階為 $g=p^2g'$ 的羣*

曹錫華

（浙江大學）

一、引言

如果 $\mathfrak{G}$ 是階為 $g=pg'$（p 是素數，$(g',p)=1$）的羣，人們已經有了描述對於素數 p 的指標的性質的相當完整的結果[1]. 在這篇文章裏我們要探討階為 $g=p^2g'$（$(g',p)=1$）的羣. 這時情况比較複雜得多，因為不僅虧數（defects）是 0 或 1 的塊（blocks）會出現，而且虧數為 2 的塊也會出現.[2] 關於後者我們知道的很少.

羣 $\mathfrak{G}$ 包有一個階 p^2 的羣 $\mathfrak{p}$. 這時我們有兩種情形：$\mathfrak{p}$ 是 (p,p) 型的阿培爾羣或 $\mathfrak{p}$ 是巡迴羣. 我們把我們的工作主要限制到第一種情形. 實際上，我們的方法對於第二種情形也能用，而情况比第一種情形是要簡單些的.

我們要考慮 $\mathfrak{p}$ 的以及 $\mathfrak{p}$ 的 p 階部分羣的正常化子和中心化子. 這些羣的性質不像 $\mathfrak{G}$ 那樣複雜，因為我們可以用階含素數 p 到一次冪的一些羣來描寫他們. 我們研究的目的就是要證明羣 $\mathfrak{G}$ 的指標是强烈的依賴着這些部分羣的構造. 我們得到了一些羣 $\mathfrak{G}$ 的指標和上面所說的那些部分羣的指標間的關聯.

我們先開始討論中心化子 $\mathfrak{L}(\mathfrak{p})$ 和正常化子 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$. 羣 $\mathfrak{L}(\mathfrak{p})$ 是 $\mathfrak{p}$ 和一個階與 p 互素的羣 $\mathfrak{W}$ 的直乘積 $\mathfrak{p}\times\mathfrak{W}$. 因子羣 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})/\mathfrak{L}(\mathfrak{p})$ 或為阿培爾羣或為一類熟知的羣中的一個. $\mathfrak{G}$ 的虧數 2 的那些塊和 $\mathfrak{W}$ 的那些在 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ 中相連（associated）的既約指標 θ 的類之間有個一一對應的關係. 每個虧數 1 的塊都有一個階 p 的虧數羣（defect group）$\mathfrak{p}$，如果共軛羣看作沒有基本區別的話，這羣是唯一決定

* 1951 年 10 月 22 日收到

1. 參考 [4]. 方括弧內數字是指示文末參考文獻
2. 關於表示論的一些概念的討論可以看本文 §2.

的. 中心化子 $\mathfrak{Z}(\mathfrak{P}_1)$ 也是一個直乘積 $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{W}$, 並且以 $\mathfrak{P}_1$ 爲虧數羣的那些塊與 $\mathfrak{W}$ 的那些在 $\mathfrak{P}_1$ 的正常化子 $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_1)$ 中相連的虧數 0 的指標的類之間有個一一對應的關係.

$\mathfrak{G}$ 的指標的值被分解數 (decomposition numbers) $d^i_{\mu\varrho}$ 決定得很利害. $d^i_{\mu\delta}$ 這些數是一個分圓域裏的元素. 在後面幾節裏我們進一步地研究了出現的無理元素的性質. 特別, 我們討論了出現的無理元素的性質依賴 $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}), \mathfrak{Z}(\mathfrak{P}), \mathfrak{N}(\mathfrak{P}_1)$ 和 $\mathfrak{Z}(\mathfrak{P}_1)$ 這些羣的構造到何種程度的.

最後, 讓我感謝 Richard Brauer 教授給我的幫助.

二、 已知結果提要

1. 記法.

設 $\mathfrak{G}$ 爲 g 階的有限羣. 除了 $\mathfrak{G}$ 之外, 我們同時還考慮 $\mathfrak{G}$ 在一域 K 上的羣代數 $\Gamma = \Gamma_K(\mathfrak{G})$. 如果

$$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_k \tag{1}$$

是 $\mathfrak{G}$ 的共軛元素級, 並且如果 $\dot{\mathfrak{K}}_j$ 表示 $\mathfrak{K}_j$ 中元素的和, 那麼, 這 k 個元素就組成 Γ 的心 $\Lambda = \Lambda_K(\mathfrak{G})$ 的一組基元素.

設 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{G}$ 中元素的任意集合, 我們以 $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ 表示 $\mathfrak{A}$ 的正常化子, 即 $\mathfrak{G}$ 中所有適合方程 $N\mathfrak{A} = \mathfrak{A}N$ 的元素 N. $\mathfrak{G}$ 中所有與 $\mathfrak{A}$ 中每個元素都相交換的元素組成 $\mathfrak{A}$ 的中心化子 $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$. 特別, 我們也把這種記法用於僅含一個元素 A 的集合 $\mathfrak{A}$. 我們這時簡單地寫成 $\mathfrak{N}(A)$ 和 $\mathfrak{Z}(A)$. 顯然, 這兩個羣是相等的.

羣 $\mathfrak{G}$ 有 k 個絕對旣約(常)指標.

$$\mathfrak{J}_1(G), \mathfrak{J}_2(G), \cdots, \mathfrak{J}_k(G), G \varepsilon \mathfrak{G}, \tag{2}$$

這兒 k 是 (1) 中的同一個數. 讓 z_i 表示 $\mathfrak{J}_i$ 之次數, 則

$$z_i = \mathfrak{J}_i(1) = d\,g\,\mathfrak{F}_i. \tag{3}$$

如果 G_j 是 $\mathfrak{K}_j$ 中的元素, 令

$$w_i(\mathfrak{K}_j)=w_i(\dot{\mathfrak{K}}_j)=w_i(G_j)=g\,\mathfrak{Z}_i(G_j)/n(G_j)z_i. \tag{4}$$

如果域 K 的標數是 0, 並且包有所有 $\mathfrak{Z}_i(G_j)$ 這些值, 那麼當 i 固定時, w_i 就定義交換代數 $\wedge$ 的一個線性指標並且 $\wedge$ 的每個既約指標都是這種情形式的. 我們已經熟知, (4) 的量都是代數整數.

2. p-塊 (p-blocks)

取一個素數 p. 有趣味的情形是 p 除盡 g 的情形. 令

$$g=p^a g', \quad (p,g')=1. \tag{5}$$

從現在開始, 取域 K 為從有理數域添加 g 次單位根所得到的域. 設 $\mathfrak{z}$ 為 K 中整除 p 的一個固定素理想數. 如果 α 是 K 中的一個整數(或者, 更普遍些, 如果 α 是 $\alpha=\beta/\gamma$ 的形式, 這兒 β,γ 都是 K 中的整數並且 $(\beta,\gamma)=1$, 讓 α^* 表示 α 的餘級 (mod $\mathfrak{z}$). 那麼所有 α^* 就組成餘級域 K^*, 這是個標數 p 的有限域.

對於一個固定的 i, $w_i(\mathfrak{K}_j)^*$ 這些值就定義模 (modular) 羣代數 $\Gamma^*=\Gamma_{K^*}(\mathfrak{G})$ 的心 $\wedge^*=\wedge_{K^*}(\mathfrak{G})$ 的一個線性指標. 用這種方法, 我們就得到 $\wedge^*$ 的一個完全既約指標系. 然而, 這 k 個指標 $w_1^*, w_2^*, \cdots, w_k^*$ 不全是相異的. 我們說 $\mathfrak{G}$ 的兩個指標 $\mathfrak{Z}_{i'}$ 和 $\mathfrak{Z}_i$, 對於 p 是屬於同一個塊 (block) 的, 如果 $w_i^*=w_{i'}^*$, 也就是, 如果

$$g\,\mathfrak{Z}_i(G_j)/n(G_j)z_i \equiv g\,\mathfrak{Z}_{i'}(G_j)/n(G_j)z_{i'} \pmod{\mathfrak{z}} \tag{6}$$

對於 $j=1,2,\cdots,k$. 用這種方法, 指標 (2) 就分配到一些塊 $B_1, B_2, \cdots, B_t$ 裏去, 而每個指標屬於而且只屬於一塊. 如果 B_t 裏指標的次數 z_i 都被 p^r 除盡, 而不全被 p^{r+1} 除盡, 我們就說 B_t 的虧數 (defect) 是 $a-r$.[3]

3. $\mathfrak{G}$ 的塊與某些部分群的塊之間的關係.

設 $\mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的 $p^h, h\geqq 0$, 階的一個部分羣. 考慮適合下列條件的 $\mathfrak{G}$ 的一個部分羣 $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{H}\mathfrak{L}(\mathfrak{H})\subseteq \mathfrak{M}\subseteq \mathfrak{N}(\mathfrak{H}). \tag{7}$$

3. 參考 [1]; 那兒 r 型的塊是虧數 $a-r$ 的塊.

如果 $\tilde{B}$ 是 $\mathfrak{M}$（對於固定素數 p）的一個指標塊, 那麼 $\tilde{B}$ 就決定 $\mathfrak{G}$ 的一個唯一的塊 B.[4] $\tilde{B}$ 與 B 的關聯可以照下面的方式描述出來: 對於 $\mathfrak{M}$ 的塊 $\tilde{B}$, 對應着 $\wedge_K^*(\mathfrak{M})$ 的一個線性模指標 $\tilde{\omega}^*$. $\wedge_K^*(\mathfrak{G})$ 中有一個唯一的線性模指標 ω^* 存在使得

$$\omega^*(\mathfrak{K}_l) = \Sigma\,\tilde{\omega}^*(\tilde{\mathfrak{K}}_\varrho), \tag{8}$$

這兒 $\tilde{\mathfrak{K}}_\varrho$ 跑過 $\mathfrak{M}$ 裏含在 $\mathfrak{K}_l$ 中的共軛元素級. 那麼, B 就是 $\mathfrak{G}$ 的對應於 $\wedge_K^*(\mathfrak{Y})$ 的模指標 ω^* 的塊. 如果 $\tilde{B}$ 的虧數是 $\tilde{d}$ 並且 B 的虧數是 d, 我們就有

$$h \leqq \tilde{d} \leqq d. \tag{9}$$

對於 $\mathfrak{G}$ 的一個已知塊 B, 就有一個 p^h 階的部分羣 $\mathfrak{H}$ 和 $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}(\mathfrak{H})$ 的一個塊 $\tilde{B}$ 存在, 使得 (9) 中的等號成立, 即 $h=\tilde{d}=d$. 如果 $\mathfrak{G}$ 的共軛部分羣被認爲是相同的, 那麼部分羣 $\mathfrak{H}$ 就由這個條件唯一決定. 我們把這個羣 $\mathfrak{H}$ 叫做 B 的虧數羣 ϑ. 再者, $\mathfrak{N}(\vartheta)$, $(\mathfrak{H}=\vartheta)$, 的塊 $\tilde{B}$ 由這個條件唯一決定.

設 $\mathfrak{H}$ 再是 $\mathfrak{G}$ 中 p^h 階的任意部分羣, $\mathfrak{M}$ 是適合條件 (7) 的羣, 如果在 $\mathfrak{M}$ 中具虧數羣 $\tilde{\vartheta}$ 的羣 $\mathfrak{M}$ 的塊 $\tilde{B}$ 決定具虧數羣 ϑ 的羣 $\mathfrak{G}$ 的塊 B, 則

$$\mathfrak{H} \subseteqq \tilde{\vartheta} \subseteqq \mathfrak{M} \tag{10}$$

並且 $\tilde{\vartheta}$ 在 $\mathfrak{G}$ 中與 ϑ 的一個部分羣 $\tilde{\vartheta}^\circ$ 共軛;

$$\tilde{\vartheta} \sim \tilde{\vartheta}^\circ \quad (\text{在 } \mathfrak{G} \text{ 中}); \quad \tilde{\vartheta}^\circ \subseteqq \vartheta.^{5} \tag{11}$$

4. 塊 B 的模指標.

設 B 爲 $\mathfrak{G}$ 的一個 p 一塊, 我們說 $\mathfrak{G}$（對於 p 的）模既約指標 φ_j 屬於 B 如果 φ_j 出現爲 B 中常指標 $\mathfrak{X}$ 的模組成分量. 在這種方式下, $\mathfrak{G}$ 的每個模既約指標就"屬於"一個而且只一個塊 $B_1, B_2, \cdots, B_t$.

我們也必須說 $\mathfrak{G}$ 的某些部分羣的模指標屬於一個塊 b. 這是照下面的方式做出來的: 設 $\mathfrak{P}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的 p^a 階的西樂 (sylow) 部分羣. 取 $\mathfrak{P}$ 的一個完全元素組

4. 參考 [6].

5. 參考 [6], 定理 1.

$$P_0 = 1, P_1, P_2, \cdots, P_s \tag{12}$$

使得沒有兩個元素在 $\mathfrak{G}$ 中是共軛的，可是 $\mathfrak{G}$ 的每個 $p^{\lambda}(\lambda = 1, 1, 2, \cdots)$ 階的元素都與 (12) 中的一個元素共軛．令

$$\mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}(P_i). \tag{13}$$

如果我們取 $\mathfrak{H} = \{P_i\}$，那麼 $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_i$ 就適合條件 (7)． 於是 $\mathfrak{N}_i$ 的每個塊 B 都決定 $\mathfrak{G}$ 的一個塊，(§ 2.3)．如果 B 是 $\mathfrak{G}$ 的一個已知塊，並且如果 $\mathfrak{N}_i$ 裏決定 B 的塊 $\tilde{B}$ 存在，我們就說 $\mathfrak{N}_i$ 的這些塊 $\tilde{B}$ 裏所有的模既約指標 $\varphi^{(i)}$ 屬於 B[6] 如果 $\mathfrak{N}_i$ 沒有決定 B 的塊，那麼就沒有 $\mathfrak{N}_i$ 的指標屬於 B． 我們在這兒取 i 爲所有可能的值 $i = 0, 1, 2, \cdots, s$． 如果 $i = 0$，那麼 $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}(1) = \mathfrak{G}$ 並且這些 $\varphi^{(0)}$ 就是（如上所定義的）$\mathfrak{G}$ 的屬於已知塊 B 的模指標．

現在塊 B 是由 l 個常指標 $\mathfrak{Z}_i$ 與各個 $\mathfrak{N}_i$ 的同樣數目 l 個模指標 $\varphi_\varrho^{(i)}$ 所組成，$0 \leqq i \leqq s$.

5. **分解數** (decomposition number)

設 i 爲 $0, 1, 2, \cdots, s$ 中之一數．我們說 $\mathfrak{G}$ 的共軛級 $\mathfrak{K}_\alpha$ 屬於 P_i 的 Σ_i 節 (section)，如果 $\mathfrak{K}_\alpha$ 包有 $P_i V$ 形狀的元素，這兒 V 是 $\mathfrak{N}_i$ 的一個 p-正規元素．於是每個共軛元素級屬於一個而且只一個節．特別，Σ_0 由 $\mathfrak{G}$ 的 p-正規元素等級所組成．

如果 B 是 $\mathfrak{G}$ 的一個塊，並且如果 $\mathfrak{K}$ 屬於 Σ_ν，$P_i V \varepsilon \mathfrak{K}_a$，($V \varepsilon \mathfrak{N}_i$，$V$ p-正規)，那麼對於 B 中每個 $\mathfrak{Z}_u$ 我們有公式[7]

$$\mathfrak{Z}_\mu(P_i V) = \sum_\varrho d^i_{\mu\varrho}\varphi_\varrho^{(i)}(V). \tag{14}$$

這兒，右方的 $\varphi_\varrho^{(i)}$ 跑過 所有屬於 B 的 $\mathfrak{N}_i$ 的模指標． $d^i_{\mu\varrho}$ 這些數叫做“分解數”．牠們是與 V 無關的代數整數 如果 P_i 是 p^{a_i} 階的那麼 $d^i_{\mu\varrho}$ 就在 p^{a_i} 次單位根的域裏．特別．$d^0_{\mu\varrho}$ 是通常的整數 對於一個給定的 $i > 0$，可能有沒有 $\varphi^i_{(\varrho)}$ 屬於 B 的情形發生． 這種情形，(14) 可以解釋成方程 $\mathfrak{Z}_u(P_i V) = 0$.

6. 參考 [7].
7. 參考 [2].

$d^i_{\mu\varrho}$ 這些數適合下面的直交關係 (orthogonality relations)[8]

(15) $$\sum_\mu d^i_{\mu\varrho}\bar{d}^j_{\mu\sigma}=0. \quad 對於 \quad i \neq j$$

(16) $$\sum_\mu d^i_{\mu\varrho}\bar{d}^i_{\mu\sigma}=c^i_{\varrho\sigma},$$

這兒 μ 跑過所有屬於給定的塊 B 的 $\mathfrak{J}_\mu$ 的所有值. $c^i_{\varrho\sigma}$ 是 $\mathfrak{N}_i$ 屬於 $\varphi^{(i)}_\varrho, \varphi^{(i)}_\sigma$ 的嘉當不變量 (Cartan invairants). 特別, 如果 $\varphi^{(i)}_\varrho, \varphi^{(i)}_\sigma$ 屬於 $\mathfrak{N}_i$ 的不同的塊, 則

(16*) $$\sum_\mu d^i_{\mu\varrho}d^i_{\mu\sigma}=0$$

(μ 的限制和上面一樣).

如果 B 有虧數羣 ϑ, 並且如果 P_i 在 $\mathfrak{G}$ 中不與 ϑ 的元素共軛, 那麼沒有具給定的 i 的 $\varphi^{(i)}_\varrho$ 屬於 B, 並且因此我們有 $\mathfrak{J}_\mu(P_iV)=0$, 對於 B 的 $\mathfrak{J}_\mu$.[9] $\mathfrak{N}_i$ 有決定 B 而且與 B 有相同虧數 d 的塊 B 存在, 當且僅當 P_i 在 $\mathfrak{G}$ 中與 ϑ 裏的一個不變元素 (invariant element) 共軛. 如果這個條件適合, 我們可以選 $\vec{B}$ 使之決定 B 且與 B 有相同的虧數 d, 並且對於 B 中每個 $\mathfrak{J}_\mu$, 都有 $\vec{B}$ 裏 (因之 B 裏) 一個 $\varphi^{(i)}_\varrho$ 屬於它且 $d^i_{\mu\varrho}\neq 0$.[10]

6. **虧數 0 與 1 的塊的主要結果.**

如果 B 的虧數是 0, 那麼它的虧數羣一定是 $\{1\}$. 這個塊僅由一個常指標 $\mathfrak{J}_\mu$ 和一個模指標 $\varphi^{(1)}_\varrho$ 所組成. 所出現的僅有的分解數 $d^0_{\mu\varrho}$ 的值是 1. 一個常指標 $\mathfrak{J}_\mu$ 屬於一個虧數 0 的塊, 當且僅當 p^a/z_μ. 我們還可以說 $\mathfrak{J}_\mu$ 屬於一個虧數 0 的塊, 如果對於 $\mathfrak{G}$ 裏所有的 p-奇異元素 (p-singular element) $\mathfrak{J}_\mu$ 都等於 0.[11]

現在考慮一個虧數 1 的塊 B. 那麼虧數羣 ϑ 是一個 p 階的羣. 對於所有節 Σ_i 而 $P_i \notin \vartheta$, B 的指標都等於零. 在另一方面, 如果 $P_i \varepsilon \vartheta$, $i>0$, 那麼就有 $\mathfrak{N}_i$ 的塊 $\hat{B}$ 存在, $\hat{B}$ 決定 B. 從 (9) 就可以得到 $\hat{B}$ 的虧數必須是 1. 我們可以相當完全地來討論虧數 1 的塊.

---

8. 參考 [2].
9. 參考 [7] 定理 3.
10. 參考 [7] 定理 4.
11. 參考 [1].

所有指標 $\mathfrak{Z}_\mu$ 其次數 $z_\mu \equiv 0 \pmod{p^{a-1}}$，而 $z_\mu \not\equiv 0 \pmod{p^a}$ 都屬於虧數 1 的塊[12]

三、 $a=2$ 情形的一般情況

1. 群 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ 和 $\mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$.

我們現在限制我們的討論到 $a=2$ 的情形，即我們假定

$$g=p^2g', \quad (p,g')=1. \tag{5}^*$$

那麼這兒的西樂羣 $\mathfrak{p}$ 是阿培爾羣；$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$. 我們有下面兩種情形.

第一種情形　$\mathfrak{p}=\{U,V\}$　是 (p,p) 型的

第二種情形　$\mathfrak{p}=\{U\}$　是 p^2 階的巡迴羣.

在現在這篇文章裏我們把我們的注意力主要放到第一種情形上.

定理 1. 羣 $\mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$ 是 $\mathfrak{p}$ 與一個階 ω 與 p 互素的羣 $\mathfrak{W}$ 的直乘積 $\mathfrak{p}\times\mathfrak{W}$.

證明. $\mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$ 的西樂部分羣 $\mathfrak{p}$ 中任意兩個相異的元素在 $\mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$ 裏都不共軛. 因此根據 Burside 的一個定理我們就知道 $\mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$ 有一個指數 p^2 的正常部分羣. 因為 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$ 的正常部分羣且其階是 p^2, 所以 $\mathfrak{Q}(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}\times\mathfrak{W}$.

現在我們來研究羣 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$. 首先我們假定第一種情形. 如果 $N \in \mathfrak{N}(\mathfrak{p})$, 我們有公式

$$N^{-1}UN=U^\alpha V^\beta$$

$$N^{-1}VN=U^\gamma V^\delta.$$

這兒 $\alpha,\beta\,\gamma,\delta$ 這些指數 $(\mathrm{mod}\ p)$ 唯一決定. 映射

$$N\to N^*=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \tag{17}$$

表示從 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ 到羣 $LH(2,p)$ 的一個準同構, $LH(2,p)$ 是在一 p 個元素的伽羅華域 $GF(p)$ 上所有二次的非奇異矩陣組成的羣. 顯明 (17) 的核就是 $\mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$. 於是

12. 參考 [3].

(18) $$\mathfrak{N}(\mathfrak{p})/\mathfrak{L}(\mathfrak{p}) \cong \mathfrak{N}^* \subseteqq LH(2,p).$$

因爲 $c(\mathfrak{p}) \equiv 0 \pmod{p^2}$, $\mathfrak{N}^*$ 的階與 p 互素. 從這兒就得出 $(\mathfrak{N}(\mathfrak{p}):\ \mathfrak{L}(\mathfrak{p})) = n^*$ 整除 $(p-1)^2(p+1)$,

(19) $$n^* \mid (p-1)^2(p+1).$$

我們有下面 n 種情形.

情形 A: $\mathfrak{N}^*$ 在 $GF(p)$ 裏是可約的.

因爲 $\mathfrak{N}^*$ 的階 n^* 根據 (19) 是與 p 互素的, 因之 $\mathfrak{N}^*$ 是完全可約的. 如果我們用 $\mathfrak{p}$ 的另外一組基來替代 U, V, 我們可以假定所以的 N^* 都是下面形式的

$$N^* = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

顯然 $\mathfrak{N}^*$ 是兩個 $p-1$ 階巡廻群的直乘積的一個部分群. 特别 $\mathfrak{N}^*$ 是阿培爾群.

情形 B. $\mathfrak{N}^*$ 在 $GF(p)$ 中是旣約的, 可是在 $GF(p)$ 的擴張域中可約.

於是, 在一個擴張域中有一個相似的群 $\mathfrak{N}^{**}$ 存在使得每個 $N^{**} \varepsilon \mathfrak{N}^{**}$ 都是下面的形式

(20) $$N^{**} = \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

因爲我們仍會有完全可約的緣故. 因爲這兒的 ϱ, σ 都是某一個係數在 $GF(p)$ 裏的矩陣 $N^* \sim N^{**}$ 的特徵根, ϱ, σ 都在 $GF(p^2)$ 這個唯一的二次擴張域中. 如果 $\varrho \notin GF(p)$, σ 一定對於 $GF(p)$ 說是與 p 共軛的, 即

(21) $$\sigma = \varrho^{\varrho}.$$

如果 ϱ 在 $GF(p)$ 中, σ 也在其中. 現在 (20) 指明 $\mathfrak{N}^{**}$ 和 $\mathfrak{N}^*$ 都是阿培爾群. 如果在現在這種情形我們有 $\varrho \neq \sigma$, 根據 Schur 預備定理就可以知道 $\mathfrak{N}^*$ 在 $GF(p)$ 裏是可約的, 這是情形 A. 因此, 如果 $\varrho \varepsilon GF(p)$, 我們一定有 $\varrho = \sigma$. 那麼 (21) 式仍然成立. 於是 (20) 是下面形式的

$$N^* = \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & \varrho^{\varrho} \end{pmatrix}.$$

因此，$N^* \to \varrho$ 這個映射是個同構．從這兒就可以得到 $\mathfrak{N}^*$ 是和 $GF(p^2)$ 的乘法群的一個部分群同構的．這證明了 $\mathfrak{N}^*$ 是巡廻群並且牠的階整除 p^2-1．

情形 C：$\mathfrak{N}^*$ 是絕對旣約的．

因為 $\mathfrak{N}^*$ 的階與 p 互素（參考(19)），並且因為 $\mathfrak{N}^*$ 在特徵 p 的伽羅華域中有一個二次的絕對旣約表示，所以 $\mathfrak{N}^*$ 必須有一個二次的一對一的絕對旣約表示，並且對於一個適當的素理想數取模就會得到一個二次的模表示．

現在所有二次的常旣約線性群都是知道的．如果 $\mathfrak{Z}$ 是 $\mathfrak{N}^*$ 的心，它是由屬於 $\mathfrak{N}^*$ 的矩陣

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

所組成的，那麼 $\mathfrak{N}^*/\mathfrak{Z}$ 和下面型式的群中一個同構[13]

$$(22)\qquad \begin{array}{lll} (a) & \mathfrak{N}^*/\mathfrak{Z} & \text{二面體群} \\ (b) & \mathfrak{N}^*/\mathfrak{Z} & \text{階 12 的四面體群} \\ (c) & \mathfrak{N}^*/\mathfrak{Z} & \text{階 24 的八面體群} \\ (d) & \mathfrak{N}^*/\mathfrak{Z} & \text{階 60 的二十面體群.} \end{array}$$

第二種情形．如果 $\mathfrak{P}=\{U\}$ 是階 p^2 的巡廻群，那麼，對於每個 $N\varepsilon\mathfrak{N}(\mathfrak{P})$，我們有公式

$$(23)\qquad N^{-1}UN=N^{\alpha}$$

這兒 α 是 $(\bmod p^2)$ 唯一決定．我們有 $\alpha\equiv 1 \pmod{p^2}$ 當且僅當 $N\varepsilon\mathfrak{L}(\mathfrak{P})$．於是 $N\to\alpha$ 定義 $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})/\mathfrak{L}(\mathfrak{P})$ 到摸 p^2 且與 p 互素的餘級 α 的乘法群的一個同構．因為 $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})/\mathfrak{L}(\mathfrak{P})$ 的階仍與 p 互素．很容易就得到 $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})/\mathfrak{L}(\mathfrak{P})$ 是階整除 $p-1$ 的巡廻群．特別，如果 $p=2$，$\mathfrak{N}(\mathfrak{P})=\mathfrak{L}(\mathfrak{P})$．

因此我們證明了

定理 2. 群 $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})/\mathfrak{L}(\mathfrak{P})$ 的階整除 $(p-1)^2(p+1)$．牠是下面型式的群中的一個．

13. 參考 H. F. Blichfeldts "Finite Collineation Groups", University of Chicago Press, Chicago.

第一種情形：　(*A*)　兩個階 $p-1$ 的巡廻群的直乘積的一個部分群.

(*B*)　階整除 $(p+1)(p-1)$ 的一個巡廻群.

(*C*)　一個模心後是二面體,四面體,八面體或二十面體群的群.

第二種情形：　階整除 $p-1$ 的一個巡廻群.

2. **節**

定理 3. 如果 $\mathfrak{p}$ 中兩個元素 A 和 B 在 $\mathfrak{G}$ 中是共軛的,那麼他們在 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ 中也是共軛的.

證明. 如果 $G^{-1}AG=B$, 那麼 $\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{N}(B)$, $G^{-1}\mathfrak{p}G \subseteqq \mathfrak{N}(B)$.因此 $\mathfrak{p}$ 和 $G^{-1}\mathfrak{p}G$ 都是 $\mathfrak{N}(B)$ 的西樂群, 並且因此他們在 $\mathfrak{N}(B)$ 裏是共軛的. 因之我們可以把 G 用一個適當的元素 $N=GN_1$ 來替代, 而 $N_1 \varepsilon \mathfrak{N}(B)$, 使得 $N^{-1}\mathfrak{p}N=\mathfrak{p}$. 因此 $N \varepsilon \mathfrak{N}(\mathfrak{p})$. 在另外一方面, $N^{-1}AN=N_1^{-1}BN_1=B$. 所以 A 和 B 在 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ 中共軛.

定理 3 告訴我們在 (12) 中選擇 P_i 來決定節只依賴 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ 而不依賴 $\mathfrak{G}$. 因此在第一種情形我們知道 (17) 中的矩陣 N^* 就够了, 在第二情形我們知道 (23) 裏的指數 α 就够了.

我們說兩個節 Σ_i 和 Σ_j 屬於同一族 (family) f, 如果元素 P_j 與 P_i 的某個冪 P_i^ϱ 共軛, 而 ϱ 是與 p 互素約. 如果適當選擇 (12) 中的元素, 我們可以假定 P_j 本身就是 P_i 的一個冪; 我們從此後就作這個假定. 每個節屬於一個而且只一個族. 在第二種情形, 我們恰有兩個族, U 的族和 U^p 的族.

3. **群** $\mathfrak{N}(P_i)$.

如果 $i=0$, $\mathfrak{N}(P)=\mathfrak{N}(1)=\mathfrak{G}$. 我們現在假定 $i>0$.

定理 4. 第一種情形：如果 $i>0$, 那麼 $\mathfrak{N}(P_i)$ 是 $\{P_i\}$ 與 $\mathfrak{N}(P_i)$ 的一個指數 p 的部分群 $\mathfrak{B}_i$ 的直章積 $\{P_i\} \times \mathfrak{B}_i$.

第二種情形：如果 P_i 的階是 p^2, 那麼 $\mathfrak{N}(P_i)=\mathfrak{p} \times \mathfrak{W}$, 這兒 $\mathfrak{W}$ 與定理 1 中的有相同意義.

證明. 第二種情形的命題是顯然的, 因為 $\{P_i\}=\mathfrak{p}$, $\mathfrak{N}(P_i)=\mathfrak{L}(\mathfrak{p})$. 那麼假定我們有第一種情形. 如果 $\mathfrak{Z}(N)$ 是 $\mathfrak{N}(P_i)$ 的一個常既約表示, 那麼 $\mathfrak{Z}(P_i)$ 是一

個數量矩陣 cI，而 c 是一個 p 次單位根．把 $\mathfrak{N}(P_i)$ 的階記作 p^2v_i 並且考慮由所有 $\mathfrak{N}(P_i)$ 中元素 N 具性質

$$\det(\mathfrak{Z}(N))^{v_i}=1$$

所組成的集合 $\mathfrak{B}_i$．顯然 $\mathfrak{B}_i$ 是 $\mathfrak{N}(P_i)$ 的正常部分群．因為元素 N 的階整除 pv_i，$\mathfrak{Z}(N)^{v_i}$ 的行列式的值是一個 p 次單位根．因此 $\mathfrak{B}_i$ 在 $\mathfrak{N}(P_i)$ 中的指數是 p 或 1．如果我們能够證明對於一個適當選擇的 $\mathfrak{Z}$ 元素 P_i 不屬於 $\mathfrak{B}_i$，我們一定有 $(\mathfrak{N}(P_i):\mathfrak{B}_i)=p$，因此定理就證明了．假定對於 $\mathfrak{N}(P_i)$ 的每個既約表示 $\mathfrak{Z}$，我們都有

$$\det(\mathfrak{Z}(P_i)^{v_i}=1.$$

如果 $\mathfrak{Z}$ 的次數是 z 並且 $\mathfrak{Z}(P_i)=cI$，那麼 $c^z=1$，因為 c 是 p 次單位根．因此或者 $c=1$ 或者 $z\equiv 0 \pmod p$．在第一種情形，$\mathfrak{Z}$ 可以解釋成 $\mathfrak{N}(P_i)/\{P_i\}$ 的一個表示．反之，每個 $\mathfrak{N}(P_i)/\{P_i\}$ 的表示都產生 $\mathfrak{N}(P_i)$ 的一個表示 $\mathfrak{Z}$ 且 $\mathfrak{Z}(P_i)=1$．從這兒就得出，$\mathfrak{N}(P_i)$ 和 $\mathfrak{N}(P_i)/\{P_i\}$ 會有次數與 p 互素的"同樣"的表示．因為既約表示的次數的平方和等於群階，我們找到

$$n(P_i)\equiv\frac{n(P_i)}{p}\qquad\pmod{p^2}$$

這是不可能的，因為左方被 p^2 整除，而右方卻不．因此，定理 4 證明了．

4. $\mathfrak{N}(P_i)$ 的塊

我們仍然來討論第一種情形．根據定理 4

$$\mathfrak{N}(P_i)=\{P_i\}\times\mathfrak{B}_i.$$

因此 $\mathfrak{N}(P_i)$ 的每一個既約指標都可以由 $\{P_i\}$ 的一個指標 λ 與 $\mathfrak{B}_i$ 的一個指標 ψ 的乘積得到．因為 $\{P_i\}$ 的階是 p，把 λ 看成一個摸指標，它就變成了 1-指標，因此 $\mathfrak{N}(P_i)$ 的屬於同一 ψ 的 p-指標，如看成摸指標，都變成相等的了．因此它們屬於 $\mathfrak{N}(P_i)$ 的同一塊．如果 ψ_1 是 $\mathfrak{B}_i$ 的另外一個既約指標並且如果 ψ 和 ψ_1

屬於 $\mathfrak{B}_i$ 同一塊那麼我們就可以找到 $\mathfrak{B}_i$ 的一個有限指標串，從 ψ 開始，到 ψ_1 終止使得任意兩個相鄰的都有一個共同的摸組成分 (modular consitituent). 這就證明了 ψ 和 ψ_1 仍屬於一塊，如果把他們看成 $\mathfrak{N}(P_i)$ 的指標的話. 於是，在 $\mathfrak{N}(P_i)$ 的塊與 $\mathfrak{B}_i \cong \mathfrak{N}(P_i)/\{P_i\}$ 的塊之間有一個一對應存在. 兩個相應的塊包有同樣的摸指標. 然而，$\mathfrak{N}(P_i)$ 的塊所包的常指標的數目是 $\mathfrak{B}_i$ 的塊所包的數目的 p 倍. 很容易可以看到 $\mathfrak{N}(P_i)$ 的嘉當矩陣可以從 $\mathfrak{B}_i$ 的嘉當矩陣乘以 p 得到.

類似的討論也可以應用到第二種情形而 P_i 的階是 p^2 的時候. 這時我們有一個階與 p 互素的群 $\mathfrak{W}$ 來代替 $\mathfrak{B}$.

定理 5. 第一種情形. 如果 $i > 0$, 摸指標 $\varphi_\varrho^{(i)}$ 可以看作是 $\mathfrak{B}_i$ 的摸指標；對於 $\mathfrak{N}(P_i)$ 和對於 $\mathfrak{B}_i$ 分成塊是相同的. (16) 裏的嘉當不變量 $c_{\varrho\sigma}^i$ 與 $\mathfrak{B}_i$ 的相當的嘉當不變量 $\hat{c}_{\varrho\sigma}$ 是用下面的方程聯結起來的.

$$c_{\varrho\sigma}^i = p\,\hat{c}_{\varrho\sigma}^i. \tag{24}$$

第二種情形. 如果 P_i 的階是 p^2. 那麼 $\mathfrak{N}(P_i)$ 的每一塊都由 $\mathfrak{W}$ 的一個摸指標所組成的，因為 $\mathfrak{W}$ 的階與 p 互素，這個摸指標還可以看成一個常指標. 相當的嘉當不變量的值是 p^2.

我們回到第一種情形. 因為 $\mathfrak{B}_i$ 的階 pv 被 p 整除而不被 p^2 整除，所以階 g^*p, 而 $(g^*, p) = 1$, 的群的一般理論[14] 可以應用到 $\mathfrak{B}_i$ 來. $\mathfrak{B}_i$ 的塊 $\hat{B}$ 的虧數或為 0 或為 1. 因為 $\mathfrak{N}(P_i)$ 的相當的塊 $\vec{B}$ 的次數是相同的，而它的階是乘以 p 的，所以 $\hat{B}$ 的虧數 $\hat{d}$ 與 $\vec{B}$ 的虧數 $\vec{d}$ 是用下面的方程聯結起來的.

$$\vec{d} = \hat{d} + 1 = \begin{cases} 1 \\ 2. \end{cases} \tag{25}$$

$\mathfrak{B}_i$ 的一個虧數 0 的塊是由一個摸指標 $\varphi^{(i)}$ 組成的. 相當的嘉當不變量的值是 1. 從 (24) 就可以得到 $\mathfrak{N}_i$ 的相當的嘉當不變量的值是 p^2.

我們現在來討論 $\mathfrak{B}_i$ 的虧數 1 的塊. 因為 $\mathfrak{B}$ 在 $\mathfrak{N}$ 裏的指數是 p 並且因

14. 參考 [5].

為 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{N}_i$ 的階 p^2 的部分群，所以 $\mathfrak{V}_i \cap \mathfrak{p}$ 是 p 階的．設 Q_i 是 $\mathfrak{V}_i \cap \mathfrak{p}$ 的生成元素，

$$\mathfrak{V}_i \cap \mathfrak{p} = \{Q_i\} \tag{26}$$

則 Q_i 是 p 階的．顯然定理 1 中的群 $\mathfrak{W}$ 屬於 $\mathfrak{V}_i$ 並且 Q_i 在 $\mathfrak{V}_i$ 裏的中心化子是 $\{Q_i\} \times \mathfrak{W}$. 令 γ 是一個模 p 的本原根．定最小的正整數 $t^{(i)}$ 使 $\mathfrak{N}(P_i)$ 中有一個元素 $M^{(i)}$ 存在 使得

$$M^{(i)-1}\, Q_i\, M^{(i)} = Q_i^{\gamma^{t^{(i)}}}. \tag{27}$$

於是 $t^{(i)}$ 這個數是 $p-1$ 的一個因子．不需要加限制我們可以假定 $M^{(i)}$ 的階與 p 互素．因為，除了 (27) 之外，我們有

$$M^{(i)-1}\, P_i\, M^{(i)} = P_i, \tag{28}$$

所以 $M^{(i)} \varepsilon\, \mathfrak{N}(\mathfrak{p})$. $\{Q_i\}$ 在 $\mathfrak{V}_i$ 裏的正常化子是 $\{Q_i, \mathfrak{W}, M^{(i)}\}$; 它的階是 $p\,w\,(p-1)/t^{(i)}$.

需要注意元素 $Q_i, M^{(i)}$ 和 $t^{(i)}$ 這個數是由群 $\mathfrak{N}^*$, (17), (18) 所決定的．的確，如果我們知道了 (17) 裏的矩陣 N^* 並且我們把 P_i 用 $\mathfrak{p}$ 的生成元素 U, V 所表出，那麽我們可以決定對於那些元素 $R\,\varepsilon\,\mathfrak{p}, R\neq 1$ 和對於那些指數 λ, 在 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ 中有一個元素 M 存在使得

$$M^{-1}\, P_i\, M = P_i, \quad M^{-1}\, R\, M = R^{\lambda} \tag{29}$$

於是 $M \varepsilon\, \mathfrak{N}(P_i) = \{P_i\} \times \mathfrak{V}_i$ 並且我們看到我們可以假定 $M \varepsilon\, \mathfrak{V}_i$ 而不需要加以主要限制．在另一方面，P_i 和 Q_i 是 $\mathfrak{p}$ 的生成元素可以從 $\mathfrak{N}(P_i) = \{P_i\} \times \mathfrak{V}_i$ 和 (26) 看出來．如果我們令 $R = P_i^{\varrho} Q_i^{\sigma}$, 從 (29) 就得到

$$P_i^{\varrho}\,(M^{-1}\, Q_i\, M)^{\sigma} = P_i^{\varrho\lambda}\, Q_i^{\sigma\lambda}.$$

因此 $P_i^{\varrho\lambda-\varrho} = (M^{-1}\, Q_i\, M)^{\sigma}\, Q_i^{-\sigma\lambda}\, \varepsilon\, \mathfrak{V}_i$. 從這就推出來 $\varrho\lambda - \varrho \equiv 0 \pmod p$. 因此 $\rho \equiv 0 \pmod p$ 或者 $\lambda \equiv 1 \pmod p$. 於是，如果 (29) 裏的 M 和 R 可以選擇得使

$\lambda \not\equiv 1 \pmod p$，我們就有 $\varrho \equiv 0 \pmod p$，$R = Q_i^{\varrho}$，$\{R\} = \{Q_i\}$ 並且我們可以選 $R = Q_i$. 我們的方法也給出 $t^{(i)}$ 的值. 因爲 $\gamma t^{(i)}$ 一定是 (29) 裏 λ 的一個能取的值. 其次我們來考慮對於 $\mathfrak{P}$ 裏任意選擇的 $R \neq 1$ 和任意選擇的 M(29) 裏的指數 λ 只能取 1 (mod p) 這個值的情形. 特別這時在 (27) 裏 $t^{(i)} = p-1$；元素 $Q_i, Q_i^2, \cdots, Q_i^{p-1}$ 就都會在 $\mathfrak{B}_i$ 的不同的共軛之等級裏. 根據 Burside 定理, 從這就可以推出 $\mathfrak{B}_i$ 有一個指數 p 的正常部分羣 $\mathfrak{B}_i^*$；$\mathfrak{B}_i = \{Q_i\}\mathfrak{B}_i^*$. 如果 Q_i' 是 $\mathfrak{P}$ 裏不屬於 $\{P_i\}$ 的任意元素, 那麼 $\mathfrak{N}(P_i) = \{P_i\} \times \{Q_i'\}\mathfrak{B}_i^*$ 並且我們可以把原來的 $Q_i, \mathfrak{B}_i$ 用 Q_i', $\{Q_i'\}\mathfrak{B}_i^*$ 來代替. 於是, 在這個情形 $\mathfrak{P}$ 裏的元素 Q_i 是相當任意的除了他不能屬於 $\{P_i\}$ 之外.

回到 (27), 我們可以說 $M^{(i)}$ 一定把 Q_i 在 $\mathfrak{B}_i$ 裏的中心化子變換 (transform) 到它自己. 這就推出來

$$M^{(i)-1}\mathfrak{W}M^{(i)} = \mathfrak{W}.$$

從這兒就得出 $\mathfrak{W}$ 的常既約指標 $\theta_1, \theta_2, \cdots$ 分成在 $\{M^{(i)}, \mathfrak{W}\}$ 裏相聯繫的指標類 (class). 指標 θ 的指標類 $\{\theta\}$ 由下列 $\mathfrak{W}$ 的指標所組成

$$\theta(W), \theta(M^{(i)}WM^{(i)-1}), \cdots \theta(M^{(i)\tau-1}WM^{(i)-(\tau-1)}), \quad (W \varepsilon \mathfrak{W}), \tag{30}$$

這兒 τ 是使

$$\theta(M^{(i)\tau}WM^{(i)-\tau}) = \theta(W) \tag{31}$$

的第一個正指數. 因爲從 (27) 可以推出 $M^{(i)\frac{p-1}{t^{(i)}}}$ 屬於 $\mathfrak{W}$, 我們得到

$$t^{(i)}\tau \mid p-1. \tag{32}$$

τ 的值依賴於 $\{\theta\}$ 類, 即依賴於 $\hat{B}$ 塊.

對應於 $\mathfrak{B}_i$ 的 $\hat{B}$ 塊, 我們有一棵樹 (tree), T, 它有 $(p-1)/t^{(i)}\tau$ 個支和 $1+(p-1)/t^{(i)}\tau$ 個頂點. 這些頂點裏的一個記爲 "例外" 頂點. 對於這個頂點, 對應着一個屬於 $\hat{B}$ 的 $\mathfrak{B}_i$ 的 $t^{(i)}\tau$ 個 p-共軛常指標類, 而對於其餘的頂點對應着恰巧 $\mathfrak{B}_i$ 在 $\hat{B}$ 裏的一個常指標. 這 $t^{(i)}\tau + (p-1)/t^{(i)}\tau$ 個指標是 $\hat{B}$ 的所有的常指

標. 在 $\hat{B}$ 裏有 $\mathfrak{N}_i$ 的 $(p-1)/t^{(i)}\tau$ 個模指標出現；它們對應着樹 T 的支. 我們用與指標相同的文字來表支. 相應的嘉當不變量 $\hat{c}^i_{\varrho\sigma}$, 當 $\varrho\neq\sigma$ 時,的值是

$$\hat{c}^i_{\varrho\sigma}=\begin{cases}0 \text{ 當 } \varphi^{(i)}_{\varrho} \text{ 和 } \varphi^{(i)}_{(\sigma)} \text{ 這兩個支不相連}\\ 1 \text{ 當 它們遇於一個非例外頂點}\\ t^{(i)}\tau \text{ 當 它們遇於例外頂點.}\end{cases}\tag{33}$$

當 $\varrho=\sigma$ 時,我們有

$$\hat{c}^i_{\varrho\varrho}=\begin{cases}2, \text{如果 } \varphi^{(i)}_{\varrho} \text{ 不包含例外頂點.}\\ t^{(i)}\tau+1, \text{如果 } \varphi^{(i)}_{\varrho} \text{ 包含例外頂點.}\end{cases}\tag{34}$$

在 $t^i\tau=1$ 的情形,例外頂點與其餘頂點的區別就不見了.

(16) 裏的 $c^i_{\varrho\sigma}$ 這些量可以利用 (24) 從 $\hat{c}^i_{\varrho\sigma}$ 得到.

5. **由 $\mathfrak{N}(P_i)=\mathfrak{N}_i$ 的塊所決定的 $\mathfrak{G}$ 的塊.**

設 $\vec{B}$ 是 $\mathfrak{N}_i$ 的一個固定的塊. 我們要來研究 $\vec{B}$ 所決定的 $\mathfrak{G}$ 的塊 B. 我們先來討論 $\{P_i\}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的正常部分群的特殊情形.

預備定理： 如果 p 階的 $\{P_i\}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的正常部分群, $\vec{B}$ 是 $\mathfrak{N}_i=\mathfrak{N}(P_i)$ 的一個塊,並且 $\tilde{\mathfrak{J}}$ 是 $\mathfrak{N}(P_i)$ 的屬於 $\vec{B}$ 的一個正常指標,那麼由 $\vec{B}$ 所決定的 $\mathfrak{G}$ 的塊會包有 $\mathfrak{G}$ 的每個既約指標 $\mathfrak{J}(G)$, 它們對於 $\mathfrak{N}_i$ 而言包有 $\tilde{\mathfrak{J}}$ 為一個組成分.

證明：因為 $\mathfrak{N}_i$ 現在是 $\mathfrak{G}$ 的正常部分群, $\mathfrak{J}$ 對於 $\mathfrak{N}_i$ 而言會分成 $\tilde{\mathfrak{J}}$ 和在 $\mathfrak{G}$ 裏與 $\tilde{\mathfrak{J}}$ 相連的 $\mathfrak{N}_i$ 的指標；$\mathfrak{N}_i$ 的這些指標中的每一個出現的次數都是相同的. 我們可以令

$$\mathfrak{J}(M)=u\sum_{X\varepsilon\mathfrak{G}}\tilde{\mathfrak{J}}(XMX^{-1})\qquad (M\varepsilon\mathfrak{N}_i)\tag{35}$$

這兒 u 是個正有理數. 從這就推出

$$D_g\mathfrak{J}=u\,D_g\tilde{\mathfrak{J}}.$$

對於相當的 ω 這個數,參考 (4), 我們有

$$\omega(M)=g\,\mathfrak{J}(M)/n(M)\,D\,g\,\mathfrak{J}=\Big(g\,u\sum_{X}\tilde{\mathfrak{J}}(XMX^{-1})\Big)/n(M)\,u\,g\,D\,g\,\tilde{\mathfrak{J}}$$

$$= \sum_X \tilde{\mathfrak{Z}}(XMX^{-1})/Dg\tilde{\mathfrak{Z}}\, n(M).$$

如果讓 $\tilde{\omega}$ 表示屬於 $\mathfrak{N}_i$ 的指標 $\tilde{\mathfrak{Z}}$ 的 ω-數, 讓 $\tilde{n}(T)$ 表示 $\mathfrak{N}_i$ 中一個元素 T 在 $\mathfrak{N}_i$ 中正常化子的階, 那麼上式就可以寫成

$$\omega(M) = \Big(\sum_X \frac{\tilde{n}(XMX^{-1})}{n(P_i)}\tilde{\omega}(XMX^{-1})\Big)/n(M).$$

如果 M 屬於 $\mathfrak{G}$ 的共軛元素級 $\mathfrak{K}_j$, 那麼 XMX^{-1} 就會跑過 $\mathfrak{K}_j$ 的每一個元素, 而且每個都跑到 $n(M)$ 次. 於是

$$\omega(\mathfrak{K}_j) = \omega(M) = \sum_{Y \in \mathfrak{K}_j} \frac{\tilde{n}(Y)}{n(P_i)}\tilde{\omega}(Y). \tag{36}$$

$\mathfrak{G}$ 的共軛元素級 $\mathfrak{K}_j$ 分成 $\mathfrak{N}_i$ 的一些共軛元素級 $\tilde{\mathfrak{K}}_\varrho$. 如果 $Y_0 \in \tilde{\mathfrak{K}}_\varrho$, 那麼恰有 $\dfrac{n(P_i)}{\tilde{n}(Y_0)}$ 個元素 Y 在 $\tilde{\mathfrak{K}}_\varrho$ 裏出現並且從 (36) 就得到

$$\omega(\mathfrak{K}_j) \equiv \sum_{\tilde{\mathfrak{K}}_\varrho \subseteq \mathfrak{K}_j} \tilde{\omega}(\tilde{\mathfrak{K}}_\varrho) \pmod{\mathfrak{z}} \tag{37}$$

(我們甚至可以說相等). (37) 這個式子對於 $\mathfrak{G}$ 的不含 $\mathfrak{N}_i$ 中元素的共軛元素級 $\mathfrak{K}_j$ 也成立. 這時, (37) 的兩邊都等於 0 (mod $\mathfrak{z}$). 把 (37) 與 (8) 相比較我們就看出 $\tilde{\mathfrak{Z}}$ 的塊 $\tilde{B}$ 會決定 $\mathfrak{Z}$ 的塊 B. 因此預備定理證明了.

爲了要研究一般情形, 我們令 $\bar{\mathfrak{G}}_i = \mathfrak{N}(\{P_i\})$. 那麼 $\mathfrak{N}_i$ 的塊 $\tilde{B}$ 就決定 $\bar{\mathfrak{G}}_i$ 的一個塊 $\bar{B}$, 並且 $\bar{B}$ 可以用預備定理找到. 在另一方面, $\bar{\mathfrak{G}}_i$ 的塊 $\bar{B}$ 決定 $\mathfrak{G}$ 的一個塊 B. 用 §2.5 的記號, 我們取 $\mathfrak{H} = \{P_i\}$, $\mathfrak{N} = \bar{\mathfrak{G}}_i$; 條件 (7) 是適合的. 觀察公式 (8) 我們就證明了 $\tilde{B}$ 會決定與 $\bar{B}$ 所決定的同一個 $\mathfrak{G}$ 的塊 B.

我們用這個步驟去證明

定理 6. $\mathfrak{N}_i$ 的每個塊 $\tilde{B}$ 決定 $\mathfrak{G}$ 的一個虧數相同的塊 B.

證明. 如果 $i > 0$, $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{G}$ 時, 這是顯然的. 假定 $i > 0$. 從 (9) (以 $\mathfrak{H} = \{P_i\}$) 我們有

$$1 \leqq \hat{d} \leqq d,$$

這兒 d 是 B 的虧數，$\hat{d}$ 是 $\hat{B}$ 的虧數．我們要證明 $\hat{d}=1$，$d=2$ 的情形是不可能的．假定我們有 $\hat{d}=1$．那麼 $\mathfrak{N}_i$ 的屬於 $\hat{B}$ 的指標 $\hat{\mathfrak{Z}}$ 的次數都會被 p 整除而不被 p^2 整除．因此從預備定理就得到 $\bar{\mathfrak{G}}_i=\mathfrak{N}(\{P_i\})$ 的屬於 $\bar{B}$ 的指標 $\mathfrak{Z}$ 的次數都會被 p 整除．把 (9) 應用到這個情形來就證明了 $\bar{B}$ 的虧數一定是 1，因為它不能是 2．根據 (10)（以 $\mathfrak{H}=\{P_i\}$），$\hat{B}$ 的虧數群是 $\{P_i\}$．再把 (11) 應用到 $\mathfrak{G}_i$ 就證明了我們可以以 $\{P_i\}$ 為 $\bar{B}$ 的虧數群．

讓 ω^* 表 $\wedge_{K^*}(\mathfrak{G})$ 的屬於 B 的指標，讓 $\bar{\omega}^*$ 表 $\wedge_{K^*}(\mathfrak{G}_i)$ 的屬於 $\bar{B}$ 的指標，讓 $\bar{\mathfrak{K}}_\varrho$ 表 $\bar{\mathfrak{G}}_i$ 的共軛元素級．因為 $\bar{B}$ 的虧數是 1，所以有一個 $\bar{\mathfrak{G}}_i$ 的 p-正規元素 v 存在[15] 使得 $\bar{\omega}^*(v) \neq 0$ 並且 v 在 $\bar{\mathfrak{G}}_i$ 裏的正常化的階被 p 整除而不被 p^2 整除.[16] 因此 P_i 在 $\bar{\mathfrak{G}}_i$ 裏的共軛元素級一定包有一個與 P_i 相交換的元素．暫時假定 v 在 $\mathfrak{G}$ 的正常化子 $\mathfrak{N}(v)$ 的階被 p^2 整除．那麼 $\mathfrak{N}(v)$ 會包有一個 p^2 階的部分群 $\mathfrak{P}^*$ 並且我們可以假定 $P_i \varepsilon \mathfrak{P}^*$．因之 $\mathfrak{P}^*$ 會屬於 v 在 $\mathfrak{N}(P_i) \subseteqq \mathfrak{N}(\{P_i\})=\bar{\mathfrak{G}}_i$ 的正常化子；這是不可能的．因此 $n(v) \equiv 0 \pmod{p}$，$n(v) \not\equiv 0 \pmod{p^2}$．

讓 $\mathfrak{K}_j$ 表 $\mathfrak{G}$ 中包有 v 的共軛元素級，並且讓 $\bar{\mathfrak{K}}_\varrho$ 表示 $\bar{\mathfrak{G}}_i$ 中包有 v 的共軛元素級那麼[17]

$$\omega^*(\mathfrak{K}_j)=\bar{\omega}^*(\bar{\mathfrak{K}}_\varrho). \tag{38}$$

因為 $\bar{\omega}^*(k_\varrho)=\bar{\omega}^*(v) \neq 0$，$\omega^*(\mathfrak{K}_j)=\omega^*(v)$，我們有

$$\omega(v) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{z}}. \tag{39}$$

因為 $n(v) \not\equiv 0 \pmod{p^2}$，從 (39) 就可以推出[18] B 的虧數是 1．因此定理 6 就證明了

我們現在來考慮 $\mathfrak{N}_i$ 的一個虧數 2 的塊 $\hat{B}$．如在 §2.4 中指出，$\hat{B}$ 屬於 $\mathfrak{W}$ 的一個指標 θ 或者屬於這種指標的一類 (30)．

15. 參考 [5] 定理 3.
16. 參考 [5] 系 5, (6).
17. 參考 [5] 系 5, (7).
18. 參考 [5] 定理 3.

$\mathfrak{G}$ 的虧數 2 的塊以 $\mathfrak{p}$ 爲虧數群. 如在 §2.3 中所說 他們和 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ 的虧數 2 的塊間有個一一對應的關係. $\mathfrak{L}(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}\times\mathfrak{W}$ 的每個既約指標都是 $\lambda\theta$ 形式. 這兒 λ 是 $\mathfrak{p}$ 的既約指標, 而 θ 是 $\mathfrak{W}$ 的既約指標. 每個 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ 的既約指標 ψ, 如只考慮其對正常部分群 $\mathfrak{L}(\mathfrak{p})$ 上的作用, 分成這種指標 $\lambda\theta$ 的和. 每一個出現的次數相同並且他們在 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ 裏都是相聯的. 特別, 出現在 ψ 的不同項 $\lambda\theta$ 裏 θ 這個因子會組成在 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ 裏相聯的 $\mathfrak{W}$ 的一個指標類 $\langle\theta\rangle$. 毫無困難地我們可以看到 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ 的兩個指標 $\psi_1\psi_1$ 屬於 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ 的同一塊當且僅當 ψ 和 ψ_1 的類 $\langle\theta\rangle$ 是相同的.

從這兒就得到 $\mathfrak{G}$ 的虧數 2 的那些塊 B 是一一地對應着在 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ 中相聯的 $\mathfrak{W}$ 的既約指標 θ 的類 $\langle\theta\rangle$. 如果 i 的值固定, $0\leqq i\leqq s$, 那麼每個這種類 $\langle\theta\rangle$ 分成一些部分類 (50). 我們在 §3, 4 裏已經看到對於每個這種部分類都有 $\mathfrak{N}_i$ 的一個塊 $\tilde{B}$ 屬於它. 於是用一個跟定理 6 的證明相似的論證就可以證明屬於 $\langle\theta\rangle$ 的這些部分類的 $\tilde{B}$ 恰是 $\mathfrak{N}_i$ 的決定 $\mathfrak{G}$ 的塊的那些塊. 我們可以把上面的結果歸納如下:

定理 7. $\mathfrak{G}$ 的每個虧數 2 的塊都屬於在 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ 裏相聯的 $\mathfrak{W}$ 的既約指標 θ 的類 $\langle\theta\rangle$. 如果 P_i 是 (12) 中的一個元素而 $i>0$, 並且如果 $M^{(i)}$ 是 (27) 的元素, 那麼類 $\langle\theta\rangle$ 就分成一些 $\mathfrak{W}$ 的指標部分類, 它們是利用 $M^{(i)}$ 的重方相聯的. 每個這種部分類對應着 $\mathfrak{N}_i$ 的一個塊 $\tilde{B}$ 並且這樣得到的 $\tilde{B}$ 是所有 $\mathfrak{N}_i$ 的決定塊 B 的塊.

定理 8. 如果 B 是 $\mathfrak{G}$ 的虧數 1 的塊, 那麼 B 的虧數群可以取作 $\{P_i\}$, $i>0$, 這些群中的一個. 具有給定的虧數群 $\{P_i\}$ 的那些塊 B 是一一地對應着在 $\mathfrak{N}(\{P_i\})$ 中相聯的 $\mathfrak{S}_i$ 的虧數 0 的指標類.

特別, 定理 8 指出了. 如果 $\mathfrak{S}_i$ $(i>0)$ 的指標知道了的話, $\mathfrak{G}$ 的虧數 1 的塊的數目如何能够得到. 虧數 2 的塊的數目可以從定理 8 或者直接從一般理論[19]得到.

6. 論節族 (families of sections)

仍讓 P_i 表示 (12) 中的一個元素, $i>0$. 決定第一個正指數 s_i 使 $P_i^{s_i}$ 在 $\mathfrak{G}$ 裏與 P_i 共軛, 即

19. 參考 [1]

(40) $$R_i^{-1}P_iR_i=P_i^{\gamma^{s_i}}.$$

因爲 $R_i^{-1}\mathfrak{p}R_i$ 會是 $\mathfrak{N}_i$ 的一個西樂羣並且因此在 $\mathfrak{N}_i=\mathfrak{N}(P_i)$ 裏與 $\mathfrak{p}$ 共軛, 所以我們不加任何限制地假定 $R_i^{-1}\mathfrak{p}R_i=\mathfrak{p}$, 即 $R_i\varepsilon\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$. 顯然, 如果我們知道了 $\mathfrak{N}^*$, (17), (18) 的話 s_i 和 R_i 就可以決定了.

元素

(41) $$P_i, P_i^{\gamma}, \cdots, P_i^{\gamma^{s_i-1}}.$$

會屬於 $\mathfrak{G}$ 中不同的共軛元素級. 根據在 §3.2 裏 (12) 中元素所選擇的方法我們知道 (41) 中元素會在 (12) 中元素 P_j 裏出現. 與他們相當的節就稱爲一個節族.

如果 $P_j=P_i^{\gamma^\lambda}$, $0\leqq\lambda\leqq s_i-1$, 是 (41) 裏的一個元素, 我們就有 $\{P_\lambda\}=\{P_i\}$ 並且因此 $\mathfrak{V}_i=\mathfrak{V}_j$. 這就推出來 $\varphi_\varrho^{(j)}$ 和 $\varphi_\varrho^{(i)}$ 是相等的;

(42) $$c_{\varrho\mu}^{(j)}=c_{\varrho\mu}^{(i)}\qquad (P_j=P_i^{\gamma^\lambda}).$$

讓 σ 表示有理數域上的 g 次單位根的域的伽羅華羣中的一個元素, 且並設 σ 把 g' 次單位根不變而把每個 p 次單位根都映到它的 r 次羃. 那麼, 對於 $P_j=P_i^{\gamma^\lambda}$, $v\varepsilon\mathfrak{V}_i$, 就有

(43) $$(\mathfrak{Z}_u(P_iV))^{\sigma^\lambda}=\mathfrak{Z}_u(P_i^{\gamma^\lambda}V)=\mathfrak{Z}_u(P_jV).$$

現在從 (14) 就得到

(45) $$(d_{\mu\varrho}^{(i)})^{\sigma^\lambda}=d_{\mu\varrho}^{(j)}\qquad (P_j=P_i^{\gamma^\lambda}, 0\leqq\lambda<s_i).$$

於是, 節 Σ_j 的 "d-行" (d-columns). 是節 Σ_i 的 d 行的代數共扼數.

我們在選 $\lambda=s_i$. 那麼

$$(\mathfrak{Z}_u(P_iV))^{\sigma^{s_i}}=\mathfrak{Z}_u(P_i^{\gamma^{s_i}}V)=\mathfrak{Z}_u(R_i^{-1}P_iR_iV)$$

(45) $$\mathfrak{Z}_u(P_iV)^{\sigma^{s_i}}=\mathfrak{Z}_u(P_iR_iVR_i^{-1})\qquad (V\varepsilon\mathfrak{N}_i)$$

映射 $v\rightarrow R_iVR_i^{-1}$ 是 $\mathfrak{V}_i$ 的一個自同構 τ. 如果 $\psi(v)$ 是 $\mathfrak{V}_i$ 的一個指標, 那麼把 $\psi(V^\tau)=\psi(R_iVR_i^{-1})$ 看作是 V 的函數, 它就是 $\mathfrak{V}_i$ 的一個指標 $\psi^*(V)$.

(46) $$\psi^*(V) = \psi(R_i V R_i^{-1}).$$

這個定義也可以應用到 $\mathfrak{V}_i$ 的模指標表. 現在從 (45) 和 (14) 就得到, 對於 p-正規的 $V \varepsilon \mathfrak{V}_i$,

$$\Big(\sum_{\varrho} d_{\mu\varrho}^{(i)} \varphi_{\varrho}^{(i)}(v)\Big)^{\sigma^{si}} = \sum_{\varrho} d_{\mu\varrho}^{(i)} \varphi_{\varrho}^{(i)}(R_i V R_i^{-1}) = \sum_{\varrho} d_{\mu\varrho}^{(i)} \varphi_{\varrho}^{(i)*}(v).$$

於是, 如果我們令

(47) $$\varphi_{\varrho}^{(i)*} = \varphi_{\varrho^*}^{(i)},$$

我們就有

(48) $$(d_{\mu\varrho}^{(i)})^{\sigma^s i} = d_{\mu\varrho^*}^{(i)}.$$

如果我們用 τ 表示 $\psi \to \psi^*$ 這個從 $\mathfrak{V}_i$ 的指標集到它自己的映射, 那麼顯然屬於同一塊 $\hat{B}$ 的 (常或模) 指標都會映射到再屬於同一塊的指標. 我們用 $\hat{B}^\iota$ 來表示這個塊. 如果 $\hat{B}$ 的虧數是 1, 並且如果 T 是屬於 $\hat{B}$ 的樹 (見 §3, 4), 那麼這個映射就引出從 T 到屬於 $\hat{B}^\tau$ 的樹 T^τ 的一個 "自同構" (即, 頂點映到頂點, 枝映到枝, 並且使接觸 (incidence) 關係不變). 我們仍用 τ 來表示 T 的這個映射. 如果我們再把 τ 用到 $\hat{B}^\tau$ 上, 如此下去, 我們就會得到一些 (設為 m 個) 不同的塊

(49) $$\hat{B}, \hat{B}^\tau, \cdots, \hat{B}^{\iota^{m-1}},$$

和他們相當的樹

(49a) $$T, T^\tau, \cdots, T^{\iota^{m-1}}.$$

那麼, 對於

(50) $$\omega = \iota^m$$

我們有

(51) $$\hat{B}^\omega = \hat{B}, \quad T^\omega = T.$$

於是 ω 是 T 的一個自同構.

我們現在來研究 T 的這個自同構 ω.

情形 1：　ω 不變動 T 的某個頂點.

如果這個不變動的頂點屬於 $\mathfrak{B}_i$ 的指標 $\mathfrak{J}_\nu^{(i)}$, 那麼 ω 把 $\mathfrak{J}_\nu^{(i)}$ 或者映到它自己或者映到 $\mathfrak{B}_i$ 的一個 p-共軛指標. 如果我們在一個適當的分裂域 (splitting field) 裏討論, 那麼 $\mathfrak{J}_\nu^{(i)}$ 的模組成分, 除了一個巡廻置換之外, 連帶他們的次序會完全決定.[20] 兩個 p-共軛指標的模組成分是相同的並且他們模組成分的次序是一致的(除了一個巡廻置換之外). 於是就得到 ω 會產生一個樹 T 的從 $\mathfrak{J}_\nu^{(i)}$ 開始的枝的巡廻置換. 因之, 如果我們適當地把 T 畫出來, ω 可以說成是 T 的一個"轉動" (rotation). 讓 h 表示這個轉動階, 即

$$\omega^j \neq 1 \quad 對於 \quad 0 < j < h, \qquad (52)$$
$$\omega^h = 1.$$

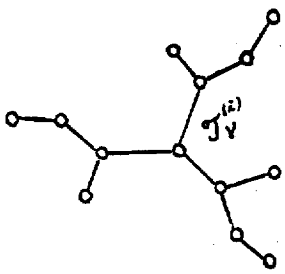

圖 1.

如果 $h=1$, ω 自己就是主元素, 每個頂點都不變.

如果, 用 (32) 的記法, $t_i\tau > 1$, 那麼 T 的例外頂點一定在 ω 之下不變動. (如果 $t_i\tau = 1$, 例外頂點與非例外頂點的區別就消失了), 我們就有一個繞 $\mathfrak{J}_\nu^{(i)}$ 的轉動. 這個轉動的階 h 會整除 T 的從 $\mathfrak{J}_\nu^{(i)}$ 開始的枝.

情形 2：　T 沒有頂點保持不變.

先讓我們假定沒有枝保持不變. 決定一個枝 b 使得 b 和它的映影 b^ω 可以用最小數目的支 $b_1, b_2, \cdots, b_q$ 連 (connected) 起來. 設 Y 是 b 的那個 b_1 在這兒開始的頂點, 並且設 X 是另一個頂點, $b = XY$. 那麼 X^ω 和 Y^ω 就是 b^ω 的點頂. 如果 X^ω 在 b_q 上, 那麼 ω 會把 T 的從 b 用 Y 分開的那一部分 T' 映到 T 的從 b^ω 用 Y^ω 分開的那一部分, 這是 T 的一個眞 (proper) 部分集合. 因為我們的樹是一個有限樹, 所以這是不可能的.

因此, b_q 和 b^ω 以 Y^ω 為公共點. 如果 $q \geqq 1$, b_1 和 b_1^ω 頂多可以用 $q-1$ 個枝連起來, 因為 b_1^ω 以 Y^ω 為終點. 這是不可能的.

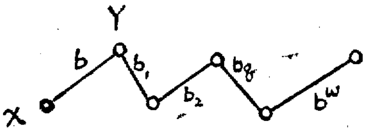

圖 2.

20. 參考 [3] § 11.

如果 $\varsigma = 0$, 頂點 Y 就會保持不變, 這還是不可能的.

因此 ω 會使一枝 $b = XY$ 不變. 那麼這一定會有 $X^{\omega} = Y, Y^{\omega} = X$.

於是, 我們可以把 T 畫得使 ω 可以由一個反射 (reflection) 得到. 在這個情形, T 的枝的數目一定是奇數. 因此在這個第二種情形用 §3.4 的記法我們一定會有 $t_i \tau = 1$, 因爲否則 B 的例外點會不被 ω 所變動那麼 T 就會有 $p-1$ 個支, 對於奇數 p 這個情形是不可能的. 對於 $p = 2$, T 是僅由一個支所組成的.

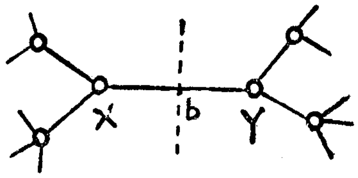

圖 3.

定理 9. 設 P_i 是 $\mathfrak{P}$ 中元素, $P_i \neq 1$ 而且 $P_i, P_i^{\gamma}, \cdots, P_i^{\gamma^{s_i-1}}$ 屬於不同的共軛元素級, $P_i^{\gamma^{s_i}}$ 與 P_i 在 $\mathfrak{G}$ 中是共軛的, 那麼我們可以令 $P_i^{\gamma^{s_i}} = R_i^{-1} P_i R_i$, 而 R_i 可以在 $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})$ 中選出來

設 σ 是 g 次單位根的域的伽羅華羣中的元素, 並且設 σ 不變 g' 次單位根而把每個 p 次單位根都變到它的 γ 次方 (γ 是本原單位根 $(\bmod p)$). 讓 $\vartheta = (d_{\mu\varrho}^{i})$ 表示 P_i 的節 Σ_i 的一個 d-行, (i, ϱ 固定, $\mu = 1, 2, \cdots$; 參考 (14)). 那麼 ϑ 的代數共軛數

$$\vartheta, \vartheta^{\sigma}, \cdots$$

都還是 d-行. 他們中的頭 s_i 個屬於 $P_i, P_i^{\gamma}, \cdots, P_i^{\gamma^{s_i-1}}$ 的節並且他們都屬於 $\mathfrak{B}_i$ 的同一個指標 $\varphi_{\varrho}^{(i)}$. 行 $\vartheta^{\sigma^{s_i}}$ 仍屬於節 Σ_i, $\vartheta^{\sigma^{s_i+1}}$ 屬於節 P_i^{γ}, 等等.

定理 10. 假定 $\mathfrak{B}_i$ 的塊 $\hat{B}$ 的虧數是 1. 如果 $(\vartheta_{\varrho}^{i})^{\sigma^{s_i}}$ 屬於 $\mathfrak{B}_i$ 的指標 $\varphi_{\varrho*}^{(i)}$, 那麼映射 $\varphi_{\varrho}^{(i)} \to \varphi_{\varrho*}^{(i)}$ 可以解釋成屬於 $\mathfrak{B}_i$ 的樹[21] 的集合到它自己的一個同構. 如果這個同構的 m 次方把 $\varphi_{\varrho}^{(i)}$ 映到同一棵樹的一枝, 那麼這個同構的 m 次方就會產生 $\varphi_{\varrho}^{(i)}$ 所在的那棵樹的一個轉動. 如果 h 是這個轉動的階, 那麼 $\vartheta_{\varrho}^{(i)}$ 恰有 $s_i m h$ 個不同的共軛行. (s_i, m, h 與 i 和 $\hat{B}$ 有關).

21. 我們表示樹的枝的文字與表示相當的 $\mathfrak{B}_i$ 的模指標的一樣.

7. d-行的無理部分 (irrational parts)

我們再來考慮 $\mathfrak{B}_i$ 的一個塊 $\hat{B}$ 的一個指標 $\varphi_\varrho^{(i)}$ $(i>0)$，和與它相應的 d-行 $(d_{\mu\varrho}^i)$ $(\mu=1,2,\cdots;i,\varrho$ 固定)．讓 B 表示由 $\hat{B}$ 所決定的 $\mathfrak{G}$ 的塊．從 (14) 就有

$$d_{\mu\varrho}^i=0 \qquad \text{對於} \quad \mathfrak{J}_\mu \notin B. \tag{51}$$

我們再來假定 B 的虧數是 2；我們在下面的討論裏仍然用定理 9 和定理 10 裏的記法．

考慮一個對應於 $\varphi_\varrho^{(i)}$ 的指標的 d-行 ϑ $(i>0)$　我們說這個 d-行 ϑ 是非例外的，如果樹 T 上他所相應的枝不包含例外頂點或者如果 $t^{(i)}\tau=1$ (在這個情形，例外頂點與非例外頂點的差別就消失了)．對於非例外 d-行，從 (24) 和 (34) 就可以得出 $c_{\varrho\varrho}^i=2p$ 並且從 (16) 就得到

$$\sum_{\mathfrak{J}_\mu\varepsilon B} d_{\mu\varrho}^i\bar{d}_{\mu\varrho}^i=2p. \qquad (\vartheta=(d_{\mu\varrho}^i)\ \text{是非例外的}.\ i>0). \tag{53}$$

如果 ϑ 的一個代數共軛行 $\vartheta^{\sigma^\lambda}\neq\vartheta$ 屬於同一棵樹 T 的一枝，那麼 T 的這個相當的枝就可以從 $\varphi_\varrho^{(i)}$ 這一枝用轉動 ω 的一個乘方 ω^ν 得到．因為這個轉動的心是例外頂點，顯然 $\varphi_\varrho^{(i)}$ 和 $(\varphi_\varrho^{(i)})^{\omega\nu}$ 不會有共同頂點．現在從 (24) 和 (33) 就可以得到

$$\sum_{\mathfrak{J}_\mu\varepsilon B} d_{\mu\varrho}^i(\bar{d}_{\mu\varrho}^i)^{\sigma^\lambda}=0 \qquad (\text{對於}\ \vartheta^{\sigma^\lambda}\neq\vartheta). \tag{54}$$

如果 $\vartheta^{\sigma^\lambda}$ 屬於另外一棵樹或者如果 $\vartheta^{\sigma^\lambda}$ 屬於一節 $\Sigma_j\neq\Sigma_i$，方程 (54) 仍然成立，這可以參考 (15), (16)．

如果用 $\bar{\vartheta}$ 表示矩陣 ϑ 的轉置 (transpose)，那麼我們可以把 (53), (54) 寫成下面的樣子

$$\left.\begin{array}{lll} (53^*) & \vartheta'\bar{\vartheta}=2p & \\ (54^*) & \vartheta'\bar{\vartheta}^{\sigma^\lambda}=0 & \text{對於}\ \vartheta\neq\vartheta^{\sigma^\lambda} \end{array}\right\}\ \vartheta\ \text{是一個非例外的}\ d\text{-行}.$$

從這兒就推出來

$$(\vartheta-\vartheta^{\sigma^\lambda})'(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}^{\sigma^\lambda})=4p \qquad \text{對於}\ \vartheta\neq\vartheta^{\sigma^\lambda}. \tag{55}$$

現在來考慮一個不是完全由有理數所組成的 d-行 ϑ. 用定理 11 的記法, 這就是說我們假定, 對於 $\mathfrak{N}_i$ 的給定的塊 B 我們有 $s_i m h > 1$. 如果 $s_i > 1$, 這確實是這樣的. 特別, (40) 指出, 如果 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ 不包含 $p-1$ 階的元素, 這個假設也是適合的.

設 α 是 ϑ 的一個無理係數. 如果 α 對於有理數域的次數是 r, 那麼 α 的 r 個共軛數就是

$$\alpha, \alpha^{\sigma}, \cdots, \alpha^{\sigma^{r-1}}, \tag{56}$$

並且我們有 $\alpha^{\sigma^r} = \alpha$. 於是 α 會屬於 p 次單位根的域的一個唯一的對於有理數域的次數是 r 的部分域 Ω_r. (56) 裏的 r 個元素, 和 α 一樣, 都在 ϑ 的係數裏出現; 他們出現在 $\mathfrak{G}$ 的一族 p-共軛指標的指標相當的列裏. 這個族裏指標的數目必須是 r 的一個倍數 qr. 如果 $q > 1$, (56) 裏的係數會出現 q 次. 我們說 (56) 裏的 r 項是這一行的一個無理部分.

讓 ε 表示 p 次本原單位根. 我們引進 r 個長爲 $(p-1)/r$ 的 "高斯週期" (Gauss periods)

$$\eta = \eta_0 = \sum_{\tau=0}^{\frac{p-1}{r}-1} \varepsilon^{r^{\tau r}}$$

$$\eta^{\sigma^\lambda} = \eta_\lambda = \sum_{\tau=0}^{\frac{p-1}{r}-1} \varepsilon^{r^{\lambda+\tau r}} \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots, r-1). \tag{57}$$

大家都知道, η_λ 這 r 個數組成 Ω_r 的一組整基 (integral basis). 如果用 $tr(\ )$ 來表示 Ω_r 裏元素的跡 (trace), 那麼用簡單的計算就可以得到

$$tr(\eta_\lambda \bar{\eta}_\lambda) = p - \frac{p-1}{r}; \quad tr(\eta_\lambda \bar{\eta}_\nu) = -\frac{p-1}{r} \quad \text{對於 } \lambda \neq \nu.$$

於是, 如果 $\xi = \sum_{\lambda=0}^{r-1} x_\lambda \eta_\lambda$, 而 x_λ 是有理數, 我們就有

$$tr(\xi\bar{\xi})=\sum_{\lambda,v} x_\lambda x_v\, tr(\eta_\lambda\bar{\eta}_v)=p\sum_{\lambda=0}^{r-1} x_\lambda^2-\frac{p-1}{r}\sum_{\lambda,v} x_\lambda x_v$$

這兒 λ 和 v 都跑過 $0,1,\cdots,r-1$. 我們可以把這個式子寫成下面兩種形式

$$tr(\xi\bar{\xi})=p\sum_{\lambda=0}^{r-1} x_\lambda^2-\frac{p-1}{r}\Big(\sum_{\lambda=0}^{p-1} x_\lambda\Big)^2 \tag{58}$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{r-1} x_\lambda^2+\frac{p-1}{r}\sum_{\lambda=0}(x_\lambda-x_v)^2.$$

令

$$\alpha=\sum_v c_v\eta_v. \tag{59}$$

而 c_v 現在是有理整數. 那麼這些 c_v 不會全相等, 因爲否則 $\alpha=c\sum_v \eta_v=-c$ 會是有理數. 於是

$$\alpha-\alpha^{\sigma^\lambda}=\sum_v c_v(\eta_v-\eta_{v+\lambda})=\sum_v \eta_a(c_v-c_{v-\lambda}),$$

這兒這些 η 和 c 的標數都取 $\bmod r$. (55) 裏相當無理部分 (56) 的那些項在 (55) 的和裏就給出 $tr(\alpha-\alpha^{\sigma^\lambda})$ 這個元素. 如果我們應用 (58) 式而 $x_v=c_v-c_{v-\lambda}$, 我們就有 $\sum_v x_v=0$ 並且得到它們所給出的是 $p\sum_v x_v^2$. 因爲並不是所有的 x_v 都等於 0 並且它們的和等於 0, 所以它們所給出的至少是 $2p$.

在 ϑ 的係數都還是有理數的每一列裏, $\vartheta-\vartheta^{\sigma^\lambda}$ 的係數都等於 0. 於是, (55) 是不同的無理部分所給出的元素的和. 所以我們有

定理 11. 一個非例外的 d-行 至多會有兩個無理部分. 上面的討論也證明了如果我們有兩個無理部分, 那麼, 每一個所給出的必須是 $2p$, 並且, 用上面的記法, 一個 x_v 一定是 $+1$, 一個 x_v 一定是 -1 而所有其餘的都是 0.

如果我們只有一個無理部分, 我們就有 $p\sum_v x_v^2=4p$, $\sum_v x_v=0$, 因此這證明了兩個 x_v 是 $+1$, 兩個 x_v 是 -1 而有其餘的都是 0,

前面已經指出來過, 如果沒有無理部分出現, ϑ 行就是有理的並且 $s.mh=1$.

我們先來討論有兩個無理部分的情形. 因為(對於 $\lambda=1$)一個 c_v-c_{v-1} 的值是 1, 一個的值是 -1 而所有其餘的都是 $0\ (v=0,1,\cdots,r-1)$, 所以除了一個之外所有 c_v 的值都相等, 設為 a, 並且那個例外的係數是 $a+1$. 如果我們用 α 的一個共軛元素來代替 α, 我們就可以假定例外係數是 c_0 並且我們還可以得到

$$\alpha=\pm\,\eta-a, \tag{60}$$

這兒 a 是個有理整數. 類似地, 第二個無理部分的一個適當的係數的樣子是

$$\beta=\pm\,\eta^*-b,$$

這兒 η^* 仍一個高斯週期, 設其長為 r^*, 並且這兒 b 是個有理整數. 現在假定 $r^*\neq r$. 那麼 $\vartheta-\vartheta^{\sigma^{r^*}}$ 除了對應於第一個無理部分的那些列之外到處都是 0. 從 (55) 就得到

$$tr\,(\alpha\,\bar{\alpha}^{\sigma^{r^*}})=4p.$$

然而, (60) 和 (58) 指出這個跡的值是 $2p$, 因此我們得到是個矛盾. 所以 $r^*=r$; 那麼

$$\beta=\pm\,\eta-b. \tag{61}$$

從這兒就得出來, 或者這兩個無理部分屬於 $\mathfrak{G}$ 的兩個不同的 p-共軛指標族. 而每一族都由 r 個指標組成, 或者這兩個無理部分屬於同一個 p-共軛指標族. 那麼它由 $2r$ 個指標組成. 在後面這一種情形, 我們一定有 $\alpha=\beta$.

現在假定只有一個無理部分出現. 上面的討論指出(對於固定的 $\lambda=0,1,\cdots,r-1$) 差 $c_v-c_{v-\lambda}\ (v=0,1,\cdots,r-1)$ 中的兩個的值是 1, 兩個的值 -1, 其餘的值是 0. 從這就推出來, c_v 的值是 a 或 $a+1$ 二者之一. 如果我們用 α 的一個共軛元素來代替 α, 我們就可以假定我們有

$$C_0=C_1=\cdots=C_{A_1-1}=a,$$

$$C_{A_1}=C_{A_1+1}=\cdots=C_{A_1+B_1-1}=a+1,$$

$$C_{A_1+B_1} = C_{A_1+B_1+1} = \cdots = C_{A_1+B_1+A_2-1} = a,$$

$$C_{A_1+B_1+A_2} = C_{A_1+B_1+A_2+1} = \cdots = C_{A_1+B_1+A_2+B_2-1} = a+1,$$

這兒 $A_1 > 0, B_1 > 0, A_2 > 0, B_2 > 0$ 而 $A_1+B_1+A_2+B_2 = r$. 如果我們令 $A = A_1 + A_2$, 那麼 $B_1 + B_2 = r - A$, 再利用 (58) 去求 $tr(\alpha\bar{\alpha})$ 我們就得到

$$tr(\alpha\bar{\alpha}) = A a^2 + (r-A)(a+1)^2 + A(r-A)\frac{p-1}{r}.$$

因爲 $0 < tr(\alpha\bar{\alpha}) \leqq \vartheta' \bar{\vartheta} = 2p$, 所以

$$A a^2 + (r-A)(a+1)^2 + A(r-A)\frac{p-1}{r} \leqq 2p. \tag{62}$$

如果 A 和 $r-A$ 都 $\geqq 4$, 那麼左方最後一項至少是 $4(r-4)\frac{p-1}{2} = 4p - 4 - \frac{16(p-1)}{r}$ 而頭兩次至少給出 4 來. 於是, $2p \leqq \frac{16(p-1)}{r}$ 並且因此 $r < 8$. 那麼 r 和 $r-A$ 不能都 $\geqq 4$, 所以這個情形是不可能的.

如果 $A = 2$, 我們就取 $\lambda = A_1 + B_1$. 因爲 $c_\nu - c_{\nu-\lambda} = 1$ 僅當 $c_\nu = a+1$ 和 $c_{\nu-\lambda} = a$, 所以頂多 $c_\nu - c_{\nu-\lambda}$ 這些差中有一個等於 1, 這是不可能的. 如果 $r - A = 2$, 取 $\lambda = 4 - A_1$, 同樣的論證也會給出矛盾來.

因此, A 或者 $r-A$ 的值一定是 3 並且我們一定有 $r \geqq 6$. 那麼 (62) 給出 $r \leqq 8$. 再進一步地討論可能的情形我們一定有 $r = 7$. 於是我們有.

定理 12. 如果 ϑ 是個包含兩個無理部分的非例外 d-行, 那麼每個無理部分都包有 $\pm\eta_i - a$ 形狀的一個係數, 而 a 是有理整數, η_i 是個長爲 $r = s_2 mh$ 的高斯週期, 或者每一個無理部分都出現於 ϑ 的 r 列裏, 這些列對應着 (S) 的一族 r 個 p-共軛指標. 或者這兩個無理部分所佔據的 $2r$ 行對應着 (S) 的一族 $2r$ 個 p 共軛指標. 如果 ϑ 只包有一個無理部分[22], 我們一定有 $s_2 mh = 7$.

22. 我們不知道這個情形是否眞正能發生.

8. 續上節

我們再來討論一個 d-行 ϑ. 在他裏面代數共軛行的數目 $r = s_i m h$ 是大於 1 的. $s_i m h$ 這個數只與 ϑ 所對應的 $\mathfrak{B}_i$ 的塊 $\hat{B}$ 有關. 特別, 如果 ϑ 是非例外的, 定理 12 就可以用上了. 我們現在研究所有對應於 $\hat{B}$ 的非例外 d-行. 如果 A 是他們中的另外一個並且如果對應於 A 的樹 T 的枝 $\varphi_\tau^{(i)}$ 與對應於 ϑ 的枝 $\varphi_\varrho^{(i)}$ 相連接, 那麼從 (16), (27), (33) 就得到

$$\vartheta' \bar{A} = p. \tag{63}$$

因為 A 的代數共軛 $A^{\sigma^\nu} \neq A$ 不能屬於與 ϑ 相連接的一枝, 所以

$$\vartheta' \bar{A}^{\sigma^\nu} = 0 \qquad \text{對於 } A^{\sigma^\nu} \neq A. \tag{64}$$

從 (63) 和 (64) 就得到

$$(\vartheta - \vartheta^\sigma)' (\bar{A} - \bar{A}^\sigma) = 2p. \tag{65}$$

$\vartheta - \vartheta^\sigma$ 中的係數除了出現在包含無理部分的行中的以外都等於 0. 如果我們假定 ϑ 和 A 都包含兩個無理部分, 那麼 (65) 就指出至少有 A 的一個無理部分出現在一包含 ϑ 的一個無理部分的那些行裏. 假定 A 的兩個無理部分出現在包含 ϑ 的無理部分的 $2r$ 個行裏. 應用 (60) 和 (61) 我們就有下面的表

$$\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{ll} \quad\vartheta & \qquad A \end{array} \\
\text{第一個無理部分} & \left\{ \begin{array}{ll} \delta_1\,\eta_0 - a & \delta_3\,\eta_k - a_2 \\ \delta_1\,\eta_1 - a & \delta_3\,\eta_{k+1} - a_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \delta_1\,\eta_{n-1} - a & \delta_3\,\eta_{k-1} - a_2 \end{array} \right. \\
\text{第二個無理部分} & \left\{ \begin{array}{ll} \delta_2\,\eta_0 - b_1 & \delta_4\,\eta_v - b_2 \\ \delta_2\,\eta_1 - b_1 & \delta_4\,\eta_{v+1} - b_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \delta_1\,\eta_{2-1} - b_1 & \delta_4\,\eta_{v-1} - b_2 \end{array} \right.
\end{array}$$

這兒．$\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4=\pm 1$；$a_1,a_2,b_1,b_2$ 都是有理整數，而 k,v 是適合 $0\leqq k,v\leqq r-1$ 的標數．

因為 $tr(\eta_0)=tr(\eta_1)=\cdots=-1$，我們就有

$$\vartheta'\bar{A}^{\circ\lambda}=\delta_1\delta_3\,tr(\eta_0\bar{\eta}_{k+\lambda})+\delta_2\delta_4\,tr(\eta_0\bar{\eta}_{v+\lambda})+X, \tag{66}$$

而 X 是一個與 λ 無關的有理整數．在 X 裏我們把 $-\delta_1a_1tr(\eta_0),a_1a_2,\cdots$ 這種項和包含有理係數的行所給出的元素集合在一起．如果用 $\lambda+1$ 來代替 λ，根據 (58)，則 (66) 的右方的第一項就變成

$$\triangle_1(\lambda)=\begin{cases}\delta_1\delta_3p & \lambda\equiv-k-1 \pmod r\\ -\delta_1\delta_3p & \lambda\equiv-k \pmod r\\ 0 & \text{其餘情形.}\end{cases}$$

同樣，第二項變成了．

$$\triangle_2(\lambda)=\begin{cases}\delta_2\delta_4p & \lambda\equiv-v-1 \pmod r\\ -\delta_2\delta_4p & \lambda\equiv-v \pmod r\\ 0 & \text{其餘情形.}\end{cases}$$

根據 (63) 和 (64)，我們就有

$$\triangle_1(\lambda)+\triangle_2(\lambda)=\begin{cases}p & \lambda\equiv-1 \pmod r\\ -p & \lambda\equiv 0 \pmod r\\ 0 & \text{其餘情形.}\end{cases} \tag{67}$$

如果 $\lambda=0$，$\triangle_j(0)$ 中的一個一定不等於 0．因為我們可以交換兩個無理部分，所以我們可以假定 $\triangle_1(0)\neq0$，$\triangle_2(0)=0$．於是我們一定有 $k=0$ 或若 $k=r-1$ 並且 $v\neq0,r-1$．如果 $k=0$，那麼 $\triangle_1(-1)\neq0$ 並且因此 $\triangle_2(-1)=0$；即 $v\neq1$．那麼 $\triangle_2(-v)\neq0$，$\triangle_1(-v)=0$，因為 $-v\neq-k,-k-1$．這與 (67) 相抵觸．如果 $k=r-1$，那麼 $\triangle_1(1)\neq0$．因為 $v\neq0,r-1$，我們一定有 $r>2$．

根據 (67), $\triangle_2(1) \neq 0$. 因為 $v \neq r-1$, 所以 $v = r-2$. 於是 $\triangle_2(2) \neq 0$, $\triangle_1(2) = 0$. 根據 (67), 這就推出來 $r = 3$.

因此, 除了可能在 $r = 3$ 了的情形之外, 我們可以假定我們有下面的情況

$$
\begin{array}{lcc}
 & \vartheta & A \\
\text{公共無理部分} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. &
\begin{array}{c} \delta_1 \eta_0 - a_1 \\ \delta_1 \eta_1 - a_1 \\ \vdots \\ \delta_2 \eta_{r-1} - a_1 \end{array} &
\begin{array}{c} \delta_3 \eta_k - a_2 \\ \delta_3 \eta_{k+1} - a_2 \\ \vdots \\ \delta_3 \eta_{k-1} - a_2 \end{array} \\
\text{的第二個無理部分} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. &
\begin{array}{c} \delta_2 \eta_0 - b_1 \\ \delta_2 \eta_1 - b_1 \\ \vdots \\ \delta_2 \eta_{r-1} - b_1 \end{array} &
\begin{array}{c} c_2 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_2 \end{array} \\
\text{的第二個無理部分} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. &
\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_1 \end{array} &
\begin{array}{c} \delta_4 \eta_0 - b_2 \\ \delta_4 \eta_1 - b_2 \\ \vdots \\ \delta_4 \eta_{r-1} - b_2 \end{array}
\end{array}
$$

這兒 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 = \pm 1$, 並且 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 都是有理整數. 我們從 (65) 很容易推出 $k = 0$ 如果 $r > 2$. 對於 $r = 2$, 我們仍然可以假定 $k = 0$, 因為這時 $\eta_1 = -\eta_0 - 1$.

其次, 我們來研究 ϑ 和 A 都是包含兩個無理部分的兩個非例外行而 ϑ 和 A 屬於 T 的兩個不相連接的枝的情形. (63) 和 (64) 可以用下式代替

$$
(68) \qquad \vartheta' \bar{A}^{\circ\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots, r-1)
$$

這就推出來

$$(\vartheta - \vartheta^{\sigma})'(\bar{A}^{\sigma^{\lambda_1}} - \bar{A}^{\sigma^{\lambda_2}}) = 0. \tag{69}$$

從 (69) 很容易看到，如果 ϑ 和 A 包含一個無理部分，在同一列裏那麼第二個無理部分也是這樣的．如果適當地選擇 λ，我們就有下面的表

$$
\begin{array}{lll}
 & \vartheta - \vartheta^{\sigma} & A^{\sigma^{\lambda}} - A^{\sigma^{\lambda+1}} \\
\text{第一個無理部分} & \left\{\begin{array}{l} \delta_1(\eta_0-\eta_1) \\ \delta_1(\eta_1-\eta_2) \\ \vdots \\ \delta_1(\eta_{r-1}-\eta_0) \end{array}\right. & \begin{array}{l} \delta_3(\eta_0-\eta_1) \\ \delta_3(\eta_1-\eta_2) \\ \vdots \\ \delta_3(\eta_{r-1}-\eta_0) \end{array} \\
 & & \qquad\qquad (\delta_j = \pm 1) \\
\text{第二個無理部分} & \left\{\begin{array}{l} \delta_2(\eta_0-\eta_1) \\ \delta_2(\eta_1-\eta_2) \\ \vdots \\ \delta_2(\eta_{r-1}-\eta_0) \end{array}\right. & \begin{array}{l} \delta_4(\eta_k-\eta_{k+1}) \\ \delta_4(\eta_{k+1}-\eta_{k+1}) \\ \vdots \\ \delta_4(\eta_{k-1}-\eta_k) \end{array}
\end{array}
$$

那麼，從 (69) 我們一定有 $k=0$. 因爲沒有給出的那些列只包含係數 0，這就推出來

$$\vartheta - \vartheta^{\sigma} + A^{\sigma^{\lambda}} - A^{\sigma^{\lambda+1}} \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2).$$

下面的預備定理證明這是不可能的[23]

預備定理： 如果 $\mathfrak{q}$ 是 p 次單位根的域裏一個不除盡 p 的素理想數，那麼 $\mathfrak{G}$ 的 k 個 d-行都線性無關的 (mod $\mathfrak{q}$).

證明．以 $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_k$ 來表示 $\mathfrak{G}$ 的 k 個 d-行．假定我們有一個同餘關係

23. 如果無理部份出現，則 $p \neq 2$.

$$\Sigma x_l\,\vartheta_l \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$$

這兒 x_l 是 p 次單位根的域中不全與 0 同餘 $(\mathrm{mod}\ \mathfrak{q})$ 的代數整數. 如果我們用 ϑ'_j 乘其左方, 我們就得到行列式 $\det(\vartheta'_j\,\vartheta_l) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$. 根據 (15) 和 (16), 這個行列式是行列式 $\det(c^i_{\varrho\sigma})$,[24] $i = 0, 1, 2, \cdots$, 的乘積. 因此它是 p 的一個冪.[25] 這是個矛盾. 因此預備定理證明完畢.

其次我們來考慮三個非例外的 d-行 ϑ, A, $\mathfrak{Z}$ 而他們所相應的 T 的枝有一個公共頂點. 我們再假定這些行都含有兩個無理部分. 我們要證明他們三都包含一個無理部分在同一行上. 如果不是這樣的話, 我們可以假定我們有下面的情況

$$\begin{array}{cccc}
 & \vartheta & A & \mathfrak{Z} \\
\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{c} \delta_1\,\eta_0 - a_1 \\ \delta_1\,\eta_1 - a_1 \\ \vdots \\ \eta_1\,\eta_{r-1} - a_1 \end{array} & \begin{array}{c} \delta_3\,\eta_0 - a_2 \\ \delta_3\,\eta_1 - a_2 \\ \vdots \\ \delta_3\,\eta_{r-1} - a_2 \end{array} & \begin{array}{c} c_3 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_3 \end{array} \\
\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{c} \delta_2\,\eta_0 - b_1 \\ \delta_2\,\eta_1 - b_1 \\ \vdots \\ \delta_2\,\eta_{r-1} - b_1 \end{array} & \begin{array}{c} c_2 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_2 \end{array} & \begin{array}{c} \delta_5\,\eta_0 - a_3 \\ \delta_5\,\eta_1 - a_3 \\ \vdots \\ \delta_5\,\eta_{r-1} - a_3 \end{array} \\
\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{c} c_1 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_1 \end{array} & \begin{array}{c} \delta_4\,\eta_0 - b_2 \\ \delta_4\,\eta_1 - b_2 \\ \vdots \\ \delta_4\,\eta_{r-1} - b_2 \end{array} & \begin{array}{c} \delta_6\,\eta_0 - b_3 \\ \delta_6\,\eta_1 - b_3 \\ \vdots \\ \delta_6\,\eta_{r-1} - b_3 \end{array}
\end{array}$$

24. $c^i_{\varrho\sigma}$ 是 $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}\,(P_i)$ 的嘉當不變量.
25. 參考 [**8**].

($\delta_j=\pm 1$; a_j, b_j, c_j 都是有理整數). 那麼

$$\vartheta-\vartheta^{\sigma}+\Lambda-\Lambda^{\sigma}+\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}^{\sigma}\equiv 0 \qquad (\bmod 2)$$

可是預備定理指出這是不可能的.

我們把我們的結果總結如下:

定理 13. 考慮 $\mathfrak{B}_i$ 的一個虧數 1 的塊 $\hat{B}$, 假定對於它 $r=s_i hm$ 這個數是異於 1, 3 和 7 的. 屬於 $\hat{B}$ 的兩個非例外 d 行會屬於樹 T 的相連接的枝當且僅當它們在同一列包有無理部分.

如果這個非例外的 d-行 ϑ 與另一個非奇異的 d 行 Λ 有一個頂點公共, ϑ 的兩個無理部分屬於兩個不同的由 r 個 p 共軛指標所成的族(參考定理 12). 如果爲了簡單的緣故我們假定 ϑ 的兩個無理部分屬於同一族 p-共軛指標的情形不出現, 我們可以說.

定理 14. 在定理 13 的假設下, 對於 T 的非例外的枝在那兒終止的每個頂點 v 我們可以連繫 $\mathfrak{H}$ 的一族 r 個 p 共軛指標 F, 使得 $\hat{B}$ 的一個非例外 d-行包含的無理部分在屬於 F 的那些行裏, 當且僅當 T 的與 ϑ 相連繫的枝包含頂點 v.

我們對於 T 的僅包含例外枝的頂點和屬於例外枝的 d-行還不知道甚麼.

參　考　文　獻

1. Brauer, R., Nesbitt, C. J., On the moduler characters of groups, *Annals of mathematics*, **42** (1941), 556-590.

2. Brauer, R., On the connection between the ordinary and modular characters of group of finite order, *Annals of mathematics*, **42** (1941), 926-955.

3. Brauer, R., Investigations on group characters, *Annals of mathematics*, **42** (1941), 936-958.

4. Brauer, R., On groups whose order contains a prime number to the first power. I, *American Journal of mathematics*, **64** (1942), 401-420.

5. Brauer, R., On the arithmetics in a group ring, *Proceedings of the National Academy of Science, U. S. A.* **30**: 5 (1944), 109-114.

6. Brauer, R., On blocks of characters of groups of finite order, I, *Proceedings of the National Academy of Science, U. S. A.* **32** : 6 (1946), 182-186.

7. Brauer, R., On blocks of characters of groups of finite order, II, *Proceedings of the National Academy of Science, U. S. A.* **32** : 8 (1946), 215-219.

8. Brauer, R., On the Cartan invariants of groups of finite order, *Annals of mathematics*, 42 (1941), 53-61.

ON GROUP OF ORDER $g=p^2g'$

By Shih-Hua Tsao

ABSTRACT

If $\mathfrak{G}$ is a group of order $g=pg'$, (p a prime number, $(g', p)=1$), rather complete results can be obtained describing the behaviour of the characters with regard to the prime number p. In this paper, groups of order $g=p^2g'$, ($(p, g')=1$) are inverstigated. The situation here is far more complicated, since not only blocks of defects 0 and 1 but also blocks of defect 2 appear about which not much is known.

The group $\mathfrak{G}$ contains a group $\mathfrak{p}$ of order p^2. We have here two cares: $\mathfrak{p}$ may be abelian of type (p, p) or $\mathfrak{p}$ may be cyclic. We shall restrict our work to the first case. Actually the method apply to the second case too, and the situation there is much simpler than in the first case.

We shall consider the nomalizers and centralizers of $\mathfrak{p}$ and of the subgroups of order p of $\mathfrak{p}$. Those groups may be considered as of a less complicated nature than $\mathfrak{G}$, since we can describe them easily by means of groups whose orders contain the given prime p only to the first power. The aim of our inveratigation is to show that the behaviour of the characters of $\mathfrak{G}$ depends strongly on the structure of these subgroups. A number of connections between the characters of $\mathfrak{G}$ and the characters of the subgroups mentioned are obtained.

We begin with a discussion of the centralizer $\mathfrak{L}(\mathfrak{p})$ and the normalizer $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$. The group $\mathfrak{L}(\mathfrak{p})$ is the direct product $\mathfrak{p}\times\mathfrak{W}$ of $\mathfrak{p}$ and a group $\mathfrak{W}$ of an order prime to p. The faotor group is either abelian or a group of well known type. The blocks of defect 2 of $\mathfrak{G}$ are in one-to-one cor-

respondence to the classes of irreducible characters $\mathfrak{Q}$ of $\mathfrak{W}$ which are associated in $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$. Every block of defect 1 has a defect group $\mathfrak{p}_1$ of order p which is determined uniquely, if coujugate groups are considered as not essentially different. The centralizer $\mathfrak{L}(\mathfrak{p}_1)$ is again a direct product $\mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{V}$, and the blocks with the defect group $\mathfrak{p}_1$ are in one-to-one correspondence to the classes of characters of defect zero of $\mathfrak{V}$ associated in the normalizer $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_1)$ of $\mathfrak{p}_1$.

The values of the characters of $\mathfrak{G}$ are described largely by the decomposition numbers $d^i_{\mu\varrho}$. The $d^i_{\mu\varrho}$ are elements of a cyclotomic field. In the later sections, the nature of the occuring irrationallities is studied more closely. In particular, we are again interested in the question to what extent the nature of the irrationalities depends on the structure of the groups $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{L}(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_1)$ and $\mathfrak{L}(\mathfrak{p}_1)$.

I an indebted to Professor Richard Brauer for his help.