

下卧基岩双层地基上刚性圆板的扭转振动

吴大志¹, 张政伟², 徐长节¹, 刘飞禹¹

(1. 浙江大学 土木工程系, 浙江 杭州 310027; 2. 广厦房地产开发集团, 浙江 杭州 310006)

摘要: 运用积分变换的方法研究了下卧基岩双层地基上刚性圆板在简谐扭矩作用下的动力响应问题。假设地下水位以上地基为单相弹性层, 以下为饱和两相介质, 结合上表面为混合边界条件、下边界为刚性基岩以及弹性层与饱和土层接触面处位移和应力连续等条件, 得出了刚性圆板扭转时的对偶积分方程。通过数学方法化对偶积分方程为第二类 Fredholm 积分方程, 求解了相应的动力响应问题。数值分析结果表明, 层厚和土层的剪切模量比对扭转振动影响较大。

关键词: 岩土力学; 弹性单相介质; 饱和土; 扭转振动; 动力响应

中图分类号: TU 44

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2005)18 - 3316 - 06

TORSIONAL VIBRATION OF A RIGID CIRCULAR PLATE RESTING ON DOUBLE-LAYERED SUBGRADE WITH ROCK SUBSTRATUM

WU Da-zhi¹, ZHANG Zheng-wei², XU Chang-jie¹, LIU Fei-yu¹

(1. Department of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China;

2. Guangsha Real Estate Group, Hangzhou 310006, China)

Abstract: By using the technology of Hankel transform, the torsional vibration of a rigid circular plate resting on double-layered subgrade overlaying bedrock is discussed. Taking the soil above the groundwater table as elastic single-phase layer and the soil below the groundwater table as saturated medium, considering the mixed boundary condition at the upper surface, the fixed boundary condition at the lowest surface and that the stress and displacement at the interface of the layers are continuous, the dual integral equations are established. By mathematical methods, the dual integral equations are reduced to Fredholm integral equations of the second kind. Subsequently, the dynamic compliance coefficients of the foundation, the equivalent stiffness and equivalent damping of the subgrade, the angular amplitude of the foundation are expressed explicitly. Selected numerical studies indicate that the height of the stratum and the shear moduli' ratio between the layers have pronounced effect on the results.

Key words: rock and soil mechanics; elastic single-phase medium; saturated soil; torsional vibration; dynamic response

1 引言

动力响应问题是涉及地球物理勘探、地震工程、石油开采、核废料处理、水利工程和土木工程等领域的重要基础课题, 一直以来受到人们的关注。

文[1~3]把土体视为弹性或粘弹性介质进行了研究。自文[4, 5]关于饱和弹性多孔介质的动力方程提出后, 饱和土体的动力响应问题成了人们研究的热点。文[6]给出了饱和弹性半空间在低频谐和集中力下的积分形式解。文[7]给出了位于饱和半空间上透水和不透水矩形板的摇摆和竖向振动的柔度曲

收稿日期: 2004 - 05 - 18; **修回日期:** 2004 - 08 - 03

作者简介: 吴大志(1977 -), 男, 1999年毕业于中南工业大学采矿工程专业, 现为博士研究生, 主要从事基础振动方面的研究工作。E-mail: wdz@hz.cn.

线。文[8~11]分别运用了有限元、边界元等数值方法研究了饱和弹性半空间的动力响应问题。天然地基在形成过程中都具有成层性，显然考虑地基的成层性能更好地分析问题。文[12]运用刚度矩阵方法研究了饱和多层介质内部作用简谐振动时的响应问题。文[13]研究了下卧基岩时单层饱和地基在竖向简谐荷载作用下的动力响应问题。当地下水埋藏有一定深度时，视地下水水面以上为单相介质，以下为饱和介质更接近实际情况。文[14]通过引入势函数的方法研究了上层为单相弹性层，下层为两相多孔饱和半空间上刚性圆板的竖向振动问题。对于扭转振动，文[15]讨论了上覆单相弹性层的饱和地基上刚性圆板的扭转振动问题，并把饱和地基当作半空间进行考虑。实际上绝对的半空间是不存在的，地基的下部常为岩石，所以有必要研究下卧基岩的地基上基础的扭转振动问题。

2 基本动力方程及其求解

根据弹性动力学基本原理，单相弹性介质的运动方程为

$$G_e \nabla^2 \mathbf{u}_e + (\lambda_e + G_e) \text{grad} e_e = \rho_e \frac{\partial^2 \mathbf{u}_e}{\partial t^2} \quad (1)$$

式中： \mathbf{u}_e 为弹性介质的位移矢量； λ_e ， G_e 为弹性介质的 Lamé 常数； ρ_e 为弹性土体的密度； e_e 为弹性介质的体积应变。

根据 Biot 理论，空间轴对称饱和土体的基本运动方程为

$$G_s \nabla^2 \mathbf{u}_s + (\lambda_s + G_s) \text{grad} e_s - \text{grad} \sigma = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$-\text{grad} \sigma = \frac{\rho_f g}{k_d} \frac{d\mathbf{w}_s}{dt} + \rho_f \frac{d^2 \mathbf{u}_s}{dt^2} + \frac{\rho_f}{n} \frac{d^2 \mathbf{w}_s}{dt^2} \quad (3)$$

$$-\frac{n}{K_f} \sigma = \text{div} \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} + \text{div} \frac{d\mathbf{w}_s}{dt} \quad (4)$$

式中： λ_s ， G_s 为饱和土体的 Lamé 常数； \mathbf{u}_s 为土骨架位移矢量； \mathbf{w}_s 为流体相对于土骨架的位移矢量； e_s 为土骨架的体积应变； ρ ， ρ_f 分别为饱和土和孔隙水的密度； σ 为孔隙水压力； K_f 为孔隙流体的体积模量； k_d 为饱和土的动力渗透系数； n 为孔隙率；

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}。$$

采用柱坐标系建立力学模型如图 1 所示。单相弹性土层厚度为 h_e ，饱和土层厚度为 h_s ，刚性圆形基础的半径为 a ，其上作用扭矩 $T e^{i\omega t}$ (ω 表示圆频率， $i = \sqrt{-1}$)。简谐荷载作用下各函数可表示为 $f = \tilde{f} e^{i\omega t}$ 形式，为简便起见，下文中省略了因子 $e^{i\omega t}$ 。

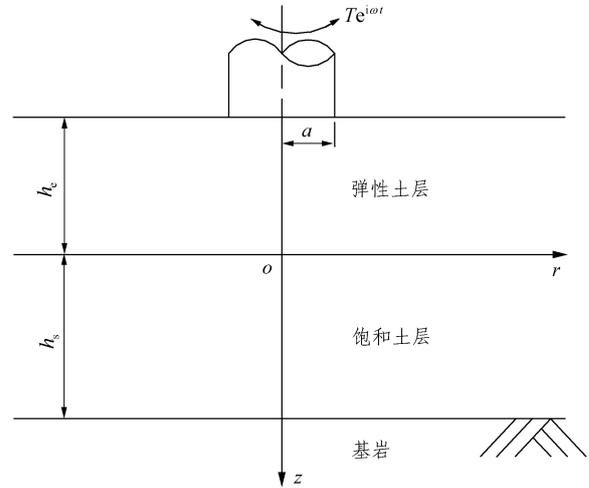


图 1 力学模型和坐标系

Fig.1 Mechanical model and coordinate system

由于所研究的是轴对称扭转问题，则几个位移分量中仅存在切向的位移 $u_{\theta e} e^{i\omega t}$ ， $u_{\theta s} e^{i\omega t}$ 和 $w_{\theta s} e^{i\omega t}$ ，并且任何分量与 θ 无关，于是式(1)~(4)可简化为

$$G_e \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_{\theta e})}{\partial r} \right] + G_e \frac{\partial^2 u_{\theta e}}{\partial z^2} = -\rho_e \omega^2 u_{\theta e} \quad (5)$$

$$G_s \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u_{\theta s} = \rho \frac{\partial^2 u_{\theta s}}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 w_{\theta s}}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$\frac{\rho_f g}{k_d} i \omega w_{\theta s} = \rho_f \omega^2 u_{\theta s} + \frac{\rho_f}{n} \omega^2 w_{\theta s} \quad (7)$$

单相弹性土体的应力 - 应变关系为

$$\tau_{z\theta e} = G_e \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial z} \quad (8)$$

饱和土体中土骨架的应力 - 应变关系为

$$\tau_{z\theta s} = G_s \frac{\partial u_{\theta s}}{\partial z} \quad (9)$$

式中： $\tau_{z\theta e}$ ， $\tau_{z\theta s}$ 分别为弹性和饱和土体的剪应力分量； G_e ， G_s 分别为弹性和饱和土体的剪切模量。

为了便于后面的分析，引入无量纲变量： $\bar{z} =$

$$\frac{z}{a}, \quad \bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{h}_e = \frac{h_e}{a}, \quad \bar{h}_s = \frac{h_s}{a}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_e}{\rho}, \quad \bar{\rho}_s = \frac{\rho_f}{\rho},$$

$$\bar{u}_{\theta e} = \frac{u_{\theta e}}{a}, \quad \bar{u}_{\theta s} = \frac{u_{\theta s}}{a}, \quad \bar{w}_{\theta e} = \frac{w_{\theta e}}{a}, \quad \bar{w}_{\theta s} = \frac{w_{\theta s}}{a},$$

$a_e = a\omega\sqrt{\frac{\rho_e}{G_e}}, a_s = a\omega\sqrt{\frac{\rho_s}{G_s}}, \bar{\tau}_{z\theta e} = \frac{\tau_{z\theta e}}{G_e}, \bar{\tau}_{z\theta s} = \frac{\tau_{z\theta s}}{G_s},$
 $\bar{k}_d = \sqrt{\frac{\rho_s}{G_s}} \frac{g}{k_d} a$ 。记 $f(r, z)$ 的 1 阶 Hankel 变换为 $\tilde{f}(\varepsilon, z) = \int_0^\infty r f(r, z) J_1(r\varepsilon) dr$ ，其逆变换为 $f(r, z) = \int_0^\infty \varepsilon \tilde{f}(\varepsilon, z) J_1(r\varepsilon) d\varepsilon$ ，其中 $J_1(r\varepsilon)$ 为 1 阶第 1 类 Bessel 函数。

对式(5)~(9)无量纲化并进行 1 阶 Hankel 变换后，有

$$-(\varepsilon^2 - a_e^2)\tilde{u}_{\theta e} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\theta e}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \tag{10}$$

$$-\varepsilon^2 \tilde{u}_{\theta s} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\theta s}}{\partial \bar{z}^2} = -a_s^2 \tilde{u}_{\theta s} - a_s^2 \bar{\rho}_s \tilde{w}_{\theta s} \tag{11}$$

$$i\bar{k}_d \tilde{w}_{\theta s} = a_s \tilde{u}_{\theta s} + \frac{a_s}{n} \tilde{w}_{\theta s} \tag{12}$$

$$\tilde{\tau}_{z\theta e} = \frac{\partial \tilde{u}_{\theta e}}{\partial \bar{z}} \tag{13}$$

$$\tilde{\tau}_{z\theta s} = \frac{\partial \tilde{u}_{\theta s}}{\partial \bar{z}} \tag{14}$$

令 $\varepsilon^2 - a_e^2 = S_e^2, \varepsilon^2 - a_s^2 - \frac{a_s^3 \bar{\rho}_s}{i\bar{k}_d - \frac{a_s}{n}} = S^2$ ，则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{u}_{\theta e}}{d\bar{z}^2} - S_e^2 \tilde{u}_{\theta e} &= 0 \\ \frac{d^2 \tilde{u}_{\theta s}}{d\bar{z}^2} - S^2 \tilde{u}_{\theta s} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

解式(15)可得

$$\tilde{u}_{\theta e} = A_1 \cosh(S_e \bar{z}) - B_1 \sinh(S_e \bar{z}) \tag{16}$$

$$\tilde{u}_{\theta s} = A_2 \cosh(S \bar{z}) - B_2 \sinh(S \bar{z}) \tag{17}$$

式中： A_1, B_1, A_2, B_2 均为关于 ε 的任意函数。

3 边界条件

假定刚性圆板与地基完全粘着接触，即接触面上无相对位移，基础与弹性层完全粘结在一起，则上表面为混合边界条件；饱和层下卧基岩，则下表面处的位移为 0；弹性层与饱和层之间的位移和应力连续。则无量纲化后有

$$\bar{u}_{\theta e}(\bar{r}, -\bar{h}_e) = \bar{r}\varphi \quad (\bar{h} = -\bar{h}_e, 0 \leq \bar{r} \leq 1) \tag{18a}$$

$$\bar{\tau}_{z\theta e}(\bar{r}, -\bar{h}_e) = 0 \quad (\bar{h} = -\bar{h}_e, \bar{r} > 1) \tag{18b}$$

$$\bar{u}_{\theta e}(\bar{r}, 0) = \bar{u}_{\theta s}(\bar{r}, 0) \quad (\bar{h} = 0) \tag{18c}$$

$$\bar{\tau}_{z\theta e}(\bar{r}, 0) = \delta \bar{\tau}_{z\theta s}(\bar{r}, 0) \quad (\bar{h} = 0) \tag{18d}$$

$$\bar{u}_{\theta s}(\bar{r}, \bar{h}_s) = 0 \quad (\bar{h} = \bar{h}_s) \tag{18e}$$

式中： $\delta = \frac{G_s}{G_e}$ ， φ 为基础扭转振动的角位移幅值。

对式(18e)进行 1 阶 Hankel 变换后有

$$A_2 = B_2 \frac{\sinh(S\bar{h}_s)}{\cosh(S\bar{h}_s)}$$

将 A_2, B_2 代入式(17), (14)可得

$$\tilde{u}_{\theta s}(\varepsilon, 0) = B_2 \frac{\sinh(S\bar{h}_s)}{\cosh(S\bar{h}_s)} \tag{19}$$

$$\tilde{\tau}_{z\theta s}(\varepsilon, 0) = -B_2 S \tag{20}$$

由式(16)有

$$\tilde{u}_{\theta e}(\varepsilon, -\bar{h}_e) = A_1 \cosh(-S_e \bar{h}_e) - B_1 \sinh(-S_e \bar{h}_e) \tag{21}$$

则

$$\tilde{u}_{\theta e}(\varepsilon, 0) = A_1$$

结合式(18c), (19)有

$$A_1 = B_2 \frac{\sinh(S\bar{h}_s)}{\cosh(S\bar{h}_s)} \tag{22}$$

由式(13)有

$$\tilde{\tau}_{z\theta e}(\varepsilon, -\bar{h}_e) = A_1 S_e \sinh(-S_e \bar{h}_e) - B_1 S_e \cosh(-S_e \bar{h}_e) \tag{23}$$

则

$$\tilde{\tau}_{z\theta e}(\varepsilon, 0) = -B_1 S_e$$

结合式(20), 由式(18d)有

$$B_2 S \delta = B_1 S_e \tag{24}$$

将式(22), (24)分别代入式(21), (23)后有

$$\tilde{u}_{\theta e}(\varepsilon, -\bar{h}_e) = -\frac{B_2 S \delta}{S_e} \sinh(-S_e \bar{h}_e) + B_2 \frac{\sinh(S\bar{h}_s)}{\cosh(S\bar{h}_s)} \cosh(-S_e \bar{h}_e) \tag{25}$$

$$\tilde{\tau}_{z\theta e}(\varepsilon, -\bar{h}_e) = -B_2 S \delta \cosh(-S_e \bar{h}_e) + B_2 \frac{\sinh(S\bar{h}_s)}{\cosh(S\bar{h}_s)} S_e \sinh(-S_e \bar{h}_e) \tag{26}$$

4 对偶积分方程的建立及求解

对式(25), (26)进行 1 阶 Hankel 逆变换后有

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \varepsilon^{-1}[1+H(\varepsilon)]B(\varepsilon)J_1(\bar{r}\varepsilon)d\varepsilon &= \bar{r}\varphi \quad (0 \leq \bar{r} \leq 1) \\ \int_0^\infty \bar{B}(\varepsilon)J_1(\bar{r}\varepsilon)d\varepsilon &= 0 \quad (\bar{r} > 1) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

其中,

$$B(\varepsilon) = -\varepsilon \left[-B_2 S \delta \cosh(-S_\varepsilon \bar{h}_e) + B_2 \frac{\sinh(S \bar{h}_s)}{\cosh(S \bar{h}_s)} S_\varepsilon \sinh(-S_\varepsilon \bar{h}_e) \right]$$

$$H(\varepsilon) = -1 - \varepsilon \left[-\frac{S \delta}{S_\varepsilon} \sinh(-S_\varepsilon \bar{h}_e) + \frac{\sinh(S \bar{h}_s)}{\cosh(S \bar{h}_s)} \cosh(-S_\varepsilon \bar{h}_e) \right]$$

$$- S \delta \cosh(-S_\varepsilon \bar{h}_e) + \frac{\sinh(S \bar{h}_s)}{\cosh(S \bar{h}_s)} S_\varepsilon \sinh(-S_\varepsilon \bar{h}_e)$$

运用文[16]中提到的方法可以化此对偶积分方程为第 2 类 Fredholm 积分方程, 假设

$$B(\varepsilon) = \frac{4\varepsilon\varphi}{\pi} \int_0^1 \sin(t\varepsilon)\theta(t)dt \quad (28)$$

则有

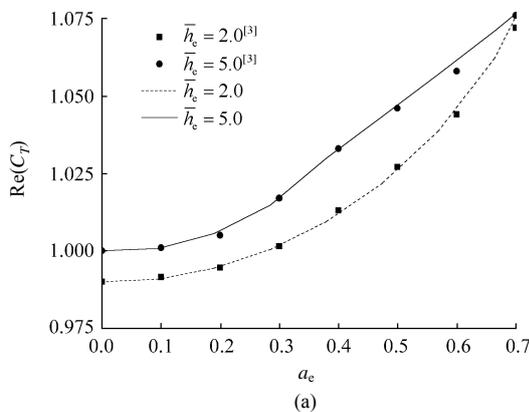
$$\theta(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 M(x, \varepsilon)\theta(\varepsilon)d\varepsilon = x \quad (29)$$

其中,

$$M(x, \varepsilon) = 2 \int_0^\infty H(\varepsilon) \sin(tx) \sin(t\varepsilon) dt$$

设作用在圆柱形刚性基础上的扭矩大小为 T , 无量纲化后有 $\bar{T} = \frac{T}{G_e a^3}$, 由基础的动力平衡条件, 对式(26)进行 1 阶 Hankel 逆变换并结合式(28)可得

$$\bar{T} = 16\varphi \int_0^1 t\theta(t)dt \quad (30)$$



静扭矩 T 作用于圆形基础时有 $T = \frac{16\varphi}{3} G_e a^3$, 对比可知动力柔度系数 $C_T = \frac{1}{3 \int_0^1 t\theta(t)dt}$, 记 $f_1 =$

$\frac{3}{16} \text{Re}(C_T)$, $f_2 = \frac{3}{16} \text{Im}(C_T)$, 基础的质量惯性矩为

I_θ (无量纲化后有 $\bar{I}_\theta = \frac{I_\theta}{\rho_e a^5}$), 则基础扭转振动时的

等效刚度 $K_T = G_e a^3 \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2}$, 等效阻尼 $D_T =$

$-\frac{\sqrt{\rho_e G_e} a^4}{a} \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2}$, 圆形刚性基础的扭转振动角位移幅值为

$$A_T = \frac{T}{G_e a^3} \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{(1 - \bar{I}_\theta a_e^2 f_1)^2 + (\bar{I}_\theta a_e^2 f_2)^2}} \quad (31)$$

在上述推导过程中如果令 $h_s \rightarrow 0$, 则该问题退化为单相弹性层上刚性圆板的扭转振动问题; 如果令 $h_e \rightarrow 0$, 则该问题退化为饱和单层上刚性圆板的扭转振动问题。

5 算例分析

算例的土层参数如表 1 所示。

表 1 土层参数

Table 1 Parameters of soil stratum						
G_e /Pa	G_s /Pa	n	k_d /($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	ρ_e /($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	ρ_s /($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	ρ_f /($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
1.65×10^8	1.83×10^8	0.35	10^{-7}	1 625	2 650	1 000

为了验证推导的正确性, 计算了弹性单层时基础的动力柔度系数曲线, 并与文[3]作一对比, 结果见图 2。由于文[3]仅给出了低频时的曲线, 所以对比范围也仅限于低频。由图 2 可以看出, 二者吻合

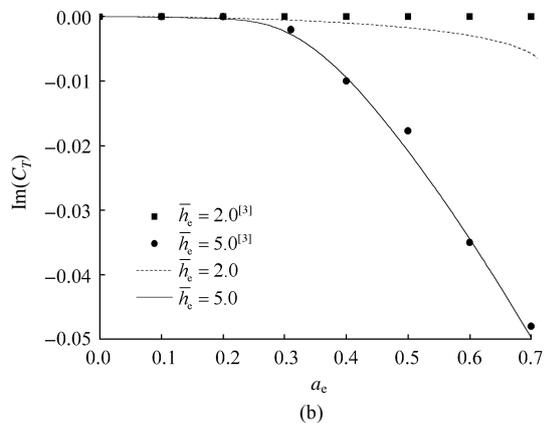
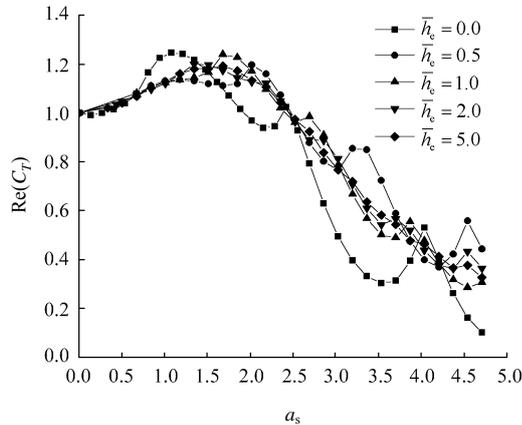


图 2 弹性层上基础的动力柔度系数曲线

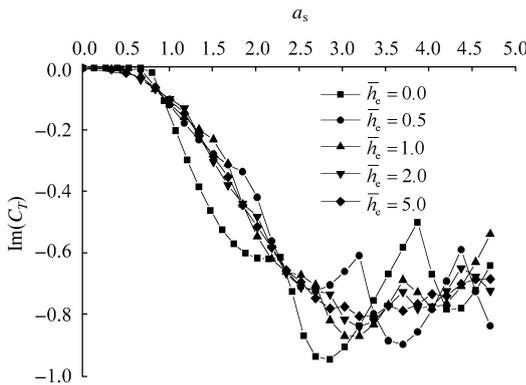
Fig.2 Dynamic compliance coefficients for a single-phase elastic stratum

得很好。

分别选取了不同的 \bar{h}_e 和 \bar{h}_s 进行计算，以分析土层厚度对扭转振动的影响，计算结果见图 3, 4；并在 $\bar{h}_e = 1$, $\bar{h}_s = 2$ 时，选用 δ 分别为 0.5, 1.1, 5.0, 10.0 进行计算，以分析土层剪切模量之比对动力响应的影响，计算结果见图 5。



(a)



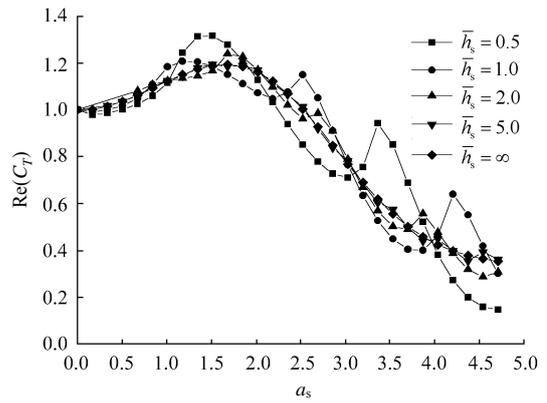
(b)

图 3 $\bar{h}_s = 2$, 不同 \bar{h}_e 时基础的动力柔度系数曲线

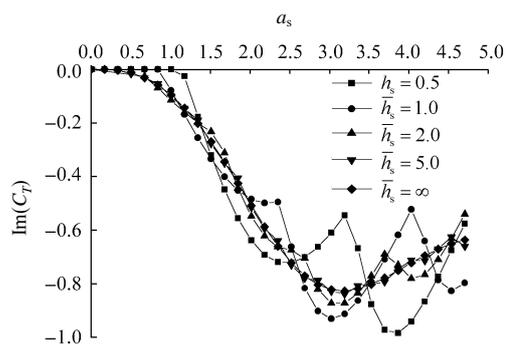
Fig.3 Dynamic compliance coefficients for different values of \bar{h}_e ($\bar{h}_s = 2$)

由图 3 可以看出，下卧基岩的层状地基上基础扭转振动时动力柔度系数的实部和虚部都呈现出明显的波动现象，这与文[13]在分析竖向振动时所得出的结论一致。由图还可以看出，当饱和层的厚度一定时，随着弹性层厚度的增加，波动现象越来越弱，这主要是因为土层越厚，波在传播过程中消耗的能量也越多，这样反射回来的波的强度也就越弱。

由图 4 可以看出，动力柔度系数围绕着 $\bar{h}_s = \infty$ 时的曲线上下波动。同样， \bar{h}_s 越小，波动现象越明显， $\bar{h}_s = 5$ 时的曲线已很接近 $\bar{h}_s = \infty$ 的曲线，这也说明了当 $\bar{h}_s \geq 5$ 时，可以视下部的饱和单层为半空



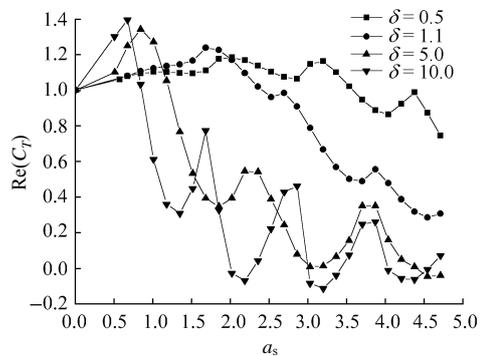
(a)



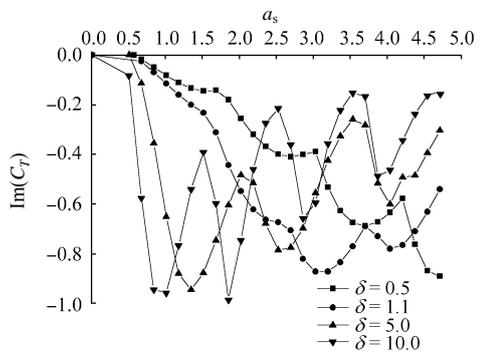
(b)

图 4 $\bar{h}_e = 1$, 不同 \bar{h}_s 时基础的动力柔度系数曲线

Fig.4 Dynamic compliance coefficients for different values of \bar{h}_s ($\bar{h}_e = 1$)



(a)



(b)

图 5 $\bar{h}_e = 1$, $\bar{h}_s = 2$, 不同 δ 时基础的动力柔度系数曲线

Fig.5 Dynamic compliance coefficients for different values of δ ($\bar{h}_e = 1$, $\bar{h}_s = 2$)

间,这与文[3]在分析弹性单相层上基础扭转振动时所得结论是一致的。

由图 5 可以看出,相邻土层的剪切模量之比对动力响应有非常明显的影响,与前面不同的是动力柔度系数并不是围绕着某一条曲线波动。相邻土层的剪切模量越接近,曲线的波动现象越不明显。这主要是剪切模量越接近时,波传至交界面时透射的部分也越多,这样反射回来的部分也就越少。通常,岩石的剪切模量要比土体的剪切模量大得多,很大一部分波会在土体与基岩交界面处反射回来,因此,当土层不太厚时忽略这种反射效应,而直接将下卧基岩土体视为半空间进行考虑是不妥的。

6 结 论

本文通过积分变换的方法研究了考虑地下水位时层状地基上基础的扭转振动问题。在分析过程中考虑了地基下卧基岩和地下水通常有一定埋深的实际情况。通过与前人研究成果的对比验证了本文的正确性。数值算例分析表明了下卧基岩成层地基上基础扭转振动呈现明显的波动,同时土层的厚度和相邻土层剪切模量之比对动力响应有非常明显的影响。

参考文献(References):

- [1] Awojobi A O, Grootenhuis P. Vibration of rigid bodies on semi-infinite media[J]. Proceedings of Royal Society(Series A), 1965, 287: 27 - 63.
- [2] Lin Y J. Dynamic response of circular plates resting on viscoelastic half space[J]. Journal of Applied Mechanics, 1978, 45: 379 - 384.
- [3] Gladwell G M L. The forced torsional vibration of an elastic stratum[J]. Int. J. Engng. Sci., 1969, (7): 1 011 - 1 024.
- [4] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, I. low frequency range[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1956, 28: 168 - 178.
- [5] Biot M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media[J]. J. Appl. Phys., 1962, 33: 1 482 - 1 498.
- [6] 王立忠, 陈云敏, 吴世明, 等. 饱和弹性半空间在低频谱和集中力下的积分形式解[J]. 水利学报, 1996, 41: 84 - 88.(Wang Lizhong, Chen Yunmin, Wu Shiming, et al. A solution to saturated elastic half-space under harmonic force of low frequency[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1996, 41: 84 - 88.(in Chinese))
- [7] Halpern M R, Christiano P. Steady-state harmonic response of a rigid plate bearing on a liquid-saturated poroelastic halfspace[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1986, 14: 439 - 454.
- [8] Zienkiewicz O C, Shiomi T. Dynamic behavior of saturated porous media, the general Biot formulation and its numerical solution[J]. Int. J. Numer. and Analytical Methods in Geomech., 1984, 8(1): 71 - 96.
- [9] Bougacha S, Tassoulas J L, Roesset J M. Analysis of foundations on fluid-filled poroelastic stratum[J]. J. Engng. Mech., ASCE, 1993, 119(8): 1 632 - 1 648.
- [10] Dominguez J. Boundary elementary approach for dynamic poroelastic problems[J]. Int. J. Numer. Methods in Engng., 1992, 35(2): 307 - 324.
- [11] Chen J, Dargush G F. Boundary element methods for dynamic poroelastic and thermoelastic analysis[J]. Int. Solids and Struct., 1995, 32(15): 2 257 - 2 278.
- [12] Rajapakse R K N D, Senjuntichai T. Dynamic response of a multi-layered poroelastic medium[J]. Earthquake Engineering and Structure Dynamics, 1995, 24: 703 - 722.
- [13] 陈胜立, 张建民, 陈龙珠. 下卧刚性基岩的饱和地基上基础的动力分析[J]. 固体力学学报, 2002, 23(3): 325 - 329.(Chen Shengli, Zhang Jianmin, Chen Longzhu. Dynamic response of a rigid circular footing on single-layered saturated soil[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2002, 23(3): 325 - 329.(in Chinese))
- [14] Philippacopoulos A J. Axisymmetric vibration of disk resting on saturated layered half-space[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1989, 115(10): 2 301 - 2 322.
- [15] 王国才, 陈龙珠, 陈胜立. 上覆单相弹性层的饱和地基上刚性圆板的扭转振动分析[J]. 固体力学学报, 2003, 24(1): 24 - 30.(Wang Guocai, Chen Longzhu, Chen Shengli. Torsional vibration of a rigid disk resting on saturated medium with an elastic superstratum[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2003, 24(1): 24 - 30.(in Chinese))
- [16] Nobel B. The solution of Bessel function dual integral equation by a multiplying factor method[A]. In: Proceedings Comb. Philosophical Society[C]. [s. l.]: [s. n.], 1963. 351 - 362.