第49卷第6期 数学学报中文版 Vol.49, No.6
2006年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Nov., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)06-1247-06 **文献标识码:** A

任意 Banach 空间中线性算子的 Moore–Penrose 度量广义逆

倪仁兴

绍兴文理学院数学系 浙江 绍兴 312000
E-mail: nrx64@yahoo.com.cn; renxingni1@yahoo.com.cn

摘　要　在无空间严格凸的几何假定下, 利用 Banach 空间几何方法给出了任意 Banach 空间中线性算子 T 的 Moore–Penrose 度量广义逆 T^+ 的存在性、唯一性、极小性和线性性的充要条件, 同时还讨论了 T^+ 的一些性质, 这些本质地将文献 [8] 的最近结果从严格凸 Banach 空间拓广至任意 Banach 空间.

关键词　线性算子; Moore–Penrose 度量广义逆; 广义正交分解
MR(2000) 主题分类　46B20, 47H04
中图分类　O177.2

Moore–Penrose Metric Generalized Inverse of Linear Opeartor in Arbitrary Banach Space

Ren Xing NI

Department of Mathematics of Shaoxing University, Shaoxing 312000, P. R. China
E-mail: nrx64@yahoo.com.cn; renxingni1@yahoo.com.cn

Abstract Without geometry assumption on strictly convex space, by means of methods of geometry of Banach space, the necessary and sufficient conditions for the existence, uniqueness, minimum property and linearity of the Moore–Penrose metric generalized inverse T^+ of linear operator T are given, and some properties of T^+ are investigated. These indeed extend and improve the corresponding recent results obtained by [8] from strictly convex Banach space to arbitrary Banach space.

Keywords linear operator; Moore–Penrose metric generalized inverse; generalized orthogonal decomposition
MR(2000) Subject Classification 46B20, 47H04
Chinese Library Classification O177.2

1 引言及预备

Banach 空间广义逆, Nashed 和 Votruba 作为值得研究的公开问题在文 [1] 中提出, 至八十年代初, 这方面的研究仅限于有限维本质严格凸空间的矩阵广义逆. 因 Banach 空间中度量广义逆一般是非线性的, 这与线性广义逆是相当不同的, 而线性广义逆问题已有许多作者 [1–3] 进行了讨论, 对 Banach 空间中有界线性算子或具闭值域的闭稠定线性算子的特殊单值度量广义逆及其

收稿日期: 2005-01-12; 接受日期: 2005-08-25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10271025); 浙江省自然科学基金资助项目 (102002)

应用已被王玉文等人 [4−6] 和 Holmes [7] 所研究, 2003 年, 文 [8] 中引入了 Banach 空间一般线性算子的 Moore–Penrose 度量广义逆的概念 (它是 Hilbert 空间中引入的线性 Moore–Penrose 广义逆的实质推广 (见文 [8, 注 2.1]), 并在 Banach 空间 X, Y 均严格凸的几何假定下研究了 Banach 空间中单值 Moore–Penrose 度量广义逆的存在性等问题.

本文的目的是在空间 X 和 Y 均无严格凸的假定下, 利用正规对偶映射和 Banach 空间几何方法给出任意 Banach 空间中线性算子 T 的 Moore–Penrose 度量广义逆 T^+ 的存在性、唯一性、极小性和线性性的充要条件, 同时还讨论了 T^+ 的一些性质, 这些本质地将王辉和王玉文的最近结果从严格凸 Banach 空间拓广至任意 Banach 空间.

若没有特别说明, 本文总设 X 和 Y 是 Banach 空间. D 是 X 的线性子空间, T 是从 D 到 Y 的一线性算子, D 称为 T 的定义域, 记为 $D(T)$. X 的正规对偶映射 $F_X : X \to 2^{X^*}$ 记为 $F_X(\cdot)$[6], $\langle x^*, x\rangle$ 表示泛函 $x^*(\in X^*)$ 在 $x(\in X)$ 上的值, 其中 X^* 是 X 的对偶空间. 用 $R(T), N(T)$ 分别表示算子 T 的值域和零空间.

定义 1[9] 设 $G \subset X$, 集值映射 $P_G : X \to 2^G$ 定义为

$$P_G(x) = \Big\{y \in G; \|y - x\| = \inf_{z\in G} \|z - x\|\Big\} \quad (x \in X),$$

称其为从 X 到 G 上的度量投影算子; 若 $\forall x \in X$, $P_G(x) \neq \emptyset$, 则称 G 为 X 中存在性集; 若 $\forall x \in X, P_G(x)$ 为单点集, 则称 G 为 X 中 Chebyshev 集.

$x_0 \in D(T)$ 称为算子方程 $Tx = y$ 的最佳逼近解, 如果 $\|Tx_0-y\| = \inf\{\|Tx-y\|; x \in D(T)\}$, $\|x_0\| = \inf\big\{\|v\|; v \in D(T), \|Tv-y\| = \inf_{x\in D(T)} \|Tx-y\|\big\}$, 其中 $y \in Y$.

定义 2[8] 设 T 是 $D(T)$ 到 Y 的一线性算子, $P_{\overline{N(T)}}(\cdot)$ 和 $P_{\overline{R(T)}}(\cdot)$ 存在. 若存在一齐性算子 $T^+ : Y \to X$, 使得 (I) $TT^+T = T$; (II) $T^+TT^+ = T^+$; (III) $T^+T = I_{D(T)} - P_{\overline{N(T)}}$; (IV) $TT^+ = P_{\overline{R(T)}}$,

则称 T^+ 是 T 的 Moore–Penrose 度量广义逆, 其中 $I_{D(T)}$ 是 $D(T)$ 上的恒等算子.

引理 1(见文 [5, 定理 3.2]) 设 G 为 X 中存在性子空间, 则 $\forall x \in X$, 有广义正交分解 $x = x_1 + x_2, x_1 \in G$, $x_2 \in F_X^{-1}(G^\perp)$, 此时记为 $X = G + F_X^{-1}(G^\perp)$; 如果 G 为 X 中 Chebyshev 子空间, 则分解唯一且 $x = P_Gx + x_2$, $x_2 \in F_X^{-1}(G^\perp)$, 此时记为 $X = G \oplus F_X^{-1}(G^\perp)$, 其中 $G^\perp = \{x^* \in X^*; \langle x^*, x\rangle = 0,\ \forall x \in G\}$, $F_X^{-1}(G^\perp) = \{x \in X; F_X(x) \cap G^\perp \neq \emptyset\}$.

下面的引理 2 可在文 [9] 中找到.

引理 2 设 G 为 X 的子空间, $\forall x \in X \setminus \overline{G}$, $x_0 \in G$, 则 $x_0 \in P_G(x) \Leftrightarrow F_X(x - x_0) \cap G^\perp \neq \emptyset$.

2 主要结果

定理 1 设 T 是从 $D(T)$ 到 Y 的一线性算子, $\overline{N(T)}$ 和 $\overline{R(T)}$ 分别是 X 和 Y 中 Chebyshev 子空间, 则 T 存在一 Moor–Penrose 度量广义逆 $T^+ \Leftrightarrow D(T) = N(T) \oplus C(T)$, 其中 $C(T) = \{x \in D(T); F_X(x) \cap N(T)^\perp \neq \emptyset\} = D(T) \cap F_X^{-1}(N(T)^\perp)$.

证明 “$\Rightarrow$” 若 T 有如定义 2 给出的一 Moore–Penrose 度量广义逆 T^+, 则 $\forall x \in D(T)$, 由定义 2 中的 (I), 有 $TT^+Tx = Tx$ 得 $T^+Tx \in D(T)$, 而由定义 2 中 (III), 有 $P_{\overline{N(T)}}x = x - T^+Tx \in D(T)$. 这样 $T(P_{\overline{N(T)}}x) = T(x - T^+Tx) = Tx - TT^+Tx = 0$, 即 $\forall x \in D(T)$, 有 $P_{\overline{N(T)}} \in D(T)$. 因 $\overline{N(T)}$ 是 X 中 Chebyshev 子空间和 $F_X^{-1}(\overline{N(T)}^\perp) = F_X^{-1}(N(T)^\perp)$, 则由引理 1, 有 $\forall x \in D(T) \subset X$, 存在唯一分解 $x = P_{\overline{N(T)}}x + x_2$, $x_2 \in F_X^{-1}(N(T)^\perp)$. 因此 $x_2 = x - P_{\overline{N(T)}}x \in D(T)$,

$x_2 \in D(T) \cap F_X^{-1}(N(T)^\perp) = C(T)$, 这样 $D(T) = N(T) + C(T)$. 而 $\forall x \in N(T) \cap C(T)$, 有 $F_X(x) \cap N(T)^\perp \neq \emptyset$, 令 $x^* \in F_X(x) \cap N(T)^\perp$, 则 $0 = \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2$, 这意指 $x = 0$, 因此 $D(T) = N(T) \oplus C(T)$.

"$\Leftarrow$" 先证 $T : C(T) \to R(T)$ 为双射. 事实上, $\forall y \in R(T)$, 则 $\exists x \in D(T)$, 使得 $y = Tx$, 而已知 $D(T) = N(T) \oplus C(T)$, 意味着 $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in N(T)$, $x_2 \in C(T)$, 因此 $y = Tx = Tx_2$, 即 T 是从 $C(T)$ 到 $R(T)$ 上的一满射; 而对 $\forall x_1, x_2 \in C(T)$, 若 $Tx_1 = Tx_2$, 则 $x_1 - x_2 \in N(T) \subset \overline{N(T)}$, 但由 $C(T)$ 的定义可得 $F_X(x_i) \cap N(T)^\perp \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$, 即 $F_X(x_1 - \theta) \cap \overline{N(T)}^\perp \neq \emptyset$, $F_X(x_1 - (x_1 - x_2)) \cap \overline{N(T)}^\perp \neq \emptyset$. 注意到 $\overline{N(T)}$ 是 X 中的子空间, 这样由引理 2, 有 $\theta \in P_{\overline{N(T)}}(x_1)$, $x_1 - x_2 \in P_{\overline{N(T)}}(x_1)$, 而已知 $\overline{N(T)}$ 是 X 中 Chebyshev 子空间, 故 $x_1 - x_2 = \theta$, 即 $x_1 = x_2$. 因此 T 是从 $C(T)$ 到 $R(T)$ 上的一单射.

令 $T\,|_{C(T)}$ 表示 T 在集合 $C(T)$ 上的限制. 因对偶映射 $F_X(\cdot)$ 是齐性的, 得集合 $C(T)$ 也是齐性的, $(T\,|_{C(T)})^{-1}$ 是从 $R(T)$ 到 $C(T)$ 的齐性算子. 记 $D^+ = R(T) \oplus F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$, 其中 $F_Y^{-1}(R(T)^\perp) = \{y \in Y;\, F_Y(y) \cap R(T)^\perp \neq \emptyset\}$. 这样, 由 $F_Y(\cdot)$ 的齐性可得 D^+ 也是齐性集. 定义算子 $T^+ : D^+ \to C(T)$ 如下: $\forall y \in D^+, y$ 有唯一分解 $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in R(T)$, $y_2 \in F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$, 定义

$$T^+ y = (T\,|_{C(T)})^{-1} y_1, \tag{1}$$

则由 $y - y_1 = y_2 \in F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$, 得 $F_Y(y - y_1) \cap \overline{R(T)}^\perp \neq \emptyset$, 从而由引理 2 知 $y_1 \in P_{\overline{R(T)}} y$, 而已知 $\overline{R(T)}$ 是 Y 中的 Chebyshev 子空间, 则由引理 1, y 有唯一分解式 $y = P_{\overline{R(T)}} y + y'$, $y' \in F_Y^{-1}(\overline{R(T)}^\perp) = F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$, 这样由分解式的唯一性, 有

$$y_1 = P_{\overline{R(T)}} y \in R(T). \tag{2}$$

综合 (1) 和 (2), 得

$$T^+ y = (T\,|_{C(T)})^{-1} P_{\overline{R(T)}} y, \quad \forall y \in D^+. \tag{3}$$

由 $(T\,|_{C(T)})^{-1}$ 和 $P_{\overline{R(T)}}(\cdot)$ (见文 [10]) 的齐性得 $T^+ : D^+ \to C(T)$ 是齐性算子. 而 $\forall y \in D^+$, 由 (2) 式得 $TT^+ y = T(T\,|_{C(T)})^{-1} P_{\overline{R(T)}} y = P_{\overline{R(T)}} y$, 即在 D^+ 上有 $TT^+ = P_{\overline{R(T)}}$, 因此定义 2 中的 (IV) 成立.

由已知 $D(T) = N(T) \oplus C(T)$, 则 $\forall x \in D(T)$, x 有一唯一分解 $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in N(T)$, $x_2 \in C(T)$, 其中 $C(T) = D(T) \cap F_X^{-1}(N(T)^\perp) \subset F_X^{-1}(N(T)^\perp)$, 而已知 $\overline{N(T)}$ 是 X 中 Chebyshev 子空间. 由引理 1, x 又有唯一分解: $x = P_{\overline{N(T)}} x + x'$, 其中 $x' \in F_X^{-1}(\overline{N(T)}^\perp) = F_X^{-1}(N(T)^\perp)$. 由分解式的唯一性得 $x_1 = P_{\overline{N(T)}} x \in N(T)$, 从而 $x = P_{\overline{N(T)}} x + x_2$, $x_2 \in C(T)$ 和

$$T^+ Tx = T^+ T(P_{\overline{N(T)}} x + x_2) = T^+ Tx_2 = (T\,|_{C(T)})^{-1} P_{\overline{R(T)}}(Tx_2) = x_2 = (I_{D(T)} - P_{\overline{N(T)}})x, \tag{4}$$

即在 $D(T)$ 上, 有 $T^+ T = I_{D(T)} - P_{\overline{N(T)}}$, 这样定义 2 中 (III) 成立. 而 $\forall x \in D(T)$, $TT^+ Tx = Tx - T(P_{\overline{N(T)}} x) = Tx - Tx_1 = Tx$, 故定义 2 中的 (I) 成立.

对 $\forall y \in D^+$, 由 (3) 式, $T^+ y \in C(T) \subset D(T)$, 则由 (4) 式得

$$T^+ TT^+ y = (I_{D(T)} - P_{\overline{N(T)}}) T^+ y = T^+ y - P_{\overline{N(T)}}(T^+ y). \tag{5}$$

因 $T^+ y \in C(T) \subset F_X^{-1}(\overline{N(T)}^\perp)$, 有 $F_X(T^+ y - \theta) \cap \overline{N(T)}^\perp \neq \emptyset$. 因 $\theta \in \overline{N(T)}$, 这样, 由引理 2 得 $\theta \in P_{\overline{N(T)}}(T^+ y)$. 注意到 $\overline{N(T)}$ 是 X 中 Chebyshev 子空间, 有 $\theta = P_{\overline{N(T)}}(T^+ y)$. 这样, (5) 式表明在 D^+ 上 $T^+ TT^+ = T^+$ 成立, 即定义 2 中的 (II) 成立, 故 T^+ 是 T 的 Moore–Penrose 度量广义逆.

推论 1 设 $T:D(T)\to Y$ 为一线性算子, $N(T)$ 和 $R(T)$ 分别是 $D(T)$ 和 Y 中 Chebyshev 子空间, 则 T 的 Moore–Penrese 度量广义逆 T^+ 存在且 $D^+=Y$.

证明 因 $N(T)$ 是 $D(T)$ 中 Chebyshev 子空间, 则由引理 1 得 $D(T)=N(T)\oplus C(T)$, 其中 $C(T)=D(T)\cap F_X^{-1}(N(T)^\perp)$, 注意到 Chebyshev 集必是闭集, 故 $\overline{N(T)}=N(T),\overline{R(T)}=R(T)$, 这样由定理 1, T 存在 Moore–Penrose 度量广义逆 T^+.

此外, 由定理 1 的证明过程, 我们有 $D^+=R(T)\oplus F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$, 而据题设 $R(T)$ 是 Y 中 Chebyshev 子空间, 由引理 1 可得 $Y=R(T)\oplus F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$, 故 $D^+=Y$.

由上述推论 1 易得文 [6] 中主要结果:

推论 2[6] 设 X,Y 是自反严格凸 Banach 空间, T 是从 $D(T)$ 到 Y 的有界线性算子或闭稠定线性算子, 则 T 存在 Moore–Penrese 度量广义逆, 而且若 $R(T)$ 又是 Y 中闭集, 则 $D^+=Y$.

利用定理 1, 与文 [8] 中的定理 3.1 和定理 3.2 相应的类似地证明可得如下两结果:

定理 2 设 T 是从 $D(T)$ 到 Y 的一线性算子, $\overline{N(T)}$ 和 $\overline{R(T)}$ 分别是 X 和 Y 中 Chebyshev 子空间. 若 T 有 Moore–Penrose 度量广义逆 T^+, 则 T^+ 在 D^+ 上是唯一的, $T^+y=(T\mid_{C(T)})^{-1}P_{\overline{R(T)}}y$, $y\in D^+$, 其中 $D^+=R(T)\oplus F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$.

定理 3 设 T 是从 $D(T)$ 到 Y 的一线性算子, $\overline{N(T)}$ 和 $\overline{R(T)}$ 分别是 X 和 Y 中 Chebyshev 子空间, $D^+=R(T)\oplus F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$, 设 T^+ 是从 D^+ 到 $D(T)$ 的一齐性算子, 记

(1) T^+ 是 T 的 Moore–Penrose 度量广义逆;

(2) $\forall\, y\in D^+$, $x_0=T^+y$ 是算子方程 $Tx=y$ 的最佳逼近解;

(3) $\forall\, y\in D^+$, $x_0{=}T^+y$ 是度量投影方程$Tx{=}P_{\overline{R(T)}}y$的极小范数解, 即 $T^+y{=}P_{T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y}(\theta)$,

则 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3); 若 X 又是严格凸的, $D(T)=N(T)\oplus C(T)$, 其中 $C(T)=D(T)\cap F_X^{-1}(N(T)^\perp)$, 则有 (3) $\Rightarrow$ (1), 这时 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3).

注 1 定理 1– 定理 3 去掉了文 [8] 中定理 2.1, 定理 3.1 和定理 3.2 空间 X 和 Y 均须严格凸的几何假定条件. 值得指出的是我们的定理 1 的证明方法与文 [8] 中定理 2.1 是不同的.

下面给出 T^+ 的一个等价表达式.

定理 4 设 T 是从 $D(T)$ 到 Y 的一线性算子, $N(T)$ 和 $\overline{R(T)}$ 分别是 X 和 Y 中 Chebyshev 子空间, 则 $T^+=(I_{D(T)}-P_{N(T)})T^{-1}P_{\overline{R(T)}}$.

证明 由推论 1 知 T 的 Moore–Penrose 度量广义逆 T^+ 存在, 这样由定理 3 中 (1) $\Rightarrow$ (3), 只须证: $\forall\, y\in D^+$, $P_{T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y}(\theta)=(I_{D(T)}-P_{N(T)})T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y$.

事实上, $\forall\, x\in P_{T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y}(\theta)$, 则有

$$\forall\, x\in T^{-1}P_{\overline{R(T)}}(y)\ \ \text{且}\ \ \|x\|=\inf\left\{\|\omega\|;\,\omega\in T^{-1}P_{\overline{R(T)}}(y)\right\}. \tag{6}$$

注意到 $N(T)$ 是 X 中存在性子空间, 则由引理 1, 有分解式

$$x=x_1+x_2, \tag{7}$$

其中 $x_1\in P_{N(T)}(x)$, $x_2\in F_X^{-1}(N(T)^\perp)$. 这样 $Tx_2=T(x-x_1)=Tx\in P_{\overline{R(T)}}y$, 得 $x_2\in T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y\subset D(T)$.

下证:$-x_1\in P_{N(T)}(x_2)$.

因 $x_1\in N(T)$, 故 $-x_1\in N(T)$, 从而 $\forall\, v\in N(T)$, 有 $T(x_2-v)=Tx_2\in P_{\overline{R(T)}}y$, 得

$$x_2-v\in T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y. \tag{8}$$

由 (6)–(8) 式, 有 $\|x_2-(-x_1)\|=\|x_2+x_1\|=\|x\|\le\|x_2-v\|$, $\forall\, v\in N(T)$. 再由 $P_{N(T)}(\cdot)$ 的定义, 有 $-x_1\in P_{N(T)}(x_2)$, $x=x_2+x_1=x_2-(-x_1)\in(I_{D(T)}-P_{N(T)})(x_2)\subset(I_{D(T)}-$

$P_{N(T)})T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y$, 于是

$$P_{T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y}(\theta) \subset (I_{D(T)} - P_{N(T)})T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y \quad (\forall y \in D^+). \tag{9}$$

反之, $\forall \bar{x} \in (I_{D(T)} - P_{N(T)})T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y$ $(y \in D^+)$, 若 $\bar{x} = \theta$, 则明显有 $\bar{x} \in P_{T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y}(\theta)$ 成立, 故可设 $\bar{x} \neq \theta$, 则 $\exists x' \in T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y$, 使得 $\bar{x} \in (I_{D(T)} - P_{N(T)})(x')$, 从而 $\exists x'' \in P_{N(T)}(x')$, 使得 $\bar{x} = x' - x''$. 于是由 $x'' \in N(T)$ 知 $T\bar{x} = Tx' \in P_{\overline{R(T)}}y$, 因此 $\bar{x} \in T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y$.

下证 $\bar{x} \in P_{T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y}(\theta)$.

因 $\forall v \in N(T)$, 记 $\omega = x'' + v$, 则由 $N(T)$ 的线性性得 $\omega \in N(T)$. 又 $x'' \in P_{N(T)}(x')$, 有 $\|\bar{x} - \theta\| = \|x' - x''\| \leq \|x' - \omega\| = \|x' - x'' - v\| = \|\bar{x} - v\|$. 由 $\theta \in N(T)$ 及 $v \in N(T)$ 的任意性得 $\theta \in P_{N(T)}(\bar{x})$, 这样由引理 2, 有 $F_X(\bar{x} - \theta) \cap N(T)^\perp \neq \emptyset$. 取 $\bar{x^*} \in F_X(\bar{x}) \cap N(T)^\perp$, 则 $\|\bar{x^*}\| = \|\bar{x}\|$ 且 $\|\bar{x}\|^2 = \|\bar{x^*}\|^2 = \langle \bar{x^*}, \bar{x} \rangle$. 任取 $x \in T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y$, 由 $\overline{R(T)}$ 是 Y 中 Chebyshev 子空间, 有 $Tx = P_{\overline{R(T)}}y$. 又 $T\bar{x} = P_{\overline{R(T)}}y$, 于是 $x - \bar{x} \in N(T)$, 记 $x_0 = x - \bar{x}$, 则 $x = \bar{x} + x_0$, $x_0 \in N(T)$. 注意到 $\bar{x^*} \in F_X(\bar{x}) \cap N(T)^\perp$, 有 $\|\bar{x}\|^2 = \langle \bar{x^*}, \bar{x} \rangle = \langle \bar{x^*}, \bar{x} + x_0 \rangle = \langle \bar{x^*}, x \rangle \leq \|\bar{x^*}\| \cdot \|x\| = \|\bar{x}\| \cdot \|x\|$. 因此 $\|\bar{x}\| \leq \|x\|$, $\forall x \in T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y$, 于是 $\bar{x} \in P_{T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y}(\theta)$, 故

$$P_{T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y}(\theta) \supset (I_{D(T)} - P_{N(T)})T^{-1}P_{\overline{R(T)}}y \quad (\forall y \in D^+). \tag{10}$$

综合 (9), (10) 式, 定理 4 得证.

因 T^+ 一般为非线性算子, 于是讨论 T^+ 为线性算子的条件是一个重要和有意义的问题.

定理 5　设 T 是从 $D(T)$ 到 Y 的一线性算子, $\overline{N(T)}$ 和 $\overline{R(T)}$ 分别是 X 和 Y 中 Chebyshev 子空间, 若算子 T 的 Moore–Penrose 度量广义逆 T^+ 存在, 则 T^+ 是线性算子 $\Leftrightarrow C(T) = D(T) \cap F_X^{-1}(N(T)^\perp)$ 和 $F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$ 分别是 X 和 Y 中线性子空间.

证明　"$\Rightarrow$" 若 T^+ 是线性算子, 则其值域 $R(T^+) = C(T)$ 必是 X 中的线性子空间. 下证 $N(T^+) = F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$. 事实上, 由 T^+ 的线性性得 $N(T^+)$ 是线性的, 而由定理 2 有 $T^+ = (T\mid_{C(T)})^{-1}P_{\overline{R(T)}}$, 其中 $T\mid_{C(T)}$ 是从 $C(T)$ 到 $R(T)$ 的一双射. 因此

$$N(T^+) = \{y \in D^+; P_{\overline{(R(T))}}y = 0\} \triangleq P^{-1}_{\overline{R(T)}}(0). \tag{11}$$

这样, $\forall y \in F_Y^{-1}(R(T)^\perp) = F_Y^{-1}(\overline{R(T)}^\perp)$, 有 $F_Y(y) \cap \overline{R(T)}^\perp \neq \emptyset$, 则由引理 2 得 $0 \in P_{\overline{R(T)}}y$. 而已知 $\overline{R(T)}$ 是 Y 中的 Chebyshev 子空间, 有 $0 = P_{\overline{R(T)}}y$. 因此, 由 (11) 式得 $y \in N(T^+)$, 故

$$F_Y^{-1}(R(T)^\perp) \subset N(T^+). \tag{12}$$

而若 $\forall y \in N(T^+)$, 则由 (11) 式得 $P_{\overline{R(T)}}y = 0$. 据题设 $\overline{R(T)}$ 是 Y 中 Chebyshev 子空间, 则由引理 1, y 有唯一分解 $y = P_{\overline{R(T)}}y + y_2, y_2 \in F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$. 因此, $y = y_2 \in F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$, 得

$$F_Y^{-1}(R(T)^\perp) \supset N(T^+). \tag{13}$$

综合 (12) 和 (13) 式, 有 $F_Y^{-1}(R(T)^\perp) = N(T^+)$, 这样由 $N(T^+)$ 的线性性可得 $F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$ 是线性子空间.

"$\Leftarrow$" 设 $C(T)$ 和 $F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$ 是线性子空间, 则 $T\mid_{C(T)}$ 是从 $C(T)$ 到 $R(T)$ 上的一一对一的线性算子, 从而 $(T\mid_{C(T)})^{-1}$ 也是从 $R(T)$ 到 $C(T)$ 上的一一对一的线性算子, $D^+ = R(T) \oplus F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$ 是 Y 中线性子空间. 而 $\forall y \in D^+, y$ 有一唯一分解 $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in R(T)$, $y_2 \in F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$. 因此 $y - y_1 = y_2 \in F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$, 得 $F_Y(y - y_1) \cap \overline{R(T)}^\perp \neq \emptyset$. 这样由引理 2 得 $y_1 \in P_{\overline{R(T)}}y$. 而已知 $\overline{R(T)}$ 是 Y 中 Chebyshev 子空间, 得 $y_1 = P_{\overline{R(T)}}y \in R(T)$. 这样, 由 (11) 式和 $F_Y^{-1}(R(T)^\perp) = N(T^+)$, 有 $P^{-1}_{\overline{R(T)}}(0) = F_Y^{-1}(R(T)^\perp) = N(T^+)$. 因此 $P^{-1}_{\overline{R(T)}}(0)$ 是 Y 中线性子

空间, 而 $\overline{R(T)}$ 是 Y 中 Chebyshev 子空间. 这样由文 [10] 中命题 4.7 意指 $P_{\overline{R(T)}}(\cdot): D^+ \to R(T)$ 是一线性算子, 从而由定理 2 得 $T^+ = (T\mid_{C(T)})^{-1}P_{\overline{R(T)}}$ 是从 D^+ 到 $C(T)$ 的一线性算子.

注 2 定理 5 将文 [8] 中的定理 4.2 的条件从假设 X 和 Y 均是自反、严格凸和有 H 性质的 Banach 空间减弱到只需 $\overline{N(T)}$ 和 $\overline{R(T)}$ 分别是 Banach 空间 X 和 Y 中的 Chebyshev 子空间, 注意到自反严格凸 Banach 空间中的闭子空间必是 Chebyshev 子空间, 反之未必 [9]. 因此, 我们的推广和改进是本质的.

推论 3 设 X 和 Y 是 Hilbert 空间, T 是从 $D(T)$ 到 Y 的一有界线性算子或闭稠定线性算子, 若 $R(T)$ 是 Y 中闭集, 则存在一唯一有界线性算子 $T^+: Y \to X$ 满足: (I) $TT^+T = T$; (II) $T^+TT^+ = T^+$; (III) $T^+T = I_{D(T)} - P_{N(T)}$; (IV) $TT^+ = I - P_{N(T^*)}$, 其中 $P_{N(T)}, P_{N(T^*)}$ 是正交投影算子.

证明 由 $R(T)$ 是 Y 中的闭子空间, 利用 Riesz 正交分解定理有 $I = P_{R(T)} + P_{R(T)^\perp}$, 据 Banach 闭值域定理有 $R(T)^\perp = N(T^*)$, 故 $P_{R(T)} = I - P_{N(T^*)}$, 其余利用推论 1, 定理 5 和文 [6] 中定理 2.11 即可得证.

注 3 定理 1–3 和定理 5 是文 [8] 中相应结果的本质推广. 举例如下: 设 $X = Y = (C[0,1];\ \|f\| = \max_{t\in[0,1]}|f(t)|)$, 则 X 和 Y 是非自反且不严格凸的 Banach 空间 [11]. 令 $C_0^1[0,1] = \{f; f(t)$ 是 $[0,1]$ 上有实值连续导函数的函数且 $f(0) = 0\}$, 定义 $T: C_0^1[0,1](\subset X) \to Y$, $(Tf)(t) = f'(t)$ $(\forall f \in C_0^1[0,1])$. 取 $f_n(t) = \frac{1-e^{-nt}}{n}$, 有 $\{f_n\} \subset C_0^1[0,1](\subset X)$, 且 $\lim_{n\to+\infty}\|f_n - 0\| = 0$. 但 $\lim_{n\to+\infty}\|Tf_n - 0\| \neq 0$, 从而 T 是无界的线性算子. 与文 [11] 一样可证 T 是闭算子. 由闭图象定理易见 $C_0^1[0,1]$ 是 $C[0,1](=X)$ 中不闭的线性子空间. 因 $N(T) = \{f \in C_0^1[0,1]; (Tf)(t) = 0,\ \forall t \in [0,1]\} = \{f \in C_0^1[0,1]; f(t) \equiv C$ 常数, $\forall t \in [0,1]\} = \{0\}$, $\overline{R(T)} = C[0,1]$, 明显地, 有 $\overline{N(T)}(=\{0\})$ 和 $\overline{R(T)}(=C[0,1])$ 分别是 $C[0,1](=X)$ 和 $C[0,1](=Y)$ 中 Chebyshev 子空间, T 有 Moore–Penrose 度量广义逆 T^+ 如下

$$(T^+f)(t) = \int_0^t f(t)dt, \quad (\forall f \in C[0,1]).$$

参 考 文 献

[1] Nashed M. Z., Votruba G. F., A unified approach to generalized inverse of linear operater: extremal and proximal properties, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1974, **80**: 831–835.

[2] Nashed M. Z., Chen X., Convergence of Newton-like method for singular equations using outer inverse, *Number. Math.*, 1993, **66**: 235–257.

[3] Ma J. P., Rank theorems of operators between Banach space, *Science in China, Series A*, 2000, **43**(1): 1–5.

[4] Wang Y. W., Ji D. Q., The Tseng-Metric generalized inver of linear operator in Banach spaces, *J. Sys. Sci. and Math. Sci.*, 2000, **20**(2): 203–209 (in Chinese).

[5] Wang Y. W., Wang H., Generalized orthogonal decomposition theorem in Banach spaces and generalized orthogonalcomplemented subspace, *Acta Math. Sinica, Chinese Series*, 2001, **44**(6): 1045–1050.

[6] Wang Y. W., Li Z. W., The Moore–Penrose generalized inverse in Banach space and ill-posed problem, *J. Sys. Sci. and Math. Sci.*, 1995, **15**(2): 175–185 (in Chinese).

[7] Holmes R. B., A course on optimization and best approximation (Lecture Notes 257), New York: Springer-Verlag, 1972.

[8] Wang H., Wang Y. W., Metric generalized inverse of linear operator in Banach space, *Chin. Ann. Math.*, 2003, **24B**(4): 509–520.

[9] Xu S. Y., Li C., Yang W. S., Non-linear approximation theory in Banach spaces, Beijing: Science Press, 1998 (in Chinese).

[10] Singer I., The theory of best approximation and functional analysis, New York: Springer-Verlag, 1970.

[11] Megginson R. E., An introduction to Banach space theory, New York: Springer-Verlag, 2003.