil slopes based on stress fields[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 22(5): 813–819.(in Chinese))
- [12] 郑 宏, 刘德富, 罗先启. 基于变形分析的边坡潜在滑面的确定[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(5): 706–719.(Zheng Hong, Liu Defu, Luo Xianqi. Determination of potential slide line of slopes based on deformation analysis[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(5): 706–719.(in Chinese))
- [13] Crisfield M A. Non-linear Finite Element Analysis of Solid and Structures(V.2)[M]. New York: John Wiley & Sons, 1997.
- [14] 邵国建, 卓家寿, 章 青. 岩体稳定性分析于评价准则研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 24(5): 691–696.(Shao Guojian, Zhuo Jiashou, Zhang Qing. Research on Analysis Method and Criterion of Rock Mass Stability [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 24(5): 691–696.(in Chinese))
- [15] Zienkiewicz O C. The Finite Element Method(V.2)[M]. [s. l.]: McGraw-Hill, 1991.
- [16] 张孟喜, 陈炽昭. 土坡稳定分析的有限元追踪法[J]. 岩土工程学报, 1991, 13(6): 35–41.(Zhang Mengxi, Chen Zhizhao. The studies on the stabilization for soil slopes by tracking analysis with the finite element method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1991, 13(6): 35–41.(in Chinese))
- [17] Yosida Y. Functional Analysis[M]. [s. l.]: Springer-Verlag, 1980.
- [18] Zheng Hong, Liu Defu, Lee Chack Fan, et al. Principle of analysis of brittle-plastic rock mass[J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(2): 139–158.
- [19] Duchateau P, Zachmann D. Theory and Problems of Partial Differential Equations[M]. New York: McGraw-Hill, 1986.
- [20] Chen W F. Limit Analysis and Soil Plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier, 1975.
- [21] Zheng Hong, Liu Defu, Lee Chack Fan, et al. Displacement-controlled method and its applications to material non-linearity[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2005, 29(3): 209–226.
- [22] Ortiz M, Leroy Y, Needleman A. A finite element method for localized failure analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1987, 61: 189–214.