第49卷第3期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.49, No.3
2006年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series May, 2006

文章编号: 0583-1431(2006)03-0549-10 **文献标识码: A**

环上矩阵广义Moore–Penrose逆的存在性

岑建苗

宁波大学数学系 宁波 315211
E-mail: cjmlx@nbu.edu.cn; cjmclj@mail.nbptt.zj.cn

摘　要 讨论带有对合反自同构 $*$ 有单位元的结合环 R 上矩阵的广义 Moore–Penrose 逆, 给出了环 R 上矩阵的广义 Moore–Penrose 逆存在的几个充要条件. 特别, 得到了环 R 上矩阵 A 的关于 M 和 N 的广义 Moore–Penrose 逆存在的充要条件是 A 有分解 $A=GDH$, 其中 $D^2=D$, $(MD)^*=MD$, $(GD)^*MGD+M(I-D)$ 和 $DHN^{-1}(DH)^*+(I-D)M^{-1}$ 均可逆.

关键词 环; 矩阵; $*$- 对称; 广义 Moore–Penrose 逆
MR(2000) 主题分类 15A30
中图分类 O151

On Existence of the Generalized Moore–Penrose Inverses of Matrices over Ring

Jian Miao CEN

Department of Mathematics, Ningbo University, Ningbo 315211*, P. R. China*
E-mail: cjmlx@nbu.edu.cn; cjmclj@mail.nbptt.zj.cn

Abstract The generalized Moore–Penrose inverses of matrices over a ring with an involution $*$ and unitary are discussed. Some necessary and sufficient conditions for existence of the generalized Moore–Penrose inverse of matrices over a ring are given. In particular, it is obtained that a necessary and sufficient condition for existence of the generalized Moore–Penrose inverse with relation to M and N of a matrix A over a ring is that $A=GDH$, where $D^2=D$, $(MD)^*=MD$, $(GD)^*MGD+M(I-D)$ and $DHN^{-1}(DH)^*+(I-D)M^{-1}$ are invertible.

Keywords ring; matrix; $*$-symmetric; generalized Moore–Penrose inverse
MR(2000) Subject Classification 15A30
Chinese Library Classification 0151

1 引言及准备

对环上矩阵的广义逆的研究, 已取得了许多成果 (参见文 [1–8]). 如文 [4] 引进环上矩阵的广义 Moore–Penrose 逆的概念并讨论了交换环上具有秩分解的矩阵的广义 Moore–Penrose 逆的充要条件. 文 [6] 研究带有对合反自同构 $*$ 有单位元的结合环 R 上形如 $A=GDH$ (其中

收稿日期: 2004-11-26; 接受日期: 2005-03-08
基金项目: 国家自然科学基金项目 (10471069); 浙江省自然科学基金项目 (102066)

$D^2=D=D^*$, G 为右高矩阵, H 为左高矩阵) 的矩阵的 Moore–Penrose 逆. 给出了这样的矩阵存在 Moore–Penrose 逆的充要条件和 Moore–Penrose 逆的表达式. 文 [7] 讨论了环 R 上具有上述分解的矩阵的广义 Moore–Penrose 逆. 文 [8] 讨论了环 R 上形如 $A=GDH$ (其中 G 为右高矩阵, H 为左高矩阵, D 的 Moore–Penrose 逆存在) 的矩阵的广义 Moore–Penrose 逆. 文 [7] 和 [8] 都推广了文 [6] 中的部分结果. 本文在上述研究的基础上, 继续讨论环上矩阵的广义 Moore–Penrose 逆. 给出环 R 上矩阵的广义 Moore–Penrose 逆存在的几个新的充要条件. 特别, 得到了环 R 上矩阵 A 的关于 M 和 N 的广义 Moore–Penrose 逆存在的充要条件是 A 有分解 $A=GDH$, 其中 $D^2=D,(MD)^*=MD$, $(GD)^*MGD+M(I-D)$ 和 $DHN^{-1}(DH)^*+(I-D)M^{-1}$ 均可逆.

本文约定, R 表示带有对合反自同构 $*$ 的有单位元的结合环. $R^{m\times n}$ 表示 R 上所有 $m\times n$ 矩阵组成的集合. 给定 $M\in R^{m\times m}$, $N\in R^{n\times n}$. I 表示单位矩阵.

定义 1.1 对于 $A\in R^{m\times n}$, 如果存在 $X\in R^{n\times m}$, 使得

(1) $AXA=A$; (2) $XAX=X$; (3) $(MAX)^*=MAX$; (4) $(NXA)^*=NXA$,

那么, X 称为 A 的关于 M 和 N 的广义 Moore–Penrose 逆. 如果 X 满足上述条件 (1) 到 (4) 中的 $(i),\ldots,(j)$ 条, 那么 X 称为 A 的 $\{i,\ldots,j\}$- 逆.

当 M 和 N 可逆时, 对于 $A\in R^{m\times n}$, 如果 A 的关于 M 和 N 的广义 Moore–Penrose 逆存在, 那么 A^*MA 和 $AN^{-1}A^*$ 都是 $*$- 对称的且 A 的关于 M 和 N 的广义 Moore–Penrose 逆是惟一的. 用 A^+_{MN} 表示 A 的关于 M 和 N 的广义 Moore–Penrose 逆.

设 $A\in R^{m\times n}$, 对于矩阵 X_1 和 X_2, 如果当 $X_1ANA^*=X_2ANA^*$ 时, 就有 $X_1A=X_2A$, 那么称 A 为 $*-N$ 右可消的. 如果当 $A^*MAX_1=A^*MAX_2$ 时, 就有 $AX_1=AX_2$, 那么称 A 为 $*-M$ 左可消的. 对于 $B\in R^{l\times m}$, $A\in R^{m\times n}$, 如果 $BMA=0$, 那么称 B 是 A 的 M- 左零化子. 反过来, 称 A 是 B 的 M- 右零化子.

下面列出一个大家熟知的结果.

引理 1.2 设 $A\in R^{m\times n}$. A^+_{MN} 存在的充要条件是 A^*MA 和 $AN^{-1}A^*$ 都是 $*$- 对称的且矩阵方程 $xA^*MA=A$ 和 $AN^{-1}A^*y=A$ 均有解. 此时, 有

$$A^+_{MN}=N^{-1}C^*AB^*M^*, \tag{1}$$

其中 B 和 C 分别是矩阵方程 $xA^*MA=A$ 和 $AN^{-1}A^*y=A$ 的解.

2 $*$- 对称矩阵与存在性

假定 M 和 N 都是可逆矩阵, 但不要求是 $*$- 对称的. 我们利用 $*$- 对称性来讨论环 R 上矩阵 A 的关于 M 和 N 的广义 Moore–Penrose 逆存在性.

引理 2.1 设 $A\in R^{m\times n}$. A^+_{MN} 存在的充要条件是 $(A^*)^+_{N^{-1}M^{-1}}$ 存在. 此时, 有

$$(A^*)^+_{N^{-1}M^{-1}}=(A^+_{MN})^*. \tag{2}$$

证明 直接验证可得.

引理 2.2 设 $D\in R^{m\times m}$. 如果 D 是 $*$- 对称矩阵, 那么下列条件是等价的.

(i) D 的关于 M 和 M^{-1} 的广义 Moore–Penrose 逆存在.

(ii) DMD 是 $*$- 对称的且存在 D 的 $\{1,2\}$- 逆 $D^{(1,2)}$ 满足 $MDD^{(1,2)}=D^{(1,2)}DM^*$.

(iii) DMD 是 $*$- 对称的且存在 D 的 $\{1\}$- 逆 $D^{(1)}$ 满足 $MDD^{(1)}=D^{(1)}DM^*$.

(iv) DMD 是 $*$- 对称的且矩阵方程 $xDMD=D$ 有解.

在上述情况下, $D^+_{MM^{-1}}=MBDB^*M^*$ 是 $*$- 对称的, 其中 B 是矩阵方程 $xDMD=D$的解.

证明 (i)$\Longrightarrow$(ii) 由引理 1.2 知DMD是 $*$- 对称的. 又由引理 2.1 知 $(D^+_{MM^{-1}})^*=(D^*)^+_{MM^{-1}}=D^+_{MM^{-1}}$, 所以 $D^+_{MM^{-1}}$ 也是 $*$- 对称的. 取 $D^{(1,2)}=D^+_{MM^{-1}}$, 于是

$$MDD^{(1,2)}=(MDD^+_{MM^{-1}})^*=(D^+_{MM^{-1}})^*D^*M^*=D^{(1,2)}DM^*.$$

因此, (ii) 成立.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) 显然.

(iii)$\Longrightarrow$(iv) 因为 DMD 是 $*$- 对称的, 所以

$$D=M^{-1}MDD^{(1)}D=M^{-1}D^{(1)}DM^*D=M^{-1}D^{(1)}DMD.$$

因此, $M^{-1}D^{(1)}$ 是矩阵方程 $xDMD=D$ 的解.

(iv)$\Longrightarrow$(i) 设 B 是矩阵方程 $xDMD=D$ 的解. 因为DMD是 $*$- 对称的, 那么

$$D=D^*=(BDMD)^*=DM^*DB^*=DMDB^*=D(M^{-1})^{-1}DB^*,$$

即B^*是矩阵方程$D(M^{-1})^{-1}Dy=D$的解. 由引理 1.2 知 $D^+_{MM^{-1}}$ 存在且 $D^+_{MM^{-1}}=MBDB^*M^*$ 是 $*$- 对称的. 证毕.

引理 2.3 设 $A\in R^{m\times n}$. 如果 A 的关于 M 和 N 的广义 Moore–Penrose 逆存在, 那么

(i) $AN^{-1}A^*$ 的关于 M 和 M^{-1} 的广义 Moore–Penrose 逆存在且

$$(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}=(A^+_{MN})^*NA^+_{MN},\quad A^+_{MN}=N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}.$$

(ii) A^*MA 的关于 N^{-1} 和 N 的广义 Moore–Penrose 逆存在且

$$(A^*MA)^+_{N^{-1}N}=A^+_{MN}M^{-1}(A^+_{MN})^*,\quad A^+_{MN}=(A^*MA)^+_{N^{-1}N}A^*M^*.$$

证明 (i) 因为 A^+_{MN} 存在, 所以 A^*MA 和 $AN^{-1}A^*$ 都是 $*$- 对称的. 由于

$$\begin{aligned}((A^+_{MN})^*NA^+_{MN})^* &= (A^+_{MN})^*N^*A^+_{MN}=(N^{-1}NA^+_{MN}AA^+_{MN})^*N^*A^+_{MN}\\ &=(A^+_{MN})^*(NA^+_{MN}A)^*(N^{-1})^*N^*A^+_{MN}=(A^+_{MN})^*NA^+_{MN}AA^+_{MN}=(A^+_{MN})^*NA^+_{MN},\end{aligned}$$

即 $(A^+_{MN})^*NA^+_{MN}$ 是 $*$- 对称的. 于是

$$\begin{aligned}(A^+_{MN})^*NA^+_{MN}AN^{-1}A^*MAN^{-1}A^* &= (A^+_{MN})^*(NA^+_{MN}A)^*(N^{-1})^*A^*MAN^{-1}A^*\\ &=(AN^{-1}A^*MAN^{-1}NA^+_{MN}AA^+_{MN})^*=(AN^{-1}A^*MAA^+_{MN})^*\\ &=(MAA^+_{MN})^*(AN^{-1}A^*)^*=MAA^+_{MN}AN^{-1}A^*=MAN^{-1}A^*,\end{aligned}$$

从而 $M^{-1}(A^+_{MN})^*NA^+_{MN}AN^{-1}A^*MAN^{-1}A^*=AN^{-1}A^*$. 由引理 2.1 知, $(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}$ 存在且

$$\begin{aligned}(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}} &= MM^{-1}(A^+_{MN})^*NA^+_{MN}AN^{-1}A^*(M^{-1}(A^+_{MN})^*NA^+_{MN})^*M^*\\ &=(A^+_{MN})^*(NA^+_{MN}A)^*(N^{-1})^*A^*(A^+_{MN})^*NA^+_{MN}=(A^+_{MN})^*A^*(A^+_{MN})^*A^*(A^+_{MN})^*NA^+_{MN}\\ &=(A^+_{MN}AA^+_{MN}AA^+_{MN})^*NA^+_{MN}=(A^+_{MN})^*NA^+_{MN}.\end{aligned}$$

又有

$$N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}} = N^{-1}A^*(A^+_{MN})^*NA^+_{MN} = N^{-1}(NA^+_{MN}A)^*A^+_{MN}$$
$$= N^{-1}NA^+_{MN}AA^+_{MN} = A^+_{MN}.$$

(ii) 同理可证. 证毕.

定理 2.4 设 $A\in R^{m\times n}$, 那么下列条件是等价的.

(i) A^+_{MN} 存在.

(ii) A^*MA 和 $AN^{-1}A^*$ 都是 $*$- 对称的, 且在 $R^{m\times m}$ 中存在幂等矩阵 D, 使得 MD 是 $*$- 对称的, $A=DA$ 以及在 $R^{m\times m}$ 中存在矩阵 K 和 L, 使得 $D=AN^{-1}A^*K$ 和 $D^*=LAN^{-1}A^*$.

(iii) A^*MA 和 $AN^{-1}A^*$ 都是 $*$- 对称的, 且在 $R^{m\times m}$ 中存在矩阵 S, 使得 MS 是 $*$- 对称的, $A=SA$ 以及在 $R^{m\times m}$ 中存在矩阵 L, 使得 $S^*=LAN^{-1}A^*$.

(iv) A^*MA 和 $AN^{-1}A^*$ 都是 $*$- 对称的, 且在 $R^{m\times m}$ 中存在矩阵 T, 使得 MT 是 $*$- 对称的, $A=TA$ 以及在 $R^{m\times m}$ 中存在矩阵 K, 使得 $T=AN^{-1}A^*K$.

(v) A^*MA 和 $AN^{-1}A^*$ 都是 $*$- 对称的, 且在 $R^{m\times m}$ 中存在矩阵 U, 使得 $A=UA$ 以及在 $R^{m\times m}$ 中存在矩阵 K 和 L, 使得 $U=AN^{-1}A^*K$ 和 $MU=LAN^{-1}A^*M^*$.

在上述情况下

$$A^+_{MN} = N^{-1}A^*L^* = N^{-1}A^*K. \tag{3}$$

证明 (i)$\Longrightarrow$(ii) 由引理 1.2 知, A^*MA 和 $AN^{-1}A^*$ 都是 $*$- 对称的. 取 $D=AA^+_{MN}$, 那么, D 是幂等矩阵, MD 是 $*$- 对称的且 $A=DA$. 又由引理 2.3 (i) 知

$$D = AA^+_{MN} = AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}},$$
$$D^*M^* = (MD)^* = (MAA^+_{MN})^* = (MAN^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}})^*$$
$$= (AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}AN^{-1}A^*M^*,$$

所以 $D^*=(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}AN^{-1}A^*$. 取 $K=L=(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}$, 有 $D=AN^{-1}A^*K,\ D^*=LAN^{-1}A^*$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) 显然.

(iii)$\Longrightarrow$(iv) 取 $T=S$, $K=L^*$ 即可.

(iv)$\Longrightarrow$(v) 因为在 $R^{m\times m}$ 中存在矩阵 K, 使得 $T=AN^{-1}A^*K$. 由于 MT 是 $*$- 对称的, 因此

$$MT=(MT)^*=T^*M^*=(AN^{-1}A^*K)^*M^*=K^*AN^{-1}A^*M^*.$$

取 $U=T$, $L=K^*$, 有 $A=UA,\ U=AN^{-1}A^*K,\ MU=LAN^{-1}A^*M^*$.

(v)$\Longrightarrow$(i) 由条件可知, 在 $R^{m\times m}$ 中存在 U, K 和 L, 使得 $A=UA$, $U=AN^{-1}A^*K$, $MU=LAN^{-1}A^*M^*$. 于是

$$AN^{-1}A^*KA=UA=A,\quad M^{-1}LAN^{-1}A^*MA=M^{-1}LAN^{-1}A^*M^*A=M^{-1}MUA=A.$$

由引理 1.2 知 A^+_{MN} 存在且

$$A^+_{MN} = N^{-1}(KA)^*A(M^{-1}LAN^{-1})^*M^* = N^{-1}A^*K^*AN^{-1}A^*L^* = N^{-1}A^*U^*L^*$$
$$= N^{-1}A^*L^*.$$

又 $(MU)^* = (LAN^{-1}A^*M^*)^* = MAN^{-1}A^*L^* = MAA^+_{MN}$, 所以 MU 是 $*$- 对称的. 因此

$$\begin{aligned}A^+_{MN} &= N^{-1}A^*K^*M^{-1}MAN^{-1}A^*L^* = N^{-1}A^*K^*M^{-1}(MU)^*\\ &= N^{-1}A^*K^*U = N^{-1}A^*K^*AN^{-1}A^*K = N^{-1}A^*U^*K = N^{-1}A^*K.\end{aligned}$$

证毕.

根据引理 2.3(ii), 同理可得下面的结果.

定理 2.5 设 $A \in R^{m\times n}$, 那么下列条件是等价的.

(i) A^+_{MN} 存在.

(ii) A^*MA 和 $AN^{-1}A^*$ 都是 $*$- 对称的, 且在 $R^{n\times n}$ 中存在幂等矩阵 D, 使得 $D(N^{-1})^*$ 是 $*$- 对称的, $A = AD$ 以及在 $R^{n\times n}$ 中存在矩阵 K 和 L, 使得 $D^* = A^*MAK,\ D = LA^*MA$.

(iii) A^*MA 和 $AN^{-1}A^*$ 都是 $*$- 对称的, 且在 $R^{n\times n}$ 中存在矩阵 S, 使得 $D(N^{-1})^*$ 是 $*$- 对称的, $A = AS$ 以及在 $R^{n\times n}$ 中存在矩阵 K, 使得 $S^* = A^*MAK$.

(iv) A^*MA 和 $AN^{-1}A^*$ 都是 $*$- 对称的, 且在 $R^{n\times n}$ 中存在矩阵 T, 使得 $D(N^{-1})^*$ 是 $*$- 对称的, $A = AT$ 以及在 $R^{n\times n}$ 中存在矩阵 L, 使得 $T = LA^*MA$.

(v) A^*MA 和 $AN^{-1}A^*$ 都是 $*$- 对称的, 且在 $R^{n\times n}$ 中存在矩阵 U, 使得 $A = AU$ 以及在 $R^{n\times n}$ 中存在矩阵 K 和 L, 使得 $U(N^{-1})^* = N^{-1}A^*MAK,\ U = LA^*MA$.

在上述情况下

$$A^+_{MN} = K^*A^*M^* = LA^*M^*. \tag{4}$$

在引理 2.3 (i) 中, 如果 A^+_{MN} 存在, 那么 $(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}$ 存在. 反之不然. 附加了一些条件之后使 A^+_{MN} 存在. 我们有如下的结果.

定理 2.6 设 $A \in R^{m\times n}$, 那么下列条件是等价的.

(i) A^+_{MN} 存在.

(ii) A^*MA 和 $AN^{-1}A^*$ 都是 $*$- 对称的, $(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}$ 存在且 A 是 $*$–N^{-1} 右可消的.

(iii) A^*MA 和 $AN^{-1}A^*$ 都是 $*$- 对称的, $(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}$ 存在且

$$A = AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}A.$$

在上述情况下

$$A^+_{MN} = N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}. \tag{5}$$

证明 (i)$\Longrightarrow$(ii) 由引理 2.3 (i) 知 $(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}$ 存在. 又如果 $X_1AN^{-1}A^*{=}X_2AN^{-1}A^*$, 那么

$$X_1AN^{-1}A^*(NA^+_{MN})^* = X_2AN^{-1}A^*(NA^+_{MN})^*,$$

即 $X_1AN^{-1}(NA^+_{MN}A)^*{=}X_2AN^{-1}(NA^+_{MN}A)^*$, 所以 $X_1A = X_2A$. 于是 A 是 $*$–N^{-1}右可消的.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) 因为 $AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}AN^{-1}A^* = AN^{-1}A^*$, 由于 A 是 $*$–N^{-1} 右可消的, 所以

$$A = AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}A.$$

(iii)$\Longrightarrow$(i) 取 $T = AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}$, 那么 MT 是 $*$- 对称的且 $A = TA$. 取 $K = (AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}$, 有 $T = AN^{-1}A^*K$. 根据定理 2.4, A^+_{MN} 存在且

$$A^+_{MN} = N^{-1}A^*K = N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}.$$

证毕.

同理可得下面的结果.

定理 2.7 设 $A \in R^{m\times n}$, 那么下列条件是等价的.

(i) A_{MN}^{+} 存在.

(ii) A^*MA 和 $AN^{-1}A^*$ 都是 $*$- 对称的, $(A^*MA)_{N^{-1}N}^{+}$ 存在且 A 是 $*$-M 左可消的.

(iii) A^*MA 和 $AN^{-1}A^*$ 都是 $*$- 对称的, $(A^*MA)_{N^{-1}N}^{+}$ 存在且

$$A = A(A^*MA)_{N^{-1}N}^{+}A^*MA.$$

在上述情况下

$$A_{MN}^{+} = (A^*MA)_{N^{-1}N}^{+}A^*M^*. \tag{6}$$

3 矩阵分解与存在性

本节给定 $P \in R^{l\times l}$, $M \in R^{m\times m}$ 和 $N \in R^{n\times n}$. 假定 P, M 和 N 都是 $*$- 对称的可逆矩阵. 利用矩阵的分解来讨论环 R 上矩阵 A 的关于 M 和 N 的广义 Moore–Penrose 逆存在性.

引理 3.1 设 $B \in R^{l\times m}$, $A \in R^{m\times n}$. 若 $BMA = 0$, 则 $B_{PM^{-1}}^{+}$ 和 A_{MN}^{+} 存在且满足

$$AA_{MN}^{+} + (B_{PM^{-1}}^{+}B)^* = I$$

的充要条件是 $AN^{-1}A^* + B^*PB$ 可逆.

此时, 有

$$A_{MN}^{+} = N^{-1}A^*(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1},\ B_{PM^{-1}}^{+} = (AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1}B^*P$$

以及

$$(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1} = (AN^{-1}A^*)_{MM^{-1}}^{+} + (B^*PB)_{MM^{-1}}^{+}.$$

证明 如果 $B_{PM^{-1}}^{+}$ 和 A_{MN}^{+} 存在, 且满足 $AA_{MN}^{+} + (B_{PM^{-1}}^{+}B)^* = I$, 由引理 2.3 知, $(AN^{-1}A^*)_{MM^{-1}}^{+}$ 和 $(B^*PB)_{MM^{-1}}^{+}$ 存在. 因为 $BMA = 0$, 所以 $A^*MB^* = (BMA)^* = 0$. 因此

$$\begin{aligned}
&(AN^{-1}A^* + B^*PB)((AN^{-1}A^*)_{MM^{-1}}^{+} + (B^*PB)_{MM^{-1}}^{+})\\
&\quad = AN^{-1}A^*(A_{MN}^{+})^*NA_{MN}^{+} + AN^{-1}A^*B_{PM^{-1}}^{+}P^{-1}(B_{PM^{-1}}^{+})^*\\
&\qquad + B^*PB(A_{MN}^{+})^*NA_{MN}^{+} + B^*PBB_{PM^{-1}}^{+}P^{-1}(B_{PM^{-1}}^{+})^*\\
&\quad = AA_{MN}^{+}AA_{MN}^{+} + AN^{-1}A^*MM^{-1}B_{PM^{-1}}^{+}BB_{PM^{-1}}^{+}P^{-1}(B_{PM^{-1}}^{+})^*\\
&\qquad + B^*PB(A_{MN}^{+}M^{-1}MAA_{MN}^{+})^*NA_{MN}^{+} + B^*(PBB_{PM^{-1}}^{+})^*P^{-1}(B_{PM^{-1}}^{+})^*\\
&\quad = AA_{MN}^{+} + AN^{-1}A^*MB^*(B_{PM^{-1}}^{+})^*M^{-1}B_{PM^{-1}}^{+}P^{-1}(B_{PM^{-1}}^{+})^*\\
&\qquad + B^*PBMAA_{MN}^{+}(A_{MN}^{+}M^{-1})^*NA_{MN}^{+} + (B_{PM^{-1}}^{+}BB_{PM^{-1}}^{+}B)^*\\
&\quad = AA_{MN}^{+} + (B_{PM^{-1}}^{+}B)^* = I.
\end{aligned}$$

类似地, 可得 $((AN^{-1}A^*)_{MM^{-1}}^{+}+(B^*PB)_{MM^{-1}}^{+})(AN^{-1}A^*+B^*PB) = I$. 因此, $AN^{-1}A^*+B^*PB$ 可逆且

$$(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1} = (AN^{-1}A^*)_{MM^{-1}}^{+} + (B^*PB)_{MM^{-1}}^{+}.$$

反之, 如果$AN^{-1}A^*+B^*PB$可逆, 因为$(AN^{-1}A^*+B^*PB)MAN^{-1}A^*=AN^{-1}A^*MAN^{-1}A^*$, 所以

$$M^{-1}(AN^{-1}A^*+B^*PB)^{-1}AN^{-1}A^*MAN^{-1}A^* = AN^{-1}A^*.$$

那么, 由引理 2.2 知, $(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}$ 存在且

$$(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}} = (AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1}AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1}.$$

又因为

$$\begin{aligned}&(AN^{-1}A^* + B^*PB)MAN^{-1}A^* = AN^{-1}A^*M(AN^{-1}A^* + B^*PB),\\&(AN^{-1}A^* + B^*PB)MA = AN^{-1}A^*MA,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}A&=AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1}AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^*+B^*PB)^{-1}A\\&= M^{-1}(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1}M^{-1}(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1}AN^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA\\&= M^{-1}(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1}AN^{-1}A^*MA = A.\end{aligned}$$

由定理 2.6 知, A^+_{MN} 存在, 且有

$$\begin{aligned}A^+_{MN} &= N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^+_{MM^{-1}}=N^{-1}A^*(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1}AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^*+B^*PB)^{-1}\\&= N^{-1}A^*(M^{-1}MAN^{-1}A^*(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1})^*(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1}\\&= N^{-1}A^*(M^{-1}(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1}AN^{-1}A^*M)^*(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1}\\&= N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1}M^{-1}(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1}\\&= N^{-1}A^*MM^{-1}(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1} = N^{-1}A^*(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1}.\end{aligned}$$

类似地, 有 $B^+_{PM^{-1}} = (AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1}B^*P$. 又有

$$\begin{aligned}AA^+_{MN}+(B^+_{PM^{-1}}B)^* &= AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1} + ((AN^{-1}A^*+B^*PB)^{-1}B^*PB)^*\\&= AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1} + B^*PB(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1}\\&= (AN^{-1}A^* + B^*PB)(AN^{-1}A^* + B^*PB)^{-1} = I.\end{aligned}$$

证毕.

定理 3.2 设 $A \in R^{m\times n}$, 那么下列条件是等价的.

(i) A^+_{MN} 存在.

(ii) 存在 A 的 M- 左零化子 B, 使得 $AN^{-1}A^* + B^*M^{-1}B$ 可逆. 此时, 有

$$A^+_{MN} = N^{-1}A^*(AN^{-1}A^* + B^*M^{-1}B)^{-1}. \tag{7}$$

(iii) 存在幂等矩阵 D, 使得 $(MD)^* = MD$, $A = DA$ 且 $AN^{-1}A^* + (I - D)M^{-1}$ 可逆. 此时, 有

$$A^+_{MN} = N^{-1}A^*(AN^{-1}A^* + (I - D)M^{-1})^{-1}. \tag{8}$$

(iv) 存在矩阵 U, D 和 V, 使得

$$A = UDV,\quad D^2 = D,\quad (MD)^* = MD,\quad UD = U,\quad DV = V, \tag{9}$$

并且 $U^*MU + M(I - D)$ 和 $VN^{-1}V^* + (I - D)M^{-1}$ 均可逆. 此时, 有

$$A^+_{MN} = N^{-1}V^*(VN^{-1}V^* + (I - D)M^{-1})^{-1}D(U^*MU + M(I - D))^{-1}U^*M. \tag{10}$$

(v) 存在矩阵 G, D 和 H, 使得

$$A = GDH, \quad D^2 = D, \quad (MD)^* = MD, \tag{11}$$

并且 $DHN^{-1}(DH)^* + (I-D)M^{-1}$ 和 $(GD)^*MGD + M(I-D)$ 均可逆. 此时, 有

$$A^+_{MN} = N^{-1}(DH)^*(DHN^{-1}(DH)^* + (I-D)M^{-1})^{-1}D((GD)^*MGD + M(I-D))^{-1}(GD)^*M. \tag{12}$$

证明 (i)$\Longrightarrow$(ii) 如果 A^+_{MN} 存在, 记 $B = I - (AA^+_{MN})^*$, 那么

$$BMA = (I - (AA^+_{MN})^*)MA = MA - (MAA^+_{MN})^*A = MA - MAA^+_{MN}A = 0$$

且

$$B^2 = (I - (AA^+_{MN})^*)(I - (AA^+_{MN})^*) = I - (AA^+_{MN})^* = B,$$

以及

$$(BM)^* = ((I - (AA^+_{MN})^*)M)^* = (M - MAA^+_{MN})^* = M - (MAA^+_{MN})^* = BM.$$

又 $BMB^*M^{-1} = BM(I - AA^+_{MN})M^{-1} = B$, 即 M^{-1} 是矩阵方程 $BMB^*y = B$ 的解. 再 $BMB^*M^{-1}B = B^2 = B$, 即 BM 是矩阵方程 $xB^*M^{-1}B = B$ 的解. 由引理 1.2 知, $B^+_{M^{-1}M^{-1}}$ 存在且

$$B^+_{M^{-1}M^{-1}} = MM^{-1}B(BM)^*M^{-1} = BBMM^{-1} = B,$$

于是

$$AA^+_{MN} + (B^+_{M^{-1}M^{-1}}B)^* = AA^+_{MN} + B^* = AA^+_{MN} + I - AA^+_{MN} = I.$$

由引理 3.1 知, $AN^{-1}A^* + B^*M^{-1}B$ 可逆.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) 由引理 3.1 知 A^+_{MN} 存在且

$$A^+_{MN} = N^{-1}A^*(AN^{-1}A^* + B^*M^{-1}B)^{-1}.$$

令 $D = AA^+_{MN}$, 则 D 是幂等矩阵, $(MD)^* = MD$ 且 $A = DA$. 由于 $I - D^*$ 是 A 的 M- 左零因子且 $(I-D^*)^+_{M^{-1}M^{-1}} = I - D^*$ 以及

$$\begin{aligned}
&AA^+_{MN} + ((I-D^*)^+_{M^{-1}M^{-1}}(I-D^*))^* = I,\\
&(I-D^*)^*M^{-1}(I-D^*) = (I-D)M^{-1}(I-D^*) = (I-D)M^{-1} - M^{-1}D^* + M^{-1}MDM^{-1}D^*\\
&\quad = (I-D)M^{-1} - M^{-1}D^* + M^{-1}D^*MM^{-1}D^* = (I-D)M^{-1}.
\end{aligned}$$

由引理 3.1 知, $AN^{-1}A^* + (I-D)M^{-1} = AN^{-1}A^* + (I-D^*)^*M^{-1}(I-D^*)$ 可逆.

(iii)$\Longrightarrow$(iv) 取 $U = D$, $V = A$, 那么

$$A = UDV, \quad D^2 = D, \quad (MD)^* = MD, \quad UD = U, \quad DV = V.$$

且

$$\begin{aligned}
&U^*MU + M(I-D) = (MD)^*D + M - MD = MD^2 + M - MD = M,\\
&VN^{-1}V^* + (I-D)M^{-1} = AN^{-1}A^* + (I-D)M^{-1}.
\end{aligned}$$

因此, $U^*MU+M(I-D)$ 和 $VN^{-1}V^*+(I-D)M^{-1}$ 均可逆.

(iv)$\Longrightarrow$(i) 令 $X=N^{-1}V^*(VN^{-1}V^*+(I-D)M^{-1})^{-1}D(U^*MU+M(I-D))^{-1}U^*M$. 下证 $X=A^+_{MN}$. 由于

$$D(VM^{-1}V^*+(I-D)M^{-1})=DVM^{-1}V^*+(D-D^2)M^{-1}=VM^{-1}V^*,$$
$$(U^*MU+M(I-D))D=U^*MUD+M(D-D^2)=U^*MU,$$

则

$$VM^{-1}V^*(VN^{-1}V^*+(I-D)M^{-1})^{-1}=D=(U^*MU+M(I-D))^{-1}U^*MU.$$

那么

$$AXA=UDVN^{-1}V^*(VN^{-1}V^*+(I-D)M^{-1})^{-1}D(U^*MU+M(I-D))^{-1}U^*MUDV=UDV=A,$$
$$\begin{aligned}XAX=&N^{-1}V^*(VN^{-1}V^*+(I-D)M^{-1})^{-1}D(U^*MU+M(I-D))^{-1}U^*M\\&\cdot UDVN^{-1}V^*(VN^{-1}V^*+(I-D)M^{-1})^{-1}D(U^*MU+M(I-D))^{-1}U^*M\\=&N^{-1}V^*(VN^{-1}V^*+(I-D)M^{-1})^{-1}DDDDD(U^*MU+M(I-D))^{-1}U^*M\\=&N^{-1}V^*(VN^{-1}V^*+(I-D)M^{-1})^{-1}D(U^*MU+M(I-D))^{-1}U^*M=X,\end{aligned}$$

由于 $U^*MU+M(I-D)$ 是 $*$- 对称的

$$\begin{aligned}(MAX)^*&=(MUDVN^{-1}V^*(VN^{-1}V^*+(I-D)M^{-1})^{-1}D(U^*MU+M(I-D))^{-1}U^*M)^*\\&=(MUDDD(U^*MU+M(I-D))^{-1}U^*M)^*=(MU(U^*MU+M(I-D))^{-1}U^*M)^*\\&=MU(U^*MU+M(I-D))^{-1}U^*M=MAX.\end{aligned}$$

因为 $(DM^{-1})^*=M^{-1}D^*MM^{-1}=M^{-1}(MD)^*M^{-1}=DM^{-1}$, 所以

$$\begin{aligned}(NXA)^*&=(NN^{-1}V^*(VN^{-1}V^*+(I-D)M^{-1})^{-1}D(U^*MU+M(I-D))^{-1}U^*MUDV)^*\\&=(V^*(VN^{-1}V^*+(I-D)M^{-1})^{-1}V)^*=V^*(VN^{-1}V^*+(I-D)M^{-1})^{-1}V=NXA.\end{aligned}$$

因此, X 为 A 的关于 M 和 N 的广义 Moore–Penrose 逆.

(iv)$\Longrightarrow$(v) 取 $G=U$, $H=V$ 即可.

(v)$\Longrightarrow$(iv) 取 $U=GD$, $V=DH$, 那么 $UD=U$, $DV=V$. 证毕.

设 $A\in R^{m\times n}$, $B\in R^{n\times k}$, $Q\in R^{k\times k}$, 其中 Q 为 $*$- 对称的可逆矩阵. 若 $AN^{-1}B=0$, 根据引理 3.1, $B^+_{N^{-1}Q}$ 和 A^+_{MN} 存在且满足

$$A^+_{MN}A+(BB^+_{N^{-1}Q})^*=I$$

的充要条件是 $A^*MA+BQ^{-1}B^*$ 可逆. 此时, 有

$$A^+_{MN}=(A^*MA+BQ^{-1}B^*)^{-1}A^*M,\ B^+_{N^{-1}Q}=Q^{-1}B^*(A^*MA+BQ^{-1}B^*)^{-1}$$

以及

$$(A^*MA+BQ^{-1}B^*)^{-1}=(A^*MA)^+_{N^{-1}N}+(BQ^{-1}B^*)^+_{N^{-1}N}.$$

因此, 利用 A^*MA, 可类似地得到下面的结果.

定理 3.3 设 $A \in R^{m\times n}$, 那么下列条件是等价的.

(i) A^+_{MN} 存在.

(ii) 存在 A 的 N^{-1}- 右零化子 B, 使得 $A^*MA+BNB^*$ 可逆. 此时, 有

$$A^+_{MN}=(A^*MA+BNB^*)^{-1}A^*M. \tag{13}$$

(iii) 存在幂等矩阵 D, 使得 $(ND)^*=ND$, $A=AD$ 且 $A^*MA+N(I-D)$ 可逆. 此时, 有

$$A^+_{MN}=(A^*MA+N(I-D))^{-1}A^*M. \tag{14}$$

(iv) 存在矩阵 U, D 和 V, 使得

$$A=UDV,\quad D^2=D,\quad (ND)^*=ND,\quad UD=U,\quad DV=V, \tag{15}$$

并且 $U^*MU+N(I-D)$ 和 $VN^{-1}V^*+(I-D)N^{-1}$ 均可逆. 此时, 有

$$A^+_{MN}=N^{-1}V^*(VN^{-1}V^*+(I-D)N^{-1})^{-1}D(U^*MU+N(I-D))^{-1}U^*M. \tag{16}$$

(v) 存在矩阵 G, D 和 H, 使得

$$A=GDH,\quad D^2=D,\quad (ND)^*=ND, \tag{17}$$

并且 $DHN^{-1}(DH)^*+(I-D)N^{-1}$ 和 $(GD)^*MGD+N(I-D)$ 均可逆. 此时, 有

$$A^+_{MN}=N^{-1}(DH)^*(DHN^{-1}(DH)^*+(I-D)N^{-1})^{-1}D((GD)^*MGD+N(I-D))^{-1}(GD)^*M. \tag{18}$$

注 1 上述结果均可推广到范畴中的态射上.

参 考 文 献

[1] Bhaskara Rao K. P. S., On generalized inverses of matrices over integral domains, *Linear Algebra Appl.*, 1983, **49**: 179–189.

[2] Puystjens R., The Moore–Penrose inverse for matrices over some noetherian rings, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1984, 191–198.

[3] Huylebrouck D., Puystjens R., Vangeel J., The Moore–Penrose inverse of a matrix over a semi-simple Artinian rings, *Linear and Multilinear Algebra*, 1984, **161**: 239–246.

[4] Prasad M. K., Bapat R. B., The generalized Moore–Penrose inverse, *Linear Algebra Appl.*, 1992, **165**: 59–69.

[5] Cao C. G., The Moore–penrose inverses of matrices over ring, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1988, **31**(1): 131–133.

[6] Chen J. L., On Moore–penrose inverses of matrices over ring, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1991, **34**(5): 622–630.

[7] Liu S. D., You H., The Generalized Moore–penrose inverses of matrices over ring, *J. of Math.*, 2002, **22**(1): 116–120.

[8] Wang Z. J., Liu X. Y., On Generalized Moore–penrose inverses of matrices over ring, *J. of Southwest China Normal University*, 2003, **28**(1): 23–25.