第49卷第5期 数学学报中文版 Vol.49, No.5
2006年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Sept., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)05-1189-06 **文献标识码: A**

所有双理想都是素双理想的半群

李世群

湖南科技大学数学学院 湘潭 411201

何　勇

湖南科技大学计算机学院 湘潭 411201
E-mail: ynghe@263.net

摘　要　设 S 为一个半群, B 是 S 的一个双理想 (即 B 是 S 的一个满足条件 $BSB \subseteq B$ 的子半群). 如果对 S 的任意双理想 C, D 都有 $CD \subseteq B$ 蕴涵 $C \subseteq B$ 或 $D \subseteq B$, 我们就称 B 为 S 的一个素双理想. 如果 K 是一个 N- 覆盖的纯 LR- 带, 我们就称 K 为一条拟链. 本文证明了半群 S 的所有双理想都是素双理想的充分必要条件是 S 是一个幂等元形成拟链的纯整群并半群.

关键词　双理想; 半素双理想; 素双理想

MR(2000) 主题分类　20M10

中图分类　O152.7

On Semigroups Whose Bi-ideals are Prime

Shi Qun LI

School of Mathematics, Hunan University of Science & Technology,
Xiangtan, Hunan 411201, P. R. China

Yong HE

School of Computer, Hunan University of Science & Technology,
Xiangtan, Hunan 411201, P. R. China
E-mail: ynghe@263.net

Abstract Let S be a semigroup, and let B be a bi-ideal of S (i.e., B is a subsemigroup of S satisfying the condition that $BSB \subseteq B$). Then B is called a prime bi-ideal of S if, for any bi-ideals C, D of S, $CD \subseteq B$ implies that either $C \subseteq B$ or $D \subseteq B$. A band K is called a quasi-chain if it is a N-covered pure LR-band. We prove that all bi-ideals of S are prime if and only if it is an orthogroup whose idempotents form a quasi-chain.

Keywords bi-ideal; semiprime ideal; prime bi-ideal

MR(2000) Subject Classification 20M10

Chinese Library Classification O152.7

收稿日期: 2005-07-05; 接受日期: 2005-12-20
基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目 (2004JJ40001)
湖南省教育厅重点基金 (05A024) 和教育厅科学基金资助项目 (03C539)

1 引言

在本文中, 对于命题 A 和命题 B, 我们用 $A \vee B$ 表示 A 和 B 中至少有一个为真, 其它未说明的术语和记号可参阅文献 [1].

如果 B 是半群 S 的一个子半群且满足条件 $BSB \subseteq B$, 就称 B 为 S 的一个双理想 (见文献 [2]). 半群的 [左、右] 理想都是双理想. 半群 S 的双理想 B 称为半素的 (见文献 [2]), 如果 B 满足条件

$$(\forall C \in \mathsf{B}(S)) \qquad C^2 \subseteq B \Longrightarrow C \subseteq B.$$

我们称半群 S 的双理想 B 为一个素双理想, 如果 B 满足条件

$$(\forall C, D \in \mathsf{B}(S)) \qquad CD \subseteq B \Longrightarrow (C \subseteq B) \vee (D \subseteq B).$$

半群 S 的所有双理想、半素双理想和素双理想的集合分别记作 $\mathsf{B}(S)$、$\mathsf{SPB}(S)$ 和 $\mathsf{PB}(S)$. 显然, $\mathsf{PB}(S) \subseteq \mathsf{SPB}(S) \subseteq \mathsf{B}(S)$. 我们将在下文中说明在一般情况下总有 $\mathsf{PB}(S) \subset \mathsf{SPB}(S) \subset \mathsf{B}(S)$.

文献 [2–7] 研究了双理想集满足某些特殊条件的半群. 本文将刻画所有双理想都是素双理想的半群的特征和结构.

2 拟链

在下文中, 我们用 "带 $B = [Y; B_\alpha]$" 表示 "B 是一个最大半格分解为 $[Y; B_\alpha]$ 的带", 用 "矩形带 $B = I \times \Lambda$" 表示 "B 是一个矩形带", 且它是左零带 I 和右零带 Λ 的直积. 对半群 S 上的同余 ρ, 我们用 $\rho^\natural$ 表示由 ρ 导出的 S 到 S/ρ 上的自然同态.

设 S 是一个正则半群. 我们记 S 上的自然偏序为 $\leq$. 对任意的 $a, b \in S$, 用 $a < b$ 表示 "$a \leq b$ 但 $a \neq b$". S 上的同余 ρ 称为一个覆盖同余 (见文献 [8]), 如果 ρ 满足条件

$$(\forall a, b \in S) \qquad a\rho^\natural < b\rho^\natural \Longrightarrow a < b.$$

此时, 我们也称 S 是 ρ- 覆盖的. 带 $B = [Y; B_\alpha]$ 称为一个 N- 覆盖带 (见文献 [9]), 如果 B 上的最小半格同余 N 是一个覆盖同余.

引理 2.1[9] 带 B 是一个 N- 覆盖带当且仅当存在 N- 覆盖左正则带 $E = [Y; I_\alpha]$ 和 N- 覆盖右正则带 $F = [Y; \Lambda_\alpha]$ 使得 B 同构于 E 和 F 关于半格 Y 的织积 $E \times_Y F$.

注意到带 B 是一个正则带 (即满足恒等式 $efege = efge$ 的带) 当且仅当存在左正则带 $E = [Y; I_\alpha]$ 和右正则带 $F = [Y; \Lambda_\alpha]$, 使得 $B \cong E \times_Y F$ (见文献 [10]), 根据引理 2.1, 我们可以断定 N- 覆盖带都是正则带. 因为一个带上的最小半格同余就是其 Green 关系 $\mathcal{J}$, 所以 N- 覆盖带都是 $\mathcal{J}$- 覆盖完全正则半群 (见文献 [8]), 从而也是 $\mathcal{J}^*$- 覆盖正则半群 (见文献 [11]). 因此, 利用文献 [8, 定理 3.4] 或文献 [11, 定理 2.9] 可以得到 N- 覆盖带的如下结构定理:

引理 2.2 设 Y 是一个半格, $\{B_\alpha \,|\, \alpha \in Y\}$ 是一簇两两不相交的矩形带, 使得

$$(\forall \alpha, \beta \in Y) \qquad \alpha \neq \alpha\beta \neq \beta \Longrightarrow |B_{\alpha\beta}| = 1.$$

在集合 $B = \bigcup_{\alpha \in Y} B_\alpha$ 上定义乘法 $\diamond$ 如下：对任意的 $e \in B_\alpha$ 和 $f \in B_\beta$ $(\alpha, \beta \in Y)$,

$$e \diamond f = \begin{cases} e \text{ 和 } f \text{ 在 } B_\alpha \text{ 中的乘积}, & \text{如果 } \alpha = \beta, \\ e, & \text{如果 } \alpha < \beta, \\ f, & \text{如果 } \alpha > \beta, \\ B_{\alpha\beta} \text{ 中的唯一元素}, & \text{如果 } \alpha \neq \alpha\beta \neq \beta. \end{cases}$$

则 B 关于乘法 $\diamond$ 形成一个 N- 覆盖带. 反过来, 每个 N- 覆盖带都可以如此构造.

带 B 称为一个纯带 (见文献 [12]), 如果它满足条件

$$(\forall e, f \in B) \qquad (efe = e) \vee (fef = f).$$

引理 2.3 设 $B = [Y; B_\alpha]$ 是一个带, 则下列各款成立:

(1) B 是一个纯带当且仅当 Y 是一条链;

(2) B 是一个 N- 覆盖纯带当且仅当它满足条件

$$(\forall e, f \in B) \quad (efe = e) \vee (efe = f).$$

证明 文献 [12] 说明了 B 是一个纯带当且仅当 Y 是一条链. 下证 (2). 假定 B 是一个 N- 覆盖纯带, 则由 (1) 可知 Y 是一条链. 对任意的 $e \in B_\alpha$ 和 $f \in B_\beta(\alpha, \beta \in Y)$, 如果 $\alpha < \beta$, 则 $e < f$, 从而 $efe = e$; 如果 $\alpha = \beta$, 则 e 和 f 都是矩形带 B_α 的元素, 进而也有 $efe = e$; 如果 $\alpha > \beta$, 则 $f < e$, 从而 $efe = f$. 这就证明了 B 满足条件

$$(\forall e, f \in B) \quad (efe = e) \vee (efe = f).$$

反过来, 设 B 满足上述条件. 设 $e \in B_\alpha$, $f \in B_\beta$ $(\alpha, \beta \in Y)$, 则 efe 等于 e 或者 f, 而 fef 等于 f 或者 e. 由 efe 等于 e 或者 f 可以知道 $\alpha\beta$ 等于 α 或者 β, 即有 $\alpha \leq \beta$ 或者 $\alpha \geq \beta$, 从而 Y 是一条链. 当 $\alpha > \beta$ 时, 由于 efe 等于 e 或者 f, 而 $efe \in B_\beta$, 我们可以断定 $efe = f$, 即 $e > f$; 当 $\alpha < \beta$ 时, 由于 fef 等于 f 或者 e, 而 $fef \in B_\alpha$, 我们可以断定有 $fef = e$, 即 $e < f$. 这就证明了 B 是一个 N- 覆盖带.

带 B 称为一个 LR- 带, 如果它满足下面的条件

$$(\forall e, f \in B) \qquad (efe = ef) \vee (efe = fe).$$

文献 [13] 讨论了一类称作 LR- 正则带的特殊 LR- 带. 下面的引理给出了 LR- 带的一个刻画.

引理 2.4 带 $B = [Y; B_\alpha]$ 是一个 LR- 带当且仅当每个 B_α 都是左零带或者右零带.

证明 假定 B 是一个 LR- 带. 在 Y 中任取元素 α. 如果 B_α 既不是左零带也不是右零带, 则 $|I_\alpha|$ 和 $|\Lambda_\alpha|$ 都大于 1. 对 I_α 中的不同元素 i, j 和 Λ_α 的不同元素 λ, μ, 我们有

$$(i,\lambda)(j,\mu) \neq (i,\lambda)(j,\mu)(i,\lambda) \neq (j,\mu)(i,\lambda),$$

导致矛盾. 因此 B_α 都是一个左零带或者一个右零带.

反过来, 设每个 B_α 都是一个左零带或者一个右零带. 对任意的 $e \in B_\alpha$ 和 $f \in B_\beta$ $(\alpha, \beta \in Y)$, 如果 $B_{\alpha\beta}$ 是一个左 [右] 零带, 则 $B_{\alpha\beta} \cup \{e, f\}$ 是一个左 [右] 正则带, 从而 $efe = ef$ $[efe = fe]$. 这说明 B 是一个 LR- 带.

我们称带 B 为一个拟链, 如果 B 满足条件

$$(\forall e, f \in B) \qquad (ef = e) \vee (ef = f).$$

定理 2.5 带 B 是一个拟链当且仅当 B 是一个 N- 覆盖纯 LR- 带.

证明 令 $B = [Y; B_\alpha]$. 设 B 是一个 N- 覆盖纯 LR- 带, 则由引理 2.3 (1) 可知 Y 是一条链. 对任意的 $e \in B_\alpha$ 和 $f \in B_\beta$ $(\alpha, \beta \in Y)$, 我们有

$$ef = \begin{cases} e, & \text{如果 } \alpha = \beta \text{ 且 } B_\alpha \text{ 是一个左零带}, \\ f, & \text{如果 } \alpha = \beta \text{ 且 } B_\alpha \text{ 是一个右零带}, \\ e, & \text{如果 } \alpha < \beta, \\ f, & \text{如果 } \alpha > \beta, \end{cases}$$

从而 B 是一个拟链.

反过来, 假定 B 是一个拟链, 则对任意的 $e,f\in B$, 都有

$$efe=\begin{cases} e, & \text{如果 } ef=e,\\ e, & \text{如果 } ef=f \text{ 且 } fe=e,\\ f, & \text{如果 } ef=f \text{ 且 } fe=f.\end{cases}$$

根据引理 2.3, 我们可以断定 B 是一个 N- 覆盖纯带. 进一步地, 因为

$$(\forall\, e,f\in B)\qquad efe=\begin{cases} e=ef, & \text{如果 } ef=e,\\ fe, & \text{如果 } ef=f,\end{cases}$$

所以 B 也是一个 LR- 带. 证毕.

如果 B 是一个拟链且是一个左 [右] 正则带, 就称 B 为一个左 [右] 正则拟链. 根据引理 2.2, 引理 2.3, 引理 2.4 和定理 2.5, 我们可以得到:

推论 2.6 设 Y 是一条链, $\{B_\alpha\,|\,\alpha\in Y\}$ 是一簇两两不相交的矩形带且其中每个 B_α 都一个左零带或者右零带. 对任意的 $e\in B_\alpha$ 和 $f\in B_\beta$ $(\alpha,\beta\in Y)$, 在集合 $B=\bigcup_{\alpha\in Y}B_\alpha$ 上定义乘法 $\diamond$ 如下

$$e\diamond f=\begin{cases} e, & \text{如果 } B_\alpha=B_\beta \text{ 是一个左零带或者 } \alpha<\beta;\\ f, & \text{如果 } B_\alpha=B_\beta \text{ 是一个右零带或者 } \alpha>\beta,\end{cases}$$

则 B 关于乘法 $\diamond$ 形成一个拟链. 进一步地, B 是一个左 [右] 正则拟链当且仅当每个 B_α 都是一个左 [右] 零带. 反过来, 每个 [左或右正则] 拟链都可如此获得.

推论 2.7 带 B 是一个拟链当且仅当存在左正则拟链 $E=[Y;I_\alpha]$ 和右正则拟链 $F=[Y;\Lambda_\alpha]$, 满足条件

$$(\forall\,\alpha\in Y)\qquad \min\{|I_\alpha|,\,|\Lambda_\alpha|\}=1$$

使得 $B\cong E\times_Y F$.

3 双理想都是素双理想的半群

半群 S 称为一个内正则半群 (见文献 [14]), 如果它满足条件

$$(\forall\, a\in S)\,(\exists\, x,y\in S)\qquad a=xa^2y.$$

引理 3.1[14] 设 S 是一个半群, 则下列各项等价:

(1) S 是内正则的;

(2) S 上的最小半格同余恰为 S 上 Green 关系 $\mathcal{J}$;

(3) S 是单半群的半格.

引理 3.2[2] 设 S 是一个半群, 则 $\mathsf{SPB}(S)=\mathsf{B}(S)$ 当且仅当 S 既是正则的又是内正则的.

根据引理 3.1 和引理 3.2, 我们可以看出半群 S 满足条件 $\mathsf{SPB}(S)=\mathsf{B}(S)$ 当且仅当 S 是一个 $\mathcal{J}$- 相容的正则半群. 因此, 一般来说, $\mathsf{SPB}(S)$ 是 $\mathsf{B}(S)$ 的一个真子集. 但是, 任意完全正则半群 (特别是带) S 都满足条件 $\mathsf{SPB}(S)=\mathsf{B}(S)$.

注意到半群 S 的一簇双理想的非空交也是 S 的一个双理想, 对任意的 $a\in S$, 我们记 S 中所有包含 a 的双理想的交为 $B(a)$, 并称它为由 a 生成的主双理想 (见文献 [15]).

引理 3.3[15] 设 S 是一个半群, $a \in S$, 则 $B(a) = \{a\} \cup aS^1a$. 特别地, 如果 a 是一个正则元, 则 $B(a) = aSa$.

引理 3.4 设 S 是一个半群, $B \in \mathsf{B}(S)$, 则 $B \in \mathsf{PB}(S)$ 当且仅当 B 满足条件

$$(\forall\, a, b \in S) \qquad B(a)B(b) \subseteq B \Longrightarrow (a \in B) \vee (b \in B).$$

证明 由素双理想的定义可知必要性显然成立, 下证充分性. 假定 B 满足给定的条件, 并设 $C, D \in \mathsf{PB}(S)$, 使得 $CD \subseteq B$. 如果 $C \nsubseteq B$, 则存在 $c \in C$, 使得 $c \notin B$. 对任意的 $d \in D$, 因为 $B(c)B(d) \subseteq CD \subseteq B$, 我们有 $d \in B$. 这说明 $D \subseteq B$, 以致于 $B \in \mathsf{PB}(S)$. 证毕.

定理 3.5 设 S 是一个半群, 则下列各项等价:

(1) $\mathsf{PB}(S) = \mathsf{B}(S)$;

(2) 对任意的 $a, b \in S$, 都有 $a \in B(a)B(b)$ 或者 $b \in B(a)B(b)$;

(3) S 是一个幂等元形成一个拟链的纯整群并半群.

证明 (1)⇒(2) 假定 $\mathsf{PB}(S) = \mathsf{B}(S)$. 对任意的 $a, b \in S$, 因为 $B(a)B(b) \subseteq B(a)B(b)$, 根据引理 3.4, 我们可以断定 $a \in B(a)B(b)$ 或者 $b \in B(a)B(b)$.

(2)⇒(1) 假定 S 满足 (2). 对任意的 $B \in \mathsf{B}(S)$ 和 $a, b \in S$, 如果 $B(a)B(b) \subseteq B$, 则有 $a \in B$ 或者 $b \in B$. 由引理 3.4 可得 $B \in \mathsf{PB}(S)$, 从而 $\mathsf{PB}(S) = \mathsf{B}(S)$.

(2)⇒(3) 假定 S 满足 (2), 则 $\mathsf{PB}(S) = \mathsf{SPB}(S) = \mathsf{B}(S)$, 从而由引理 3.2 可知 S 是一个正则半群.

取 $e, f \in E(S)$, 则 $e \in B(e)B(f)$ 或者 $f \in B(e)B(f)$. 当 $e \in B(e)B(f)$ 时, 必存在 $x, y \in S$, 使得 $e = exefyf$, 以致于 $ef = exefyff = exefyf = e$; 当 $f \in B(e)B(f)$ 时, 必存在 $x, y \in S$, 使得 $f = exefyf$, 以致于 $ef = eexefyf = exefyf = f$. 因此 $E(S)$ 形成 S 的一个子半群, 且满足下列条件:

$$(\forall\, e, f \in E(S)) \qquad (ef = e) \vee (ef = f).$$

这就证明了 S 是一个幂等元形成一个拟链的纯整半群.

设 $E(S) = [Y; B_\alpha]$. 任取 S 中的元素 a, 并设 b 是 a 的一个逆元. 则 a, b, ab 和 ba 的 Green 关系可以用下图来描述

$$\begin{array}{c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{2}{c}{\mathcal{L}} \\ \cline{2-3} \mathcal{R} & e = ba & b \\ \cline{2-3} & a & f = ab \\ \cline{2-3} \end{array}$$

假定 $e \in B_\alpha$, $f \in B_\beta$ $(\alpha, \beta \in Y)$. 我们考虑下面的 6 种情形:

情形 1 $B_\alpha = B_\beta$ 是一个左零半群. 此时, 我们有 $f\mathcal{L}e\mathcal{L}a\mathcal{R}f$, 从而 a 是一个完全正则元.

情形 2 $B_\alpha = B_\beta$ 是一个右零半群. 此时, 我们有 $e\mathcal{L}a\mathcal{R}f\mathcal{R}e$, 从而 a也是一个完全正则元.

情形 3 $\alpha < \beta$ 且 $a \in B(b)B(a)$. 此时, 我们有 $e < f$ 且存在 $x, y \in S$, 使得 $a = bxbaya$. 由 $a = bxbaya$, 可以进一步得到

$$f = ab = bxbayab = bxbayf,$$

从而 $ef = ebxbayf = bxbayf = f$. 这与 $e < f$ 相矛盾. 因此这种情形是不可能出现的.

情形 4 $\alpha < \beta$ 且 $b \in B(b)B(a)$. 此时, 我们有 $e < f$ 且存在 $x, y \in S$, 使得 $b = bxbaya$. 由 $b = bxbaya$, 可以进一步得到

$$f = ab = abxbaya = fxbaya,$$

从而 $fe = fxbayae = fxbaya = f$. 这与 $e < f$ 相矛盾. 因此这种情形也是不可能出现的.

情形 5 $\alpha > \beta$ 且 $a \in B(a)B(b)$. 与情形 3 类似可证.

情形 6 $\alpha > \beta$ 且 $b \in B(a)B(b)$. 与情形 4 类似可证.

归纳上面的 6 种情形, 我们断定 a 一定是一个完全正则元. 这就证明了 S 是一个纯整群并且 $E(S)$ 形成一个拟链.

(3)⇒(2) 设 S 是一个幂等元形成一个拟链的纯整群并, 并假定 $[Y; B_\alpha]$ 和 $[Y; S_\alpha]$ 分别是 $E(S)$ 和 S 的最大半格分解, 则 Y 是一个链, 对任意的 $\alpha \in Y$, 我们有 $S_\alpha \cap E(S) = B_\alpha$. 对任意的 $a \in S$, 我们用 a^0 表示群 H_a 的恒等元, 用 a^{-1} 表示 a 在 H_a 中的逆元.

在 S 中任取元素 a 和 b, 则存在 $\alpha, \beta \in Y$, 使得 $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$. 如果 $B_\alpha = B_\beta$ 是一个右零带或者 $\alpha > \beta$, 则 $a^0b^0 = b^0$, 以致于

$$b = a^0a^0b^0bb^{-1}b = aa^{-1}a^{-1}abb^{-1}b \in (aSa)(bSb) = B(a)B(b).$$

如果 $B_\alpha = B_\beta$ 是一个左零带或者 $\alpha < \beta$, 则 $a^0b^0 = a^0$, 以致于

$$a = aa^{-1}aa^0b^0b^0 = aa^{-1}abb^{-1}b^{-1}b \in (aSa)(bSb) = B(a)B(b).$$

因此, S 满足 (2). 证毕.

推论 3.6 带 B 满足条件 $\mathsf{PB}(B) = \mathsf{B}(B)$ 当且仅当 B 是一个拟链.

参 考 文 献

[1] Howie J. M., Fundamentals of semigroup theory, London: Oxford University Press, 1995.
[2] Steinfeld O., Quasi-ideals in rings and regular semigroups, Budapest: Akademiai Kiado, 1978.
[3] Steinfeld O., On completely regular semigroups, *Semigroup Forum*, 1980, **21**: 93–94.
[4] Kuroki N., On normal semigroups, *Czechoslovak Math. J.*, 1977, **27**: 43–53.
[5] Kuroki N., On B^*-pure semigroups, *Acta Math. Hung.*, 1984, **43**(3/4): 295–298.
[6] Miccoli M. M., Bi-ideals in regular semigroups and in orthogroups, *Acta Math. Hung.*, 1986, **47**(1/2): 3–6.
[7] Kehayopulu N., Ponizovskii J. S., Tsingelis M., Bi-ideals in ordered semigroups and ordered groups, *J. Math. Sci.*, 2002, **112**(4): 4353–4354.
[8] He Y., Weakly $\mathcal{J}$-covered completely regular semigroups, *Semigroup Forum*, 2003, **66**: 97–109.
[9] He Y., γ-[weakly] covered orthodox semigroups, *Southeast Asian Bull. Math.*, 2005, **29**: 511–520.
[10] Petrich M., Introduction to semigroups, Columbus: Merrill, 1973.
[11] He Y., The construction of $\mathcal{J}^*$-covered regular semigroups (I), *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2005, **48**(2): 331–338.
[12] Cvetko-Vah K., Pure $\bigtriangledown$-band, *Semigroup Forum*, 2005, **71**: 93–101.
[13] Guo Y. Q., Shum K. P., Sen M. K., *LR*-normal orthogroups, *Sci. China Ser. A Math.*, 2005, **48**: 239–247.
[14] Petrich M., Inverse semigroups, New York: Jhon Wiley & Sons, 1984.
[15] Bogdanovic S., Semigroups with a system of subsemigroups, Novi Sad: Novi Sad University Press, 1985.