第49卷第5期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.49, No.5
2006年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Sept., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)05-1121-06 **文献标识码: A**

参量化的 Hilbert 不等式

杨必成

广东教育学院数学系 广州 510303
E-mail: bcyang@pub.guangzhou.gd.cn; http://www1.gdei.edu.cn/yangbicheng/index.htm1

摘　要 通过引入一些参数及估算权系数, 给出一个推广的具有最佳常数因子的 Hilbert 重级数不等式, 它联系着 β 函数. 作为应用, 考虑了它的等价形式及一些特殊结果.

关键词 Hilbert 不等式; 权系数; β 函数
MR(2000) 主题分类 26D15
中图分类 O178

On Hilbert's Inequality with Some Parameters

Bi Cheng YANG

Department of Mathematics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303, *P. R. China*
E-mail: bcyang@pub.guangzhou.gd.cn; http://www1.gdei.edu.cn/yangbicheng/index.htm1

Abstract In this paper, by introducing some parameters and estimating the weight coefficient, we give a generalization of Hilbert's double series inequality with a best constant factor, which involves the β function. As its applications, we consider the equivalent form and some particular results.

Keywords Hilbert's inequality; weight coefficient; β function
MR(2000) Subject Classification 26D15
Chinese Library Classification O178

1 引言

若 $\{a_n\},\{b_n\}$ 为实数列, 使得 $0<\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2<\infty$ 及 $0<\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2<\infty$, 则有 [1]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_mb_n}{m+n}<\pi\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

这里, 常数因子 π 是最佳值. 不等式 (1.1) 以 Hilbert 重级数不等式著称, 它在分析学有重要的应用 (见 Mitrinovic 等的文 [2]), 其等价式是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m+n}\right)^2<\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2. \tag{1.2}$$

这里, 常数因子 π^2 仍是最佳值.

1925 年, Hardy–Riesz 引入 (p,q)- 参数, 给 (1.1), (1.2) 式以如下经典的推广 (见文 [1,3]):

收稿日期: 2003-07-15; 修改日期: 2004-08-30; 接受日期: 2005-04-26
基金项目: 广东高校自然科学基金资助项目 (0177); 广东教育学院教授博士研究基金项目

若 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\{a_n\},\{b_n\}$ 为非负实数列, 使得 $0<\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p<\infty;\ 0<\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q<\infty$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_mb_n}{m+n}<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\bigg\}^{\frac{1}{p}}\bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\bigg\}^{\frac{1}{q}};\tag{1.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\bigg(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m+n}\bigg)^p<\bigg[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\bigg]^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p.\tag{1.4}$$

这里, 常数因子 $\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ 及 $\big[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\big]^p$ 都是最佳值. (1.3) 式称为 Hardy–Hilbert 不等式, 它等价于 (1.4) 式. 当 $p=q=2$ 时, 不等式 (1.3) 导出 (1.1), 而 (1.4) 式导出 (1.2) 式.

1998 年, 通过引入参数 $\lambda(\in(0,1])$ 及 β 函数, 杨 [4] 给出一个 (1.1) 式的积分形式的推广. 沿用文 [4] 的方法, 文 [5, 6] 给文 [4] 的结果以一些改进及推广; 杨 [7] 同时给出 (1.1) 及 (1.2) 式的如下最佳推广:

若 $\lambda\in(0,4]$, 使得 $0<\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\lambda}a_n^2<\infty;\ 0<\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\lambda}b_n^2<\infty$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_mb_n}{(m+n)^\lambda}<B\bigg(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\bigg)\bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\lambda}a_n^2\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\lambda}b_n^2\bigg\}^{\frac{1}{2}};\tag{1.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\lambda-1}\bigg[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{(m+n)^\lambda}\bigg]^2<\bigg[B\bigg(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\bigg)\bigg]^2\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\lambda}a_n^2.\tag{1.6}$$

这里, 常数因子 $B\big(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\big)$ 及 $\big[B\big(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\big)\big]^2$ 都是最佳值; $B(u,v)$ 是如下定义的 β 函数 (见文 [8]):

$$B(u,v):=\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x)^{u+v}}x^{-1+u}dx=B(v,u)\quad(u,v>0).\tag{1.7}$$

2002 年, 杨等 [9] 给出 (1.3) 及 (1.4) 式的如下推广:

若 $2-\min\{p,q\}<\lambda\le 2$, 使得 $0<\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\lambda}a_n^p<\infty;\ 0<\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\lambda}b_n^q<\infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_mb_n}{(m+n)^\lambda}<B\bigg(\frac{p+\lambda-2}{p},\frac{q+\lambda-2}{q}\bigg)\bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\lambda}a_n^p\bigg\}^{\frac{1}{p}}\bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\lambda}b_n^q\bigg\}^{\frac{1}{q}};\tag{1.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{(p-1)(\lambda-1)}\bigg[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{(m+n)^\lambda}\bigg]^p<\bigg[B\bigg(\frac{p+\lambda-2}{p},\frac{q+\lambda-2}{q}\bigg)\bigg]^p\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\lambda}a_n^p.\tag{1.9}$$

这里, 常数因子 $B\big(\frac{p+\lambda-2}{p},\frac{q+\lambda-2}{q}\big)$ 及 $\big[B\big(\frac{p+\lambda-2}{p},\frac{q+\lambda-2}{q}\big)\big]^p$ 都是最佳值. 当 $p=q=2$ 及 $0<\lambda\le 2$ 时, (1.8), (1.9) 式推出 (1.5), (1.6) 式.

本文引入 β 函数及估算权系数, 给出 (1.1) 式的具有多参数的新推广, 使得 (1.5) 及 (1.8) 式都是它的特殊结果. 作为应用, 考虑其等价式及建立一些新的特殊结果.

2 一些引理

引理 2.1 若 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $r>1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$, $t\ge 0$ 及 $\lambda>(2-\min\{r,s\})t$, 定义权函数 $\omega_{\lambda,t}(s,p,x)$ $(x>0)$ 为

$$\omega_{\lambda,t}(s,p,x):=\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+y)^\lambda}\cdot\frac{x^{p[(1-t)r+2t-\lambda]/(qr)}}{y^{[(1-t)s+2t-\lambda]/s}}dy,\tag{2.1}$$

则有

$$\omega_{\lambda,t}(s,p,x)=B\bigg(\frac{(r-2)t+\lambda}{r},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}\bigg)x^{p[1-t+\frac{2t-\lambda}{r}]-1}.\tag{2.2}$$

证明 固定 x. 在 (2.1) 式的积分中作变换 $u=y/x$, 由 (1.7) 式, 有

$$\begin{aligned}\omega_{\lambda,t}(s,p,x)&=x^{-1+p[1-t+\frac{2t-\lambda}{r}]}\int_0^\infty\frac{1}{(1+u)^\lambda}u^{-1+[(s-2)t+\lambda]/s}du\\&=x^{p[1-t+\frac{2t-\lambda}{r}]-1}B\left(\frac{(s-2)t+\lambda}{s},\frac{(r-2)t+\lambda}{r}\right),\end{aligned}\tag{2.3}$$

故 (2.2) 为真. 证毕.

注 1 由 (2.3) 式, 还有

$$\begin{aligned}\omega_{\lambda,t}(r,q,y)&=\int_0^\infty\frac{1}{(x+y)^\lambda}\cdot\frac{y^{q[(1-t)s+2t-\lambda]/(ps)}}{x^{[(1-t)r+2t-\lambda]/r}}dx\\&=B\left(\frac{(r-2)t+\lambda}{r},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}\right)y^{q[1-t+\frac{2t-\lambda}{s}]-1}\quad(y>0).\end{aligned}\tag{2.4}$$

引理 2.2 在引理 2.1 的条件下, 若 $\varepsilon>0$ 足够小 $(\varepsilon<\frac{p}{r}[(r-2)t+\lambda])$, 则有

$$\begin{aligned}I:&=\int_1^\infty\left\{\int_1^\infty\frac{x^{t-1-\frac{\varepsilon}{p}+\frac{\lambda-2t}{r}}}{(x+y)^\lambda}dx\right\}y^{t-1-\frac{\varepsilon}{q}+\frac{\lambda-2t}{s}}dy\\&\geq\frac{1}{\varepsilon}B\left(\frac{(r-2)t+\lambda}{r}-\frac{\varepsilon}{p},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}+\frac{\varepsilon}{p}\right)-O(1)\quad(\varepsilon\to0^+).\end{aligned}\tag{2.5}$$

证明 固定 y. 在积分 I 中作变换 $u=x/y$, 由 (1.7) 式, 可求得

$$\begin{aligned}I&=\int_1^\infty y^{-1-\varepsilon}\left[\int_{1/y}^\infty\frac{1}{(1+u)^\lambda}u^{-1+\frac{(r-2)t+\lambda}{r}-\frac{\varepsilon}{p}}du\right]dy\\&=\int_1^\infty y^{-1-\varepsilon}\left[\int_0^\infty\frac{1}{(1+u)^\lambda}u^{-1+\frac{(r-2)t+\lambda}{r}-\frac{\varepsilon}{p}}du\right]dy\\&\quad-\int_1^\infty y^{-1-\varepsilon}\left[\int_0^{1/y}\frac{1}{(1+u)^\lambda}u^{-1+\frac{(r-2)t+\lambda}{r}-\frac{\varepsilon}{p}}du\right]dy\\&\geq\frac{1}{\varepsilon}B\left(\frac{(r-2)t+\lambda}{r}-\frac{\varepsilon}{p},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}+\frac{\varepsilon}{p}\right)-\int_1^\infty y^{-1}\left[\int_0^{1/y}u^{-1+\frac{(r-2)t+\lambda}{r}-\frac{\varepsilon}{p}}du\right]dy\\&=\frac{1}{\varepsilon}B\left(\frac{(r-2)t+\lambda}{r}-\frac{\varepsilon}{p},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}+\frac{\varepsilon}{p}\right)-\left[\frac{(r-2)t+\lambda}{r}-\frac{\varepsilon}{p}\right]^{-2},\end{aligned}$$

故估值式 (2.5) 为真. 证毕.

3 主要结果及一些应用

定理 3.1 若 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $r>1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$, $t\in[0,1]$ 及 $\big(2-\min\{r,s\}\big)t<\lambda\leq(2-\min\{r,s\})t+\min\{r,s\}$, 使得 $0<\sum_{n=1}^\infty n^{p(1-t+\frac{2t-\lambda}{r})-1}a_n^p<\infty$, $0<\sum_{n=1}^\infty n^{q(1-t+\frac{2t-\lambda}{s})-1}b_n^q<\infty$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty\frac{a_mb_n}{(m+n)^\lambda}&<B\left(\frac{(r-2)t+\lambda}{r},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}\right)\\&\quad\times\left\{\sum_{n=1}^\infty n^{p(1-t+\frac{2t-\lambda}{r})-1}a_n^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=1}^\infty n^{q(1-t+\frac{2t-\lambda}{s})-1}b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

这里, 常数因子 $B\big(\frac{(r-2)t+\lambda}{r},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}\big)$ 是最佳值. 特别地, 当 $r=s=2$, 有 $0<\lambda\leq2$ 及

$$\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty\frac{a_mb_n}{(m+n)^\lambda}<B\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)\left\{\sum_{n=1}^\infty n^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1}a_n^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=1}^\infty n^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1}b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}.\tag{3.2}$$

证明 由 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{(m+n)^{\lambda}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{a_m}{(m+n)^{\lambda/p}}\frac{m^{[(1-t)r+2t-\lambda]/(qr)}}{n^{[(1-t)s+2t-\lambda]/(ps)}}\right]\left[\frac{b_n}{(m+n)^{\lambda/q}}\cdot\frac{n^{[(1-t)s+2t-\lambda]/(ps)}}{m^{[(1-t)r+2t-\lambda]/(qr)}}\right] \\ &\le \left\{\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n)^{\lambda}}\cdot\frac{m^{p[(1-t)r+2t-\lambda]/(qr)}}{n^{[(1-t)s+2t-\lambda]/s}}\right]a_m^p\right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\quad\times\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n)^{\lambda}}\cdot\frac{n^{q[(1-t)s+2t-\lambda]/(ps)}}{m^{[(1-t)r+2t-\lambda]/r}}\right]b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= \left\{\sum_{m=1}^{\infty}\varpi_{\lambda,t}(s,p,m)a_m^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\varpi_{\lambda,t}(r,q,n)b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

这里, 权系数 $\varpi_{\lambda,t}(s,p,m)$ 及 $\varpi_{\lambda,t}(r,q,n)$ 定义为

$$\varpi_{\lambda,t}(s,p,m) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n)^{\lambda}}\cdot\frac{m^{p[(1-t)r+2t-\lambda]/(qr)}}{n^{[(1-t)s+2t-\lambda]/s}},\ m\in N;$$

$$\varpi_{\lambda,t}(r,q,n) := \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n)^{\lambda}}\cdot\frac{n^{q[(1-t)s+2t-\lambda]/(ps)}}{m^{[(1-t)r+2t-\lambda]/r}},\ n\in N.$$

因 $t\in[0,1]$ 及 $0\le\big(2-\min\{r,s\}\big)t<\lambda\le(2-\min\{r,s\})t+\min\{r,s\}$, 可求得 $[(1-t)s+2t-\lambda]/s\ge 0,\quad [(1-t)r+2t-\lambda]/r\ge 0$. 因而由 (2.2) 及 (2.4) 式, 有

$$\varpi_{\lambda,t}(s,p,m)<\omega_{\lambda,t}(s,p,m)=B\left(\frac{(r-2)t+\lambda}{r},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}\right)m^{p[1-t+\frac{2t-\lambda}{r}]-1};$$

$$\varpi_{\lambda,t}(r,q,n)<\omega_{\lambda,t}(r,q,n)=B\left(\frac{(r-2)t+\lambda}{r},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}\right)n^{q[1-t+\frac{2t-\lambda}{s}]-1}.$$

再由 (3.3) 式, 我们有 (3.1) 式.

对于$\varepsilon>0$足够小 ($\varepsilon<\frac{p}{r}[(r-2)t+\lambda]$), 置$\tilde{a}_n,\tilde{b}_n$为 $\tilde{a}_n=n^{t-1-\frac{\varepsilon}{p}+\frac{\lambda-2t}{r}}$, $\tilde{b}_n=n^{t-1-\frac{\varepsilon}{q}+\frac{\lambda-2t}{s}}$, $n\in N$, 则可求得

$$\begin{aligned} J:&=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{p(1-t+\frac{2t-\lambda}{r})-1}\tilde{a}_n^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{q(1-t+\frac{2t-\lambda}{s})-1}\tilde{b}_n^q\right\}^{\frac{1}{q}} \\ &=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}<1+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}dx=1+\frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

若 (3.1) 式的常数因子 $B\big(\frac{(r-2)t+\lambda}{r},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}\big)$ 不是最佳的, 则有正数 k $\big(k<B(\frac{(r-2)t+\lambda}{r},\frac{(s-2)t+\lambda}{s})\big)$, 使 k 置换 $B\big(\frac{(r-2)t+\lambda}{r},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}\big)$ 后, (3.1) 式仍成立. 特别由 (2.5) 式, 有

$$B\left(\frac{(r-2)t+\lambda}{r}-\frac{\varepsilon}{p},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}+\frac{\varepsilon}{p}\right)-\varepsilon O(1)\le\varepsilon I<\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{a}_m\tilde{b}_n}{(m+n)^{\lambda}}<\varepsilon kJ<k(\varepsilon+1).$$

令 $\varepsilon\to 0^+$, 有 $B\big(\frac{(r-2)t+\lambda}{r},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}\big)\le k$, 这矛盾于 $k<B\big(\frac{(r-2)t+\lambda}{r},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}\big)$. 因而 (3.1) 式的常数因子 $B\big(\frac{(r-2)t+\lambda}{r},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}\big)$ 为最佳值. 证毕.

定理 3.2 若 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $r>1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$, $t\in[0,1]$ 及 $\big(2-\min\{r,s\}\big)t<\lambda\le\big(2-\min\{r,s\}\big)t+\min\{r,s\}$, $\{a_n\}$ 是非负实数列, 使得 $0<\sum_{n=1}^{\infty}n^{p(1-t+\frac{2t-\lambda}{r})-1}a_n^p<\infty$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{p(t-\frac{2t-\lambda}{s})-1}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{(m+n)^{\lambda}}\right]^p<\left[B\left(\frac{(r-2)t+\lambda}{r},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}\right)\right]^p\sum_{n=1}^{\infty}n^{p(1-t+\frac{2t-\lambda}{r})-1}a_n^p. \tag{3.4}$$

这里, 常数因子 $\left[B\left(\frac{(r-2)t+\lambda}{r}, \frac{(s-2)t+\lambda}{s}\right)\right]^p$ 是最佳值; 不等式 (3.4) 等价于 (3.1) 式. 特别地, 当 $r=s=2$ 时, 有 $0<\lambda\le 2$ 及

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p\lambda}{2}-1}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{(m+n)^{\lambda}}\right]^p < \left[B\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)\right]^p \sum_{n=1}^{\infty} n^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1}a_n^p. \tag{3.5}$$

证明 置 b_n 为 $b_n := n^{p(t-\frac{2t-\lambda}{s})-1}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{(m+n)^{\lambda}}\right]^{p-1}>0$, $n\in N$, 则由 (3.1) 式, 可求得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^{q(1-t+\frac{2t-\lambda}{s})-1}b_n^q &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{p(t-\frac{2t-\lambda}{s})-1}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{(m+n)^{\lambda}}\right]^p\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{(m+n)^{\lambda}} \le B\left(\frac{(r-2)t+\lambda}{r},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}\right)\\ &\quad\times\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{p(1-t+\frac{2t-\lambda}{r})-1}a_n^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{q(1-t+\frac{2t-\lambda}{s})-1}b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

因而有

$$0<\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{q(1-t+\frac{2t-\lambda}{s})-1}b_n^q\right\}^{\frac{1}{p}} \le B\left(\frac{(r-2)t+\lambda}{r},\frac{(s-2)t+\lambda}{s}\right)\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{p(1-t+\frac{2t-\lambda}{r})-1}a_n^p\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty. \tag{3.7}$$

由 (3.1) 式知 (3.6) 及 (3.7) 式都取严格不等号, 故有 (3.4) 式.

反之, 设 (3.4) 式为真. 由 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{(m+n)^{\lambda}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[n^{t-\frac{2t-\lambda}{s}-\frac{1}{p}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{(m+n)^{\lambda}}\right][n^{-t+\frac{2t-\lambda}{s}+\frac{1}{p}}b_n]\\ &\le \left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{p(1-\frac{2t-\lambda}{s})-1}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{(m+n)^{\lambda}}\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{q(1-t+\frac{2t-\lambda}{s})-1}b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

因而由 (3.4) 式, 有 (3.1) 式, 故 (3.1) 与 (3.4) 式等价.

若 (3.4) 式的常数因子 $\left[B\left(\frac{(r-2)t+\lambda}{r}, \frac{(s-2)t+\lambda}{s}\right)\right]^p$ 不是最佳值, 同法及应用 (3.8) 式, 可得 (3.1) 式的常数因子也不是最佳值的矛盾. 证毕.

注 2 (a) 当 $\lambda=1$ 及 $p=q=2$, (3.2), (3.5) 式分别变成 (1.1), (1.2) 式. 这说明 (3.1) 式是 (1.1) 式的多参数推广; 作为 (3.1) 的等价形式, (3.4) 式是 (1.2) 式的多参数推广.

(b) 当 $r=p$, $s=q$ 及 $t=1$ 时, (3.1), (3.4) 式分别变成 (1.8), (1.9) 式. 这说明 (3.1), (3.4) 式是 (1.8), (1.9) 式的推广.

当 $r=p$, $s=q$ 及 $t=0$ 时, 由 (3.1), (3.4) 式可导出:

推论 3.3 若 $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 及 $0<\lambda\le\min\{p,q\}, \{a_n\}, \{b_n\}$ 是非负实数列, 使得 $0<\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-\lambda-1}a_n^p<\infty$, $0<\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-\lambda-1}b_n^q<\infty$, 则有下列等价不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{(m+n)^{\lambda}} < B\left(\frac{\lambda}{p},\frac{\lambda}{q}\right)\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-\lambda-1}a_n^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-\lambda-1}b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}; \tag{3.9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda(p-1)-1}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{(m+n)^{\lambda}}\right]^p < \left[B\left(\frac{\lambda}{p},\frac{\lambda}{q}\right)\right]^p\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-\lambda-1}a_n^p. \tag{3.10}$$

这里, 常数因子 $B\left(\frac{\lambda}{p},\frac{\lambda}{q}\right)$ 及 $\left[B\left(\frac{\lambda}{p},\frac{\lambda}{q}\right)\right]^p$ 都是最佳值.

当 $r=q$, $s=p$ 及 $t=0$ 时, 由 (3.1), (3.4) 式可导出:

推论 3.4 若 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 及 $0<\lambda\le\min\{p,q\}$, $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是非负实数列, 使得 $0<\sum_{n=1}^{\infty} n^{(p-1)(1-\lambda)}a_n^p<\infty$, $0<\sum_{n=1}^{\infty} n^{(q-1)(1-\lambda)}b_n^q<\infty$, 则有下列等价不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{(m+n)^{\lambda}} < B\left(\frac{\lambda}{p},\frac{\lambda}{q}\right)\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{(p-1)(1-\lambda)}a_n^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{(q-1)(1-\lambda)}b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}; \tag{3.11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1}\left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{(m+n)^{\lambda}}\right]^p < \left[B\left(\frac{\lambda}{p}, \frac{\lambda}{q}\right)\right]^p \sum_{n=1}^{\infty} n^{(p-1)(1-\lambda)} a_n^p. \tag{3.12}$$

这里, 常数因子 $B\left(\frac{\lambda}{p}, \frac{\lambda}{q}\right)$ 及 $\left[B\left(\frac{\lambda}{p}, \frac{\lambda}{q}\right)\right]^p$ 都是最佳值.

当 $r=q$, $s=p$ 及 $t=1$ 时, 由 (3.1), (3.4) 式可导出:

推论 3.5 若 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 及 $2-\min\{p,q\}<\lambda\le 2$, $\{a_n\},\{b_n\}$ 是非负实数列, 使得 $0<\sum_{n=1}^{\infty} n^{(p-1)(2-\lambda)-1} a_n^p<\infty$, $0<\sum_{n=1}^{\infty} n^{(q-1)(2-\lambda)-1} b_n^q<\infty$, 则有下列等价不等式

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{(m+n)^{\lambda}} &< B\left(\frac{p-2+\lambda}{p}, \frac{q-2+\lambda}{q}\right) \\ &\times \left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{(p-1)(2-\lambda)-1} a_n^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{(q-1)(2-\lambda)-1} b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}};\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p+\lambda-3}\left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{(m+n)^{\lambda}}\right]^p < \left[B\left(\frac{p-2+\lambda}{p}, \frac{q-2+\lambda}{q}\right)\right]^p \sum_{n=1}^{\infty} n^{(p-1)(2-\lambda)-1} a_n^p. \tag{3.14}$$

这里, 常数因子 $B\left(\frac{p-2+\lambda}{p}, \frac{q-2+\lambda}{q}\right)$ 及 $\left[B\left(\frac{p-2+\lambda}{p}, \frac{q-2+\lambda}{q}\right)\right]^p$ 都是最佳值. 特别当 $\lambda=1$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} < \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} a_n^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2} b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}; \tag{3.15}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m+n}\right)^p < \left[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right]^p \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} a_n^p. \tag{3.16}$$

注 3 (a) 当 $\lambda=1$ 时, 由 (3.11) 与 (1.8) 式可导出 (1.3) 式; 由 (3.12) 与 (1.9) 式可导出 (1.4) 式; 且不等式 (3.9), (3.10) 分别变为 (3.15), (3.16) 式.

(b) 当 $\lambda=1$ 时, 由 (3.2), (3.5) 式, 可得下列等价不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} < \pi\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{2}-1} a_n^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{2}-1} b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}; \tag{3.17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{2}-1}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m+n}\right)^p < \pi^p \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{2}-1} a_n^p. \tag{3.18}$$

有趣的是, (1.3), (3.15) 及 (3.17) 式虽各不相同, 但它们都是 (1.1) 式的推广, 且具有 (p,q)- 参数及相同的最佳常数因子.

(c) 同样有趣的是, 不等式 (1.5) 具有多达四种形式的如同 (1.8), (3.9), (3.11) 及 (3.13) 式的最佳推广, 它们仅联系 λ 及 (p,q)- 参数.

参 考 文 献

[1] Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G., Inequalities, Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

[2] Mintrinovic D. S., Pecaric J. E., Fink A. M., Inequalities involving functions and their integrals and derivertives, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[3] Hardy G. H., Not on a theorwm of Hilbert concerning series of positive terms, *Proc. London Math. Soc.*, 1925, **23**(2): Records of Proc. xlv-xlvi.

[4] Yang B. C., On Hilbert's integral inequality, *J. Math. Anal. Appl.*, 1998, **220**: 778–785.

[5] Yang B. C., On a general Hardy-Hilbert's integral inequality with a best value, *Chinese Annals Math.*, 2000, **21A**(4): 401–408 (in Chinese).

[6] Yang B. C., On Hardy-Hilbert's integral inequality, *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, **261**: 295–306.

[7] Yang B. C., On a generalization of Hilbert double series theorem, *J. Nanjing Univ. -Math. Biquarterly*, 2001, **18**(1): 145–152 (in Chinese).

[8] Wang Z. X., Guo D. R., An introduction to special functions, Beijing: Science Press, 1979 (in Chinese).

[9] Yang B. C., Debnath L., On the extended Hardy-Hilbert's inequality, *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **272**: 187–199.