第49卷第5期　　数 学 学 报 中 文 版　　Vol.49, No.5
2006年9月　　ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series　　Sept., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)05-0985-04　　文献标识码: A

带有非中心不完全椭球约束的线性模型中线性估计的可容许性

鹿长余　吴鑑洪

华东师范大学统计系 上海 200062
E-mail: changyu_2000@yahoo.com; wjhstat1@yahoo.com.cn

陈学琴

宜春学院 宜春 336000

摘　要　本文研究了线性模型 $(Y, X\beta, \sigma^2 V, V \geq 0)$ 在非中心不完全椭球约束: $(\beta-\beta_0)'N(\beta-\beta_0) \leq \sigma^2$, $N \geq 0$ 下椭球中心 β_0 对线性估计的可容许性的影响, 证明了对于具有某种结构的 β_1 和 β_2, 线性模型 $(Y, X\beta, \sigma^2 V, V \geq 0)$ 在非中心不完全椭球约束: $(\beta-\beta_1)'N(\beta-\beta_1) \leq \sigma^2$, $N \geq 0$ 与非中心不完全椭球约束: $(\beta-\beta_2)'N(\beta-\beta_2) \leq \sigma^2$, $N \geq 0$ 下的可容许线性估计类是相同的.

关键词　可容许性; 椭球约束; 线性模型
MR(2000) 主题分类　62C15
中图分类　O212

Admissibility of Linear Estimator in Linear Models with Respect to an Incomplete Non-Central Ellipsoidal Restriction

Chang Yu LU　　Jian Hong WU

Department of Statistics, East China Normal University, Shanghai 200062, *P. R. China*
E-mail: changyu_2000@yahoo.com; wjhstat1@yahoo.com.cn

Xue Qin CHEN

Yichun University, Yichun 336000, *P. R. China*

Abstract　This paper studies the influence of β_0 which is the center of an ellipse to the admissibility of linear estimator in the situation of an incomplete non-central ellipsoidal restriction $(\beta-\beta_0)'N(\beta-\beta_0) \leq \sigma^2,\ N \geq 0$ in linear model $(Y, X\beta, \sigma^2 V, V \geq 0)$ .The results show that the class of admissible linear estimators with the incomplete non-central ellipsoidal restriction of $(\beta-\beta_1)'N(\beta-\beta_1) \leq \sigma^2,\ N \geq 0$ is the same as the one with the restriction of $(\beta-\beta_2)'N(\beta-\beta_2) \leq \sigma^2$, $N \geq 0$ for β_1 and β_2 with certain structure.

Keywords　admissibility; ellipsoidal restriction; linear model
MR(2000) Subject Classification　62C15
Chinese Library Classification　O212

收稿日期: 2004-03-17; 接受日期: 2004-12-21
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10471043)
鹿长余教授于 2005 年调到上海金融学院金融研究中心

设有线性模型

$$EY = X\beta, \quad \mathrm{Cov}\,(Y) = \sigma^2 V,$$

其中 Y 是 n 维向量, X 是 $n\times p$ 矩阵 (已知), V 是 $n\times n$ 已知的非负定矩阵. (β,σ^2) 为未知参数, 记此模型为 $(Y, X\beta,\, \sigma^2 V,\, V\geq 0)$. 我们研究当参数受如下非中心不完全椭球约束时的线性估计的可容许性 $H(N,\beta_0)=\{(\beta,\sigma^2):(\beta-\beta_0)'N(\beta-\beta_0)\leq\sigma^2\},\ N\geq 0,\ \beta_0$已知.

记 $\mathscr{L}\mathscr{H}=\{AY, A$ 为 $t\times n$ 矩阵 $\}$. 称 $R(S\beta,\,\sigma^2,d)=E(d-S\beta)'(d-S\beta)$ 为 $S\beta$ 的估计的风险. 若 d_1,d_2 是 $S\beta$ 的两个估计, 当 $R(S\beta,\,\sigma^2,d_2)-R(S\beta,\,\sigma^2,d_1)\geq 0,\ \forall\,(\beta,\sigma^2)\in H(N,\beta_0)$, 且存在 $(\beta_1,\sigma_1^2)\in H(N,\beta_0)$ 成立严格不等式时, 称在 $H(N,\beta_0)$ 下 d_1 优于 d_2. 用 $d\overset{\mathscr{L}}{\sim} g(\beta)[\Theta]$ 表示当参数 $(\beta,\sigma^2)\in\Theta$ 时, 在二次损失 $L(d,g(\beta))=\|d-g(\beta)\|$ 下, 在估计类 $\mathscr{L}$ 中, d 是 $g(\beta)$ 的可容许估计.

在一般 Gauss–Markov 模型 $(Y, X\beta,\, \sigma^2 V,\, V\geq 0)$ 中, 对于待估参数函数 $S\beta$, 记 $ALH(S,N,\beta_0)=\{AY: AY\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim} S\beta[H(N,\beta_0)]\}$. 对于给定的矩阵 A,B : $A',\mathrm{tr}\,A$, 分别表示 A 的转置、迹, $A\geq 0$ 表示 A 为非负定矩阵, $A-B\geq 0$ 表示 $A,B,A-B$ 均为非负定矩阵. 其他记号见文 [1,2]. 文 [3] 指出: 若 y 是一维随机变量, $Ey=\beta$, $Dy=\sigma^2$, $(\beta,\sigma^2)\in R\times R^+$, 则

$$ay\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}\beta[H(n,\beta_0)],\quad \beta_0\neq 0\Leftrightarrow 0\leq a\leq\frac{1}{1+\min(1,n)}.$$

事实上, 上述结果有误. 本文定理 4 表明 $ay\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}\beta[H(n,\beta_0)]$ 的充要条件不仅与 β_0 无关, 与 n 也无关, 只要 $\beta_0\neq 0,\ n\geq 0$ 即可. 推广到多维情形得到结果定理 1, 定理 2.

1 结果与证明

定理 1 在一般的 Gauss–Markov 模型 $(Y,X\beta,\sigma^2V,\, V\geq 0)$ 下, 若 $k\neq 0$, 则 $ALH(S,N,\beta_0)=ALH(S,N,k\beta_0)$.

证明 易知, 只须证命题: 在一般的 Gauss–Markov 模型 $(Y,X\beta,\,\sigma^2V,\,V\geq 0)$ 下, $k\neq 0$, 若 $AY\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}S\beta[H(N,k\beta_0)]$, 则$AY\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}S\beta[H(N,\beta_0)]$. 若存在 B, 使得 $\forall\,(\beta,\sigma^2)\in H(N,\beta_0)$, $R(S\beta,\sigma^2,BY)\leq R(S\beta,\sigma^2,AY)$, 即 $\forall\,(\beta,\sigma^2)\in H(N,\beta_0)$,

$$\sigma^2\mathrm{tr}\,BVB'+\beta'(BX-S)'(BX-S)\beta\leq\sigma^2\mathrm{tr}\,AVA'+\beta'(AX-S)'(AX-S)\beta,$$

从而 $\forall\,(\beta,\tau^2)\in R^p\times R^+$,

$$\begin{aligned}&\tau^2\mathrm{tr}\,BVB'+\mathrm{tr}\,BVB'(\beta-\beta_0)'N(\beta-\beta_0)+\beta'(BX-S)'(BX-S)\beta\\&\quad\leq\tau^2\mathrm{tr}\,AVA'+\mathrm{tr}\,AVA'(\beta-\beta_0)'N(\beta-\beta_0)+\beta'(AX-S)'(AX-S)\beta.\end{aligned}\tag{1}$$

由 (1) 式, 可得

$$\mathrm{tr}\,AVA'-\mathrm{tr}\,BVB'\geq 0,\tag{2}$$

$$\begin{aligned}&(\mathrm{tr}\,AVA'-\mathrm{tr}\,BVB')(\beta-\beta_0)'N(\beta-\beta_0)\\&\quad+\beta'[(AX-S)'(AX-S)-(BX-S)'(BX-S)]\beta\geq 0,\quad\forall\,\beta\in R^p,\end{aligned}\tag{3}$$

同时成立.

由 (3) 式可得, $k\neq 0$ 时

$$\begin{aligned}&(\mathrm{tr}\,AVA'-\mathrm{tr}\,BVB')(\beta-k\beta_0)'N(\beta-k\beta_0)\\&\quad+\beta'[(AX-S)'(AX-S)-(BX-S)'(BX-S)]\beta\geq 0,\quad\forall\,\beta\in R^p,\end{aligned}\tag{4}$$

即由 (2), (3) 式同时成立可得 (2), (4) 式同时成立.

而由 (2), (4) 式可得 $\forall(\beta,\tau^2)\in R^p\times R^+$,

$$\begin{aligned}&\tau^2\mathrm{tr}\,BVB'+\mathrm{tr}\,BVB'(\beta-k\beta_0)'N(\beta-k\beta_0)+\beta'(BX-S)'(BX-S)\beta\\&\quad\le\tau^2\mathrm{tr}\,AVA'+\mathrm{tr}\,AVA'(\beta-k\beta_0)'N(\beta-k\beta_0)+\beta'(AX-S)'(AX-S)\beta,\end{aligned}\tag{5}$$

故 $\forall(\beta,\sigma^2)\in H(N,k\beta_0)$, $k\neq0$,

$$\sigma^2\mathrm{tr}\,BVB'+\beta'(BX-S)'(BX-S)\beta\le\sigma^2\mathrm{tr}\,AVA'+\beta'(AX-S)'(AX-S)\beta.$$

而 $AY\overset{\mathscr{LH}}{\sim}S\beta[H(N,k\beta_0)]$, 故 $\forall(\beta,\sigma^2)\in H(N,k\beta_0)$, $k\neq0$,

$$\sigma^2\mathrm{tr}\,BVB'+\beta'(BX-S)'(BX-S)\beta\equiv\sigma^2\mathrm{tr}\,AVA'+\beta'(AX-S)'(AX-S)\beta.$$

从而 $\forall(\beta,\sigma^2)\in H(N,\beta_0)$,

$$\sigma^2\mathrm{tr}\,BVB'+\beta'(BX-S)'(BX-S)\beta\equiv\sigma^2\mathrm{tr}\,AVA'+\beta'(AX-S)'(AX-S)\beta.$$

这说明在 $H(N,\beta_0)$ 下不存在优于 AY 的齐次线性估计, 即 $AY\overset{\mathscr{LH}}{\sim}S\beta[H(N,\beta_0)]$.

定理 2 在一般的 Gauss–Markov 模型 $(Y,X\beta,\sigma^2V,V\ge0)$ 下, 若 $\mathbf{R}(M\vdots\beta_2)=\mathbf{R}(M\vdots\beta_1)$, 则 $ALH(S,N,\beta_2)=ALH(S,N,\beta_1)$, 其中 $\mathbf{R}(M\vdots\beta_i)$ 表示由矩阵 M 的列向量和 β_i 生成的线性空间, $i=1,2$ 且 M 满足 $NM=0$. 证明略.

定理 3 在一般的 Gauss–Markov 模型 $(Y,X\beta,\sigma^2V,V\ge0)$ 下, 设 $N-N_1\ge0$, $AY\overset{\mathscr{LH}}{\sim}S\beta[H(N,\beta_1)$, 则 $AY\overset{\mathscr{LH}}{\sim}S\beta[H(N_1,\beta_1)$.

证明 若存在 B 使得 $\forall(\beta,\sigma^2)\in H(N_1,\beta_1)$, $R(S\beta,\sigma^2,BY)\le R(S\beta,\sigma^2,AY)$, 即 $\forall(\beta,\sigma^2)\in H(N_1,\beta_1)$,

$$\sigma^2\mathrm{tr}\,BVB'+\beta'(BX-S)'(BX-S)\beta\le\sigma^2\mathrm{tr}\,AVA'+\beta'(AX-S)'(AX-S)\beta,$$

从而 $\forall(\beta,\tau^2)\in R^p\times R^+$,

$$\begin{aligned}&\tau^2\mathrm{tr}\,BVB'+\mathrm{tr}\,BVB'(\beta-\beta_1)'N_1(\beta-\beta_1)+\beta'(BX-S)'(BX-S)\beta\\&\quad\le\tau^2\mathrm{tr}\,AVA'+\mathrm{tr}\,AVA'(\beta-\beta_1)'N_1(\beta-\beta_1)+\beta'(AX-S)'(AX-S)\beta.\end{aligned}\tag{6}$$

由 (6) 式可得

$$\mathrm{tr}\,AVA'-\mathrm{tr}\,BVB'\ge0,\tag{7}$$

$$\begin{aligned}&(\mathrm{tr}\,AVA'-\mathrm{tr}\,BVB')(\beta-\beta_1)'N_1(\beta-\beta_1)\\&\quad+\beta'[(AX-S)'(AX-S)-(BX-S)'(BX-S)]\beta\ge0,\quad\forall\beta\in R^p,\end{aligned}\tag{8}$$

同时成立.

由于 $N-N_1\ge0$, 由 (7), (8) 式可得

$$\begin{aligned}&(\mathrm{tr}\,AVA'-\mathrm{tr}\,BVB')(\beta-\beta_1)'N(\beta-\beta_1)\\&\quad+\beta'[(AX-S)'(AX-S)-(BX-S)'(BX-S)]\beta\ge0,\quad\forall\beta\in R^p.\end{aligned}\tag{9}$$

而由 (7), (9) 式可得 $\forall(\beta,\tau^2)\in R^p\times R^+$,

$$\begin{aligned}&\tau^2\mathrm{tr}\,BVB'+\mathrm{tr}\,BVB'(\beta-\beta_1)'N(\beta-\beta_1)+\beta'(BX-S)'(BX-S)\beta\\&\quad\le\tau^2\mathrm{tr}\,AVA'+\mathrm{tr}\,AVA'(\beta-\beta_1)'N(\beta-\beta_1)+\beta'(AX-S)'(AX-S)\beta.\end{aligned}\tag{10}$$

故 $\forall(\beta,\sigma^2)\in H(N,\beta_1)$,

$$\sigma^2\mathrm{tr}\,BVB'+\beta'(BX-S)'(BX-S)\beta\le\sigma^2\mathrm{tr}\,AVA'+\beta'(AX-S)'(AX-S)\beta$$

而 $AY\overset{\mathscr{LH}}{\sim}S\beta[H(N,\beta_1)]$, 故 $\forall(\beta,\sigma^2)\in H(N,\beta_1)$,

$$\sigma^2\mathrm{tr}\,BVB'+\beta'(BX-S)'(BX-S)\beta\equiv\sigma^2\mathrm{tr}\,AVA'+\beta'(AX-S)'(AX-S)\beta,$$

从而 $\forall(\beta,\sigma^2)\in H(N_1,\beta_1)$,

$$\sigma^2\mathrm{tr}\,BVB'+\beta'(BX-S)'(BX-S)\beta\equiv\sigma^2\mathrm{tr}\,AVA'+\beta'(AX-S)'(AX-S)\beta.$$

这说明在 $H(N_1,\beta_1)$ 下不存在优于 AY 的齐次线性估计, 即 $AY\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}S\beta[H(N_1,\beta_1)]$.

定理 4 设 y 是一维随机变量, $EY=\beta$, $DY=\sigma^2$, $(\beta,\sigma^2)\in R\times R^+$, 则

(i) $ay\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}\beta[H(n,0)]\Leftrightarrow 0\le a\le\frac{1}{1+n}$;

(ii) $ay\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}\beta[H(n,\beta_0)]$, $\beta_0\ne 0\Leftrightarrow ay\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}\beta[H(0,0)]$.

证明 (i) 由文 [4] 可得.

(ii) 必要性. 由于 $n-0\ge 0$, 根据定理 3 可得 $ay\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}\beta[H(n,\beta_0)]\Rightarrow ay\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}\beta[H(0,\beta_0)]$, 即得 $ay\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}\beta[H(0,0)]$.

充分性. 设 $ay\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}\beta[H(0,0)]$, 由 (i) 得

$$0\le a\le 1.\tag{11}$$

假设 $ay\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}\beta[H(n,\beta_0)]$, $\beta_0\ne 0$ 不成立, 则存在 by, 使得 $E(by-\beta)^2\le E(ay-\beta)^2$, 即 $\forall(\beta,\sigma^2)\in H(n,\beta_0)$,

$$\sigma^2b^2+\beta^2(b-1)^2\le\sigma^2a^2+\beta^2(a-1)^2,\tag{12}$$

且至少对某一点 (β_1,σ_1^2) 成立严格不等式. 显然, 不妨可设 $b\ge 0$, 由 (12) 式可得 $\forall(\beta,\tau^2)\in R\times R^+$,

$$\tau^2b^2+[nb^2+(b-1)^2]\beta^2-2n\beta_0b^2\beta+n\beta_0^2b^2\le\tau^2a^2+[na^2+(a-1)^2]\beta^2-2n\beta_0a^2\beta+n\beta_0^2a^2,$$

故 $0\le b<a$, 不妨设 $b=ka$, $0\le k<1$. 令 $f(k,\beta)=\{na^2+(a-1)^2-[nk^2a^2+(ka-1)^2]\}\beta^2-2n\beta_0a^2(1-k^2)\beta+n\beta_0^2a^2(1-k^2)=A(k)\beta^2-2B(k)\beta+C(k)$, 其中

$$A(k)=na^2+(a-1)^2-[nk^2a^2+(ka-1)^2];\quad B(k)=n\beta_0a^2(1-k^2);\quad C(k)=n\beta_0^2a^2(1-k^2);$$

$$\Delta=B^2(k)-A(k)C(k)=na^3(1-k^2)(1-k)\beta_0^2[2-a(1+k)].$$

注意到, 存在 $k\in[0,1)$, 使 $f(k,\beta)\ge 0$, $\forall\beta\in R$, 即存在 $k\in[0,1)$, 使得 $\begin{cases}A(k)>0,\\ \Delta\le 0,\end{cases}$ 也即

$$\begin{cases}a(1+k)(n+1)-2>0,\\ 2-a(1+k).\end{cases}\tag{13}$$

(13) 式的解为 $k\ge\frac{2}{a}-1$.

因此必须有 $a>1$, 这与 (11) 式矛盾, 故不存在优于 ay 的齐次线性估计, 即证明了 $ay\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}\beta[H(n,\beta_0)]$, $\beta_0\ne 0$.

参 考 文 献

[1] Zhu X. H., Lu C. Y., Admissibility of linear estimator in linear models, *Chinese Annals of Mathematics*, 1987, **8A**(2): 220–226 (in Chinese).

[2] Lu C. Y., Admissibility of parameter estimator in linear models, *Chinese App. Probab. Statist.*, 2001, **2**: 203–211 (in Chinese).

[3] Lu C. Y., Li W. X., Admissibility of linear estimator in linear models with respect to an incomplete non-central ellipsoidal restriction, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1994, **37**(3): 289–295.

[4] Lu C. Y., Zhu X. H., Admissible linear estimation in linear models, *J. Northeastern Math.*, 1994, **10**(1): 40–50.

[5] Wu Q. G., Admissibility of linear estimates of regression coefficient in general Gauss–Markoff model, *Acta. Math. Appl. Sinica.*, 1986, **9**: 251–256.