

Kriging 插值无网格方法及其在力学边值问题中的应用

樊成^{1,2}, 栾茂田^{1,2}, 黎勇^{1,2}, 杨庆^{1,2}

(1. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024; 2. 大连理工大学 土木水利学院岩土工程研究所, 辽宁 大连 116024)

摘要: 在传统的无网格 Galerkin 法中, 采用滑动 Kriging 插值方法构造形函数, 并与无网格方法相结合建立一种新的无网格方法。依此方法所构造的形函数具有 Kronecker δ -函数属性, 便于直接施加强制边界条件。结合弹性力学边值问题, 阐述该方法的基本原理, 进而通过算例计算与分析, 考察该方法的计算精度及其效率。

关键词: 数值分析; 无网格方法; Kriging 插值; Kronecker δ -函数属性

中图分类号: O 241

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2007)01 - 0195 - 06

A NEW-TYPE ELEMENT-FREE METHOD BASED ON KRIGING INTERPOLATION SCHEME AND ITS APPLICATION TO SOLVING BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF MECHANICS

FAN Cheng^{1,2}, LUAN Maotian^{1,2}, LI Yong^{1,2}, YANG Qing^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China;

2. Institute of Geotechnical Engineering, School of Civil and Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

Abstract: Presented in this paper is a new formulation of the element-free Galerkin method for the boundary-value problems of solid mechanics in which the moving Kriging interpolation procedure is employed instead of moving least squared procedure to construct shape function. The proposed procedure is characterized by the feature that the shape function constructed by moving Kriging procedure possess the property of Kronecker δ -function and the consistency property. At the same time, the specified essential boundary conditions can be easily implemented while displacement boundary conditions are not easily imposed in the conventional element-free methods. The fundamental theory of this procedure is illustrated; and mathematical formulations are given. Then numerical examples are analyzed by the proposed procedure; and the computed results are compared with other solutions to verify the effectiveness and accuracy of the proposed method.

Key words: numerical analysis; element-free method; Kriging interpolation; property of Kronecker δ -function

1 引言

作为一种新的数值计算方法, 无网格方法只需要一定的节点信息而不必划分单元^[1, 2], 且在节点

不规则分布时, 不会损失多少计算精度, 从而日益得到重视, 并得到不断发展。其中, 采用滑动最小二乘技术构造试函数和检验函数的无网格 Galerkin 法(EFGM: element-free Galerkin methods)得到了广泛应用。但是由滑动最小二乘技术所构造的形函数

收稿日期: 2005 - 12 - 02; **修回日期:** 2006 - 01 - 20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172022); 教育部跨世纪优秀人才培养计划研究基金资助项目

作者简介: 樊成(1976 -), 男, 1999年毕业于安徽理工大学水文地质与工程地质专业, 现为博士研究生, 主要从事岩土工程数值分析与计算等方面的研究工作。E-mail: fan76cheng@163.com

不具备 Kronecker δ -函数属性，因此固体力学中位移已知边界条件等强制边界条件的处理受到限制^[3]。Lagrange 乘子法被成功用于处理本质边界条件，但同时增加了未知量数量^[1]；G. J. Wagner 和 W. K. Lin^[4]采用真实配点法处理本质边界条件，其缺点是中间过渡矩阵多，增加了计算量；Y. Krongauz 和 T. Belytschko^[5]采用与有限元耦合处理强制边界条件法，耦合界面处的形函数又比较复杂，因此但是处理效果尚不能令人满意。

为了发挥这种无网格方法的自身优势，本文在构造形函数时采用滑动 Kriging 方法代替滑动最小二乘技术，由此发展了一种新的无网格方法，由于由此所构造的形函数具备 Kronecker δ -函数属性，从而能够有效地处理位移边界条件。

Kriging 插值法是法国地理数学家 Matheron 和南非采矿工程师 Krige 发明的一种用于地质统计学中矿品位的优化插值方法^[6]。J. Sacks 等^[7-8]广泛地讨论了这种方法在计算机试验及工程设计优化中的应用。M. L. Stein^[9]阐述了 Kriging 方法的数学理论。

本文首先阐述了滑动 Kriging 插值方法及以此为基础所发展的一种新的无网格方法，并结合固体力学中的边值问题给出了这种无网格方法的数学列式，进而通过算例分析探讨了该无网络方法的有效性及其计算精度。

2 滑动 Kriging 插值方法的基本原理

2.1 形函数构造方法

与滑动最小二乘法相似，假设求解域 Ω 内存在任意一 x ，在以 x 为中心的微小邻域内 $\Omega_x \in \Omega$ 有 n 个节点。滑动 Kriging 插值方法的逼近函数采用如下线性回归模型与偏差之和的模式^[8]：

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x)a_j + z(x) = \mathbf{p}^T(x)\mathbf{a} + z(x) \quad (1)$$

式中： $\mathbf{p}^T(x)$ 为关于空间位置 $\mathbf{x} = \{x, y, z\}^T$ 的基函数，通常为单项式，且一般采用线性基； \mathbf{a} 为待求常系数向量。假定 $z(x)$ 是一个均值为 0、方差为 σ^2 、协方差不为 0 的随机过程，表示实际过程与线性回归模型之间的局部离差。采用式(1)对 n 个样本点进行插值，则 $z(x)$ 的协方差为

$$\text{cov}\{z(x_i), z(x_j)\} = \sigma^2 \mathbf{R}[R(x_i, x_j)] \quad (2)$$

式中： $\mathbf{R}[R(x_i, x_j)]$ 为对角线为单位 1 的对称相关矩阵； $R(x_i, x_j)$ 为任意两点 x_i 和 x_j 之间的相关函数，为简便通常取为下列 Gaussian 函数：

$$R(x_i, x_j) = \exp(-\theta r_{ij}^2) \quad (3)$$

式中： θ 为模型参数，且有 $\theta \geq 0$ ； r_{ij} 为给定两点 x_i 和 x_j 之间的距离，且有

$$r_{ij} = \|x_i - x_j\| \quad (4)$$

x 与所给定的 n 个节点之间的相关函数向量为

$$\mathbf{r}^T(x) = \{R(x, x_1), \dots, R(x, x_n)\}^T \quad (5)$$

当在给定的一系列节点 x_1, x_2, \dots, x_n 上函数值已知时，即

$$\mathbf{U}_s = \{u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)\}^T \quad (6)$$

式中： \mathbf{U}_s 为 n 个节点处场函数的集合。

当采用线性回归模型式(1)时，则有

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{P}_m \mathbf{a} + \mathbf{Z} \quad (7)$$

式中： \mathbf{P}_m, \mathbf{Z} 分别为给定点上基函数值所形成的矩阵及线性逼近的误差向量，且有

$$\mathbf{P}_m = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}(x_1) \\ \mathbf{p}(x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}(x_n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \cdots & p_m(x_n) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{Z} = \{z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)\}^T \quad (9)$$

对任意一点 $x \in \Omega_x$ ，采用已知节点的函数值对场函数 $u(x)$ 进行线性逼近时，则有

$$\hat{u}(x) = \mathbf{c}^T(x)\mathbf{U}_s = \{c_1(x), \dots, c_n(x)\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (10)$$

于是，式(1)与(10)之间的误差函数为

$$\hat{u}(x) - u^h(x) = \mathbf{c}^T(x)\mathbf{U}_s - u^h(x) = \mathbf{c}^T(x)(\mathbf{P}_m \mathbf{a} + \mathbf{Z}) -$$

$$[\mathbf{p}^T(x)\mathbf{a} + z(x)] = \mathbf{c}^T(x)\mathbf{Z} -$$

$$z(x) + \{\mathbf{P}_m^T \mathbf{c}(x) - \mathbf{p}(x)\}^T \mathbf{a} \quad (11)$$

要保证无偏估计则必须满足如下约束条件：

$$\mathbf{P}_m^T \mathbf{c}(x) - \mathbf{p}(x) = 0 \quad (12)$$

式(11)中误差函数的均方差为

$$\text{MSE}[\hat{u}(\mathbf{x}) - u^h(\mathbf{x})] = E[\mathbf{c}^T(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})]^2 \quad (13)$$

为了确定最优的线性估计, 将式(13)作为目标函数, 式(12)作为约束条件, 进而根据 Lagrange 不定乘子法可以将其转化为无条件的极小值问题。实际上, 式(12), (13)对应于问题 Lagrange 泛函关于待定向量 $\mathbf{c}^T(\mathbf{x})$ 取极小值的极值条件, 由此根据泛函分析^[10]可以得到最优线性无偏估计条件下的插值函数为

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}_Q^{-1}(\mathbf{U}_s - \mathbf{P}_m\hat{\mathbf{a}}) \quad (14)$$

其中,

$$\hat{\mathbf{a}} = [\mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{U}_s \quad (15)$$

式中: \mathbf{R}_Q 为 $n \times n$ 阶矩阵, 且有

$$\mathbf{R}_Q = \begin{bmatrix} 1 & R(x_1, x_2) & \cdots & R(x_1, x_n) \\ R(x_2, x_1) & 1 & \cdots & R(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(x_n, x_1) & R(x_n, x_2) & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

为了便于表述, 定义:

$$\mathbf{S}_a = (\mathbf{P}_m^T(\mathbf{x})\mathbf{R}_Q^{-1}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}_m^T\mathbf{R}_Q^{-1} \quad (17a)$$

$$\mathbf{S}_b = \mathbf{R}_Q^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_m\mathbf{S}_a) \quad (17b)$$

式中: \mathbf{I} 为 $n \times n$ 阶单位矩阵。于是式(14)可改写为

$$u^h(\mathbf{x}) = [\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_a + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_b]\mathbf{U}_s \quad (18a)$$

或

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{U}_s = \sum_k^n \phi_k(\mathbf{x})u_k \quad (18b)$$

式中: $\Phi(\mathbf{x})$, $\phi_k(\mathbf{x})$ 分别为形函数矩阵和形函数, 且有

$$\Phi(\mathbf{x}) = \{\phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \phi_n(\mathbf{x})\} \quad (19a)$$

$$\phi_k(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x})S_{ajk} + \sum_i^n r_k(\mathbf{x})S_{bik} \quad (19b)$$

式中: S_{ajk} 为矩阵 \mathbf{S}_a 的第 j 行 k 列元素, S_{bik} 为矩阵 \mathbf{S}_b 的第 i 行 k 列元素。

形函数 $\phi_k(\mathbf{x})$ 关于 x 和 y 的导函数分别为

$$\phi_{k,x} = \frac{\partial \phi_k(\mathbf{x})}{\partial x} = \sum_j^m \frac{\partial p_j(\mathbf{x})}{\partial x} S_{ajk} + \sum_i^n \frac{\partial r_k(\mathbf{x})}{\partial x} S_{bik} \quad (20a)$$

$$\phi_{k,y} = \frac{\partial \phi_k(\mathbf{x})}{\partial y} = \sum_j^m \frac{\partial p_j(\mathbf{x})}{\partial y} S_{ajk} + \sum_i^n \frac{\partial r_k(\mathbf{x})}{\partial y} S_{bik} \quad (20b)$$

2.2 形函数的性质

经检验, 按照上述方法所构造的形函数 $\phi_k(\mathbf{x})$ 具备如下 Kronecker δ -函数的性质和一致性条件:

$$\phi_k(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 & (k = j; k, j = 1, 2, \dots, n) \\ 0 & (k \neq j; k, j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_k^n \phi_k(\mathbf{x}) &= 1 \\ \sum_k^n \phi_k(\mathbf{x})x_k &= x \\ \sum_k^n \phi_k(\mathbf{x})y_k &= y \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

3 弹性力学边值问题的 Kriging 插值无网格方法的数值计算列式

对于弹性力学边值问题, 在计算域为 Ω 内的平衡方程、力边界 Γ_t 与位移边界 Γ_u 上的力边界条件和位移边界条件分别为

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (23a)$$

$$\sigma_{ij}n_j - \bar{t}_i = 0 \quad (23b)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad (23c)$$

式中: σ_{ij} 为应力张量; b_i 为体力向量; \bar{t}_i , \bar{u}_i 分别为给定的边界面力向量与边界位移向量; n_j 为边界外法向单位向量。

由总势能函数的驻值条件, 可以建立上述弹性力学边值问题的 Galerkin 弱形式:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma = 0 \quad (24)$$

进一步考虑物理方程 ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$) 和几何方程 ($\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$), 则可得到如下以位移向量 \mathbf{u} 所表达的控制方程的弱形式:

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (25)$$

式中: \mathbf{L} , \mathbf{D} 分别为小变形条件下几何关系微分算子和弹性系数矩阵, 且有

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{bmatrix} \quad (\text{平面应力}) \quad (27a)$$

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{平面应变}) \quad (27b)$$

将上述由滑动 Kriging 插值方法所构造的近似场函数式(18)代入平衡方程的弱形式(25)，则针对弹性力学边值问题，由无网格方法所建立的平衡方程为

$$KU = F \quad (28)$$

式中： K ， F ， U 分别为系统的刚度矩阵、载荷向量和未知位移向量，且有

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$F = \{f_1^T, f_2^T, \dots, f_n^T\}^T \quad (30)$$

其中，

$$K_{kj} = \int_{\Omega} B_k^T C B_j d\Omega \quad (k, j = 1, 2, \dots, n) \quad (31)$$

$$f_k = \int_{\Gamma_k} \phi_i(x_j) \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_k(x_j) b d\Omega \quad (k, j = 1, 2, \dots, n) \quad (32)$$

$$B_k^T = L^T \phi_k(x) = \begin{bmatrix} \phi_{k,x} & 0 & \phi_{k,y} \\ 0 & \phi_{k,y} & \phi_{k,x} \end{bmatrix} \quad (33)$$

求解式(28)可得系统的未知位移向量 U ，由此按照上述插值方法求得域内任意点的场变量 u ，进而利用几何方程和物理方程可求得应变与应力。

上述方法中的关键问题是式(31)，(32)中的数值积分。具体地，在计算域 Ω 内布置 N 个节点，用一组独立于节点的背景网格把计算域 Ω 划分成若干积分子域，在每个积分子域上确定高斯点 x_g 的位置及积分权数 w_g 。对于某个子域，首先针对某个高斯点判断其是否位于求解域内，若该高斯点位于求解域内，进而判断对该高斯点 x_g 具有影响的节点，由

此确定该高斯点 x_g 的形函数 $\phi_k(x_g)$ 及其导函数；然后按照式(29)，(30)分别计算和贮存各个子矩阵 K_{kj} 和向量 f_k ，对于子域内的各个高斯点重复上述运算，进行总体组装。对于求解域 Ω 内的每个子域进行全部扫描，重复上述运算。

4 算例分析

4.1 自由端受集中载荷作用的悬臂梁计算

如图 1 所示，长度 $L = 4.8 \text{ m}$ 、厚度 $D = 1.2 \text{ m}$ 的悬臂梁在自由端部承受竖向单位集中载荷 $F = 1 \text{ kN}$ 的作用。梁材料的弹性模量 E 与泊松比 ν 分别为 300 MPa 和 0.3 。整个计算域划分为 10×4 个积分子域，每个子域采用 2×2 个高斯积分点，将力边界划分为 4 段，每段采用 2 个高斯积分点。

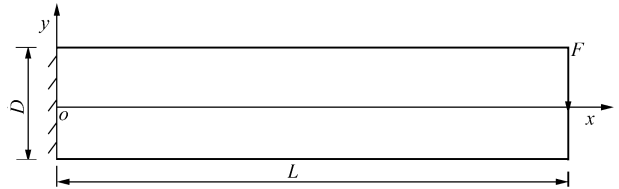


图 1 自由端部受集中载荷作用的悬臂梁

Fig.1 Cantilever beam subjected to vertical point load at the free end

图 2、3 分别给出了计算所得中性轴处竖向位移 v 和 $x = 2.4 \text{ m}$ 处截面上的正应力分布，并与弹性理论解^[11]进行了对比。由图 2、3 可见，本文数值解与弹性理论解基本一致。

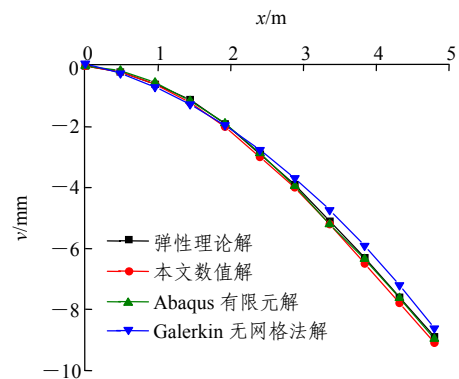


图 2 计算所得中性轴处竖向位移 v

Fig.2 Computed deflection v of beam at the neutral axis

4.2 三角形载荷作用下地基附加应力计算

对于图 4 所示的条形基础在竖直三角形分布载荷作用下地基附加应力问题，取条形基础底面宽度

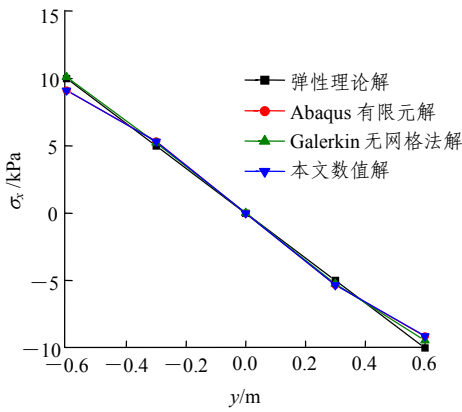


图 3 $x = 2.4$ m 处截面上正应力分布

Fig.3 Normal stresses of the section at $x = 2.4$ m

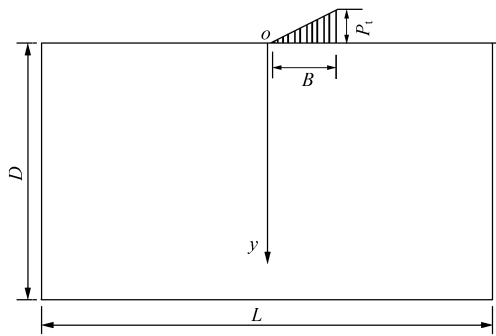


图 4 条形基础下地基附加应力计算模型

Fig.4 Computational model of strip foundation

$B = 2$ m, 三角形压力分布最大压力集度 $P_1 = 30$ kPa。Kriging 插值无网格方法中, 在长度 $L = 20$ m、深度 $D = 10$ m 的计算区域内共布设 29×15 个节点, 积分过程中采用 22×12 个背景网格, 每个网格中的 Gauss 积分点为 2×2 。力边界分成 4 个积分段, 每段所采用的 Gauss 积分点数为 2。

图 5, 6 分别给出了附加竖向应力的本文数值解和弹性理论解^[12]。由图 5, 6 可见, 本文所得数值

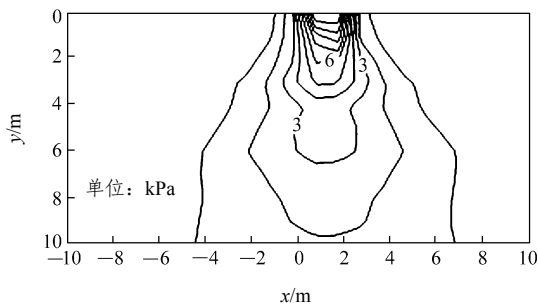


图 5 附加竖向应力的本文数值解

Fig.5 Distribution of additional vertical stresses of foundation computed by the proposed method

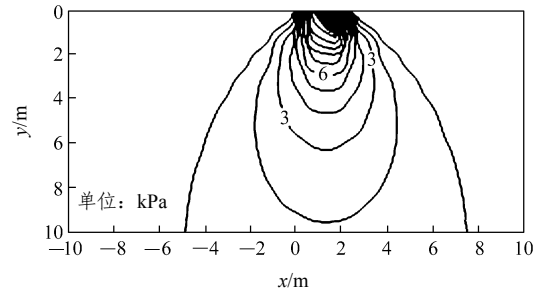


图 6 附加竖向应力的弹性理论解^[12]

Fig.6 Distribution of additional vertical stresses of foundation given by the theory of elasticity^[12]

解与弹性理论解基本相同。

4.3 受均布载荷作用的单边裂纹矩形板

如图 7(a)所示, 考虑带有裂纹的矩形板, 板的宽度为 L , 高度为 $2L$, 裂纹长度为 a , 板的两端承受均布载荷拉力 σ , 求解其裂纹尖端的应力强度因子及应力场分布。采用本文方法求解应力强度因子及裂尖应力分布时, 所取参数为: $L = 1$ m, $a = 0.5$ m, $\sigma = 2$ MPa, $E = 15$ MPa, $\nu = 0.3$ 。

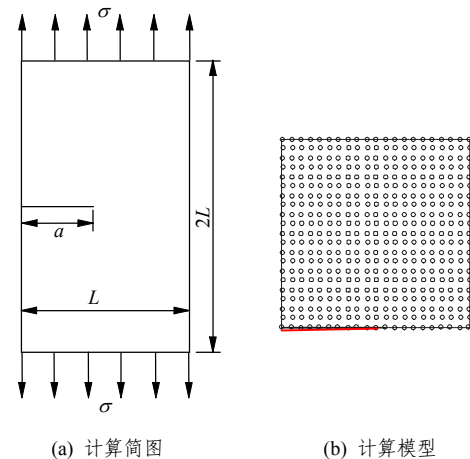
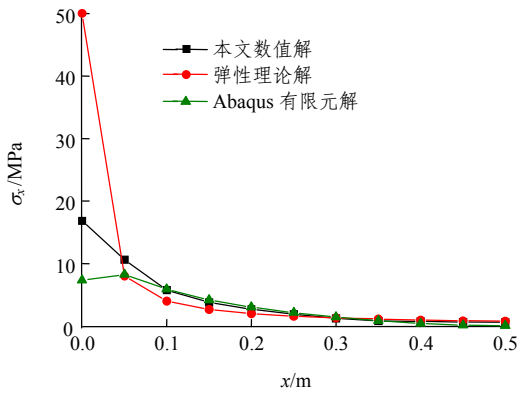


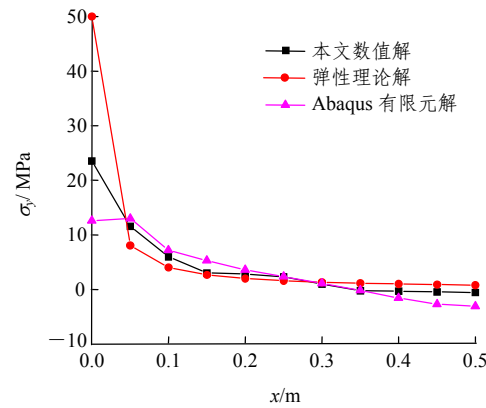
图 7 带有裂纹的矩形板及其无单元计算模型

Fig.7 Rectangular plate with a horizontal crack under uniaxial tension and computational model of MFM

考虑到问题的对称性, 取一半进行分析, 其计算模型如图 7(b)所示。计算过程中总共布设 21×21 个节点, 采用 10×10 个背景网格, 每个网格采用的 Gauss 积分点为 3×3 , 力边界分为 10 个积分段, 每段采用 3 个 Gauss 积分点。计算所得到的应力强度因子为 $K_1^{comp} = 2.58\sigma\sqrt{\pi a}$, 与断裂力学所给出的理论解 $K_1^T = 2.86\sigma\sqrt{\pi a}$ ^[13]之间的相对误差为 9.79%。计算所得裂尖处的水平应力与竖向应力如图 8 所示。由图 8 可知, 本文方法能够较好地描述裂纹尖端的奇异应力。



(a) 水平应力 σ_x



(b) 竖向应力 σ_y

图 8 裂尖处的水平应力与竖向应力

Fig.8 Normal stresses in the neighborhood of crack-tip

5 结 论

无网格方法是一种新兴的数值计算方法，目前仍处于不断发展与完善阶段。本文采用滑动 Kriging 插值方法构造形函数，以此为基础，结合弹性力学边值问题建立了无网格方法及其数值列式，由此方法所构造的形函数具备 Kronecker δ - 函数属性，便于实现给定的强制性边界条件。最后，通过 3 个算例分析对本文方法进行了论证，其结果与精确解以及已知数值解吻合程度较高。

参考文献(References):

[1] BELYSTCHKO T, LIU Y, GU L. Element-free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994,

37(2): 229 - 256.
 [2] 庞作会, 葛修润, 郑 宏, 等. 一种新的数值方法——无网格伽辽金法[J]. 计算力学学报, 1999, 16(3): 320 - 329.(PANG Zuohui, GE Xiurun, ZHENG Hong, et al. A new numerical method: element-free Galerkin method(EFGM)[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1999, 16(3): 320 - 329.(in Chinese))
 [3] 王卫东, 赵国群, 栾贻国. 无网格方法中本质边界条件的处理[J]. 力学季刊, 2002, 23(4): 521 - 527.(WANG Weidong, ZHAO Guoqun, LUAN Yiguo. Treatment of essential boundary conditions for element-free Galerkin method[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2002, 23(4): 521 - 527. (in Chinese))
 [4] WAGNER G J, LIU W K. Application of essential boundary conditions in mesh-free methods: a corrected collocation method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 43(8): 1 367 - 1 379.
 [5] KRONGAUZ Y, BELYTSCHKO T. Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 131(1): 1 335 - 1 345.
 [6] MATHERON G. Principles of geostatistics[J]. Economic Geology, 1963, 58(8): 1 246 - 1 266.
 [7] SACKS J, WELCH W J, MITCHELL T J, et al. Design and analysis of computer experiments[J]. Statistical Science, 1989, 4(4): 409 - 435.
 [8] SACKS J, SUSANNAH S B, WELCH W J. Design for computer experiments[J]. Technometrics, 1989, 31(1): 41 - 47.
 [9] STEIN M L. Interpolation of spatial data: some theory for Kriging[M]. New York: Springer, 1999.
 [10] LOPHAVEN S N, NIELSEN H B, JACOB S. A Matlab Kriging toolbox(version 2.0)[R]. Denmark: Technical University of Denmark, 2002.
 [11] 杨桂通. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.(YANG Guitong. Elasticity mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 1998.(in Chinese))
 [12] 陈仲颐, 周景星, 王洪瑾. 土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1994.(CHEN Zhongyi, ZHOU Jingxing, WANG Hongjin. Soil mechanics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1994. (in Chinese))
 [13] ANDERSON T L. Fracture Mechanics: Fundamentals and applications[M]. Boca Raton: CRC Press, 1991.