第49卷第6期 数学学报中文版 Vol.49, No.6
2006年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Nov., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)06-1397-06 **文献标识码: A**

单位球面上的等距及 $(\lambda,\psi,2)$- 等距映射的延拓

杨秀忠

河北师范大学数学系 石家庄 050016
E-mail: yangxiuzhong@eyou.com

摘 要 本文得到了赋 β- 范空间 $(0<\beta\leq 1)$ 的单位球面 (或球) 上的等距映射可以延拓为全空间上的线性等距映射的一些充分条件, 然后在赋 β- 范线性空间 E 中研究 $(\lambda,\psi,2)$- 等距映射的延拓问题, 主要结果为: 正齐性映射 $V_0: B_1(E)\to B_1(E)$ 是 $(1,\psi,2)$- 等距的充要条件为 $\|V_0x\|\geq\|x\|$, $\forall\, x\in B_1(E)$, 推广了 Zhang L. 的相应结果.

关键词 等距映射; 等距延拓; Tingley 问题
MR(2000) 主题分类 46B20, 46A16
中图分类 O177.2

Extension of Isometries and $(\lambda,\psi,2)$-Isometries on the Unit Spheres

Xiu Zhong YANG

Department of Mathematics, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016*, P. R. China*
E-mail: yangxiuzhong@eyou.com

Abstract We first obtain some sufficient conditions for an isometric mapping defined on the unit sphere (or ball) of a β-normed space $(0<\beta\leq 1)$ can be extended to be a linear isometry on the whole space. Secondly, in a β-normed space E, we study the extension problem of $(\lambda,\psi,2)$-isometry. The main result says that positively homogeneous mapping $V_0: B_1(E)\to B_1(E)$ is $(1,\psi,2)$-isometry if and only if $\|V_0x\|\geq\|x\|$, $\forall\, x\in B_1(E)$, hence this result generalizes the corresponding result in Zhang L.

Keywords isometry; extension of isometry; Tingley problem
MR(2000) Subject Classification 46B20, 46A16
Chinese Library Classification O177.2

1 引言及术语

Tingley 在文 [1] 中提出如下问题, 设 E,F 是实赋范线性空间, $S_1(E)$ 和 $S_1(F)$ 是各自的单位球面. 若 $V: S_1(E)\to S_1(F)$ 是一个满等距映射 (即 $V(S_1(E))=S_1(F)$ 且对于 $\forall\, x_1,x_2\in S_1(E)$, 都有 $\|Vx_1-Vx_2\|=\|x_1-x_2\|$), 问 V 能否延拓为 E 到 F 上的线性 (或仿线性) 映射.

迄今为止, 对于同类型的经典空间的线性延拓问题都得到了肯定的回答, 文 [2] 综述了上述问题的研究现状. 在文 [3] 中, 首次对两种不同类型的实赋范空间 E 和 $C(\Omega)$ 进行研究, 得到如

收稿日期: 2005-04-20; 修改日期: 2005-09-05; 接受日期: 2005-12-20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10571090); 高校博士点基金资助项目 (20010055013)

下结果：

若实赋范空间 E 和满等距映射 $V_0: S_1(E)\to C(\Omega)$ 满足条件：

(A) $S_1(E)$ 的光滑点在 $S_1(E)$ 中稠密, 且对任意 $x\in S_1(E)$ 及 $S_1(E)$ 中任意光滑点 x_0,都有

$$\|V_0x-|\lambda|V_0x_0\|\le\|x-|\lambda|x_0\|,\quad \forall\,\lambda\in\mathbf{R},$$

则 V_0 可延拓为全空间上的实线性映射.

在研究不同类型的实赋范空间的单位球面等距延拓问题时, 以上的不等式是重要的, 参见文献 [3–8], 能否用更弱的其他的条件来代替它还是待解决的问题. 最新的进展参阅文 [9–11].

研究非满等距的线性延拓问题是很活跃的一个新课题, 即使是有限维的同类空间, 非满意义下的 “Tingley 问题” 也不一定成立, 参见文 [12] 中的反例.

文 [13] 中考虑了 2- 等距的延拓问题, 得到了一些结果. 而本文则

(1) 试图利用单位球面的几何性质来研究更一般的线性延拓问题: 设 $V: S_1(E)\to F$ 是一个等距映射, 问 V 能否延拓为 E 上的线性 (或仿线性) 映射? 一般是不对的, 反例见 [12]. 本文给出了一些充分条件, 用构造的方法得到延拓映射.

(2) 推广了 2- 等距的概念, 定义了 $(\lambda,\psi,2)$- 等距和弱 $(\lambda,\psi,2)$- 等距, 研究了它们的延拓问题及其与等距映射的关系, 得到一些新结果. 我们的术语是标准的, $S_r(E)=\{x: x\in E,\ \|x\|{=}r\}$, $B_r(E)=\{x: x\in E,\ \|x\|\le r\}$, 赋 β- 范线性空间的定义及性质可参考文 [15, 16].

2 单位球面 (或球) 上的等距映射的线性扩张

定理 2.1 设 E,F 是赋 β- 范线性空间, $0<\beta\le 1$. 等距映射 $V_0: B_1(E)\to F$ 为可加映射, 即 $\forall\, x,y\in B_1(E),\ x+y\in B_1(E)$, 有 $V_0(x+y)=V_0x+V_0y$, 则 V_0 必可延拓为全空间上的线性等距映射.

证明 由 V_0 的可加性, 若 $nx\in B_1(E)$, 则有 $V_0(nx)=nV_0x$.

对任意的正整数 m,n 若 $mx=ny$, 其中 $x,y\in B_1(E)$, 则必有

$$mV_0x=mnV_0\Big(\frac{x}{n}\Big)=nV_0y.$$

定义 $\widetilde{V_0}: E\to F$ 如下

$$\widetilde{V_0}(x)=nV_0\Big(\frac{x}{n}\Big),\quad x\in E,\quad \frac{x}{n}\in B_1(E).$$

(1) $\widetilde{V_0}$ 的定义是合理的, 且是 V_0 的延拓. 事实上, 若 $\frac{x}{n},\frac{x}{m}\in B_1(E)$, 必有

$$nV_0\Big(\frac{x}{n}\Big)=mV_0\Big(\frac{x}{m}\Big).$$

(2) $\widetilde{V_0}$ 是全空间上的可加映射. 对任意 E 中的元 x,y, 存在正整数 n, 使得 $\frac{x}{2n}$, $\frac{y}{2n}$ 及 $\frac{x+y}{2n}\in B_1(E)$, 故

$$\widetilde{V_0}(x+y)=2nV_0\Big(\frac{x+y}{2n}\Big)=2nV_0\Big(\frac{x}{2n}\Big)+2nV_0\Big(\frac{y}{2n}\Big)=\widetilde{V_0}(x)+\widetilde{V_0}(y).$$

(3) $\widetilde{V_0}$ 是全空间上的等距映射. 对任意 E 中的元 x,y, 存在正整数 n, 使得 $\frac{x}{n},\frac{y}{n}\in B_1(E)$, 因此有

$$\|\widetilde{V_0}(x)-\widetilde{V_0}(y)\|=\Big\|nV_0\Big(\frac{x}{n}\Big)-nV_0\Big(\frac{y}{n}\Big)\Big\|=n^{\beta}\Big\|V_0\Big(\frac{x}{n}\Big)-V_0\Big(\frac{y}{n}\Big)\Big\|=\|x-y\|.$$

定理 2.2 设 E,F 是赋 β- 范线性空间, $0<\beta\le 1$. B 是一个以零元为内点的均衡闭集, $V_0:B\to F$ 为可加, 等距映射, 即 $\forall x,y\in B$, $x+y\in B$, 有

$$V_0(x+y)=V_0x+V_0y,\quad \|V_0x-V_0y\|=\|x-y\|,$$

则 V_0 必可延拓为全空间上的线性等距映射.

证明 同定理 2.1.

当 E 是内积空间时, 定理 1 中的 "可加映射" 可用 "正交可加映射" 来替换, 有下面的定理.

定理 2.3 设 E 是内积空间, F 是赋范线性空间, 等距映射 $V_0:B_1(E)\to F$ 为正交可加映射, 即 $\forall x,y\in B_1(E)$, $x+y\in B_1(E)$ 且 $x\perp y$, 有 $V_0(x+y)=V_0x+V_0y$, 若还满足 $V_0(-x)=-V_0x$, $\forall x\in B_1(E)$, 则 V_0 必可延拓为全空间上的线性等距映射.

证明 由内积空间的性质知, 对任意的 $x\in B_1(E)$, 存在 $y\in B_1(E)$ 满足 $x\perp y$ 且 $x+y\perp x-y$. 当然有 $x\perp -y$. 再由假设条件可得

$$\begin{aligned}V_0(x)=&\Big(V_0(x)-V_0\Big(\frac{x+y}{2}\Big)-V_0\Big(\frac{x-y}{2}\Big)\Big)+\Big(V_0\Big(\frac{x+y}{2}\Big)-V_0\Big(\frac{x}{2}\Big)-V_0\Big(\frac{y}{2}\Big)\Big)\\&+\Big(V_0\Big(\frac{x-y}{2}\Big)-V_0\Big(\frac{x}{2}\Big)-V_0\Big(\frac{-y}{2}\Big)\Big)+2V_0\Big(\frac{x}{2}\Big)=2V_0\Big(\frac{x}{2}\Big).\end{aligned}$$

对任意的正整数 m,n, 若 $\frac{x}{2^n}\in B_1(E)$, 则必有

$$2^{n+m}V_0\Big(\frac{x}{2^{n+m}}\Big)=2^n\cdot 2^mV_0\Big(\frac{1}{2^m}\cdot\frac{x}{2^n}\Big)=2^nV_0\Big(\frac{x}{2^n}\Big).$$

由此我们可以定义映射 $\widetilde{V_0}:E\to F$ 如下

$$\widetilde{V_0}:=2^nV_0\Big(\frac{x}{2^n}\Big),\quad x\in E,\quad \frac{x}{2^n}\in B_1(E).$$

(1) $\widetilde{V_0}$ 的定义是合理的, 且为 V_0 的延拓.

(2) $\widetilde{V_0}$ 是全空间上的正交可加映射. 事实上, 对任意 E 中的元 x,y, 满足 $x\perp y$, 存在正整数 n, 使得 $\frac{x}{2^n},\frac{y}{2^n}\in B_1(E)$. 令 $m=n+1$, 便有 $\frac{x}{2^m}$, $\frac{y}{2^m}$, $\frac{x+y}{2^m}$, $\frac{x-y}{2^m}\in B_1(E)$, 故

$$\widetilde{V_0}x+\widetilde{V_0}y=2^mV_0\Big(\frac{x}{2^m}\Big)+2^mV_0\Big(\frac{y}{2^m}\Big)=\widetilde{V_0}(x+y).$$

(3) $\widetilde{V_0}(-x)=-\widetilde{V_0}(x)$.

(4) $\widetilde{V_0}$ 是等距映射, 证明同定理 2.1 的 (3), 故 $\widetilde{V_0}$ 是从 E 到 F 的正交可加映射, 由文 [14] 中的推论 7, 知其为可加映射, 由 (4) 知其又是连续映射, 因而 $\widetilde{V_0}$ 是 V_0 在全空间上的线性延拓.

下面给出一个引理, 我们在定理 2.4 的证明中将反复地使用它.

引理 2.1 设 E 是实赋范空间, $\dim E\ge 2$, 则对任意的 $x\in B_2(E)$, 都存在 $x_1,x_2\in S_1(E)$, 满足 $x=x_1+x_2$.

证明 分两种情形:

(1) $x=\theta$. 任取 $a\in S_1(E)$, 令 $x_1=a$, $x_2=-a$ 即可.

(2) $x\ne\theta$. 首先证明球面 $S_1(E)$ 是道路连通集. 为此任取 $a,b\in S_1(E)$. 若 a 和 b 是线性无关的, 则如下定义的

$$l_{a,b}(t)=\frac{(\cos t)a+(\sin t)b}{\|(\cos t)a+(\sin t)b\|}$$

是 $S_1(E)$ 中连结 a,b 的道路; 若 a 和 b 是线性相关的, 必有 $a=\pm b$. 由于 $\dim E\ge 2$, 选择 $c\in S_1(E)$, 使得 c 与 a (当然也与 b) 是线性无关的, 则如下定义的

$$L_{a,b}(t)=\begin{cases} l_{a,c}, & t\le \dfrac{\pi}{2};\\ l_{c,b}\Big(t-\dfrac{\pi}{2}\Big), & t\ge\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

是 $S_1(E)$ 中连结 a,b 的道路, 因而 $S_1(E)$ 是道路连通集. 定义函数 $f:S_1(E)\to\mathbf{R}$ 满足 $f(y)=\|x-y\|$, $y\in S_1(E)$, 则 f 是 $S_1(E)$ 上的连续函数. 因为 $\pm\frac{x}{\|x\|}\in S_1(E)$, 我们有

$$f\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)=\Big\|x-\frac{x}{\|x\|}\Big\|=|\|x\|-1|\le 1,\quad f\Big(-\frac{x}{\|x\|}\Big)=\Big\|x-\Big(-\frac{x}{\|x\|}\Big)\Big\|=\|x\|+1\ge 1.$$

由于已经证明 $S_1(E)$ 是道路连通集, 故存在 $x_1\in S_1(E)$, 满足 $f(x_1)=1$. 令 $x_2=x-x_1$, 则 $x=x_1+x_2$, $\|x_2\|=\|x-x_1\|=f(x_1)=1$.

定理 2.4 设 E,F 是实赋范线性空间, $\dim E\ge 2$. $V_0:S_1(E)\to F$ 是等距映射, 且满足条件: $x_1+x_2+x_3+x_4=x_5+x_6$, $x_i\in S_1(E)$, 必有

$$V_0x_1+V_0x_2+V_0x_3+V_0x_4=V_0x_5+V_0x_6,$$

则 V_0 必可延拓为全空间上线性等距映射.

证明 (1) 由于 $V_0x+V_0(-x)+V_0x+V_0(-x)=V_0x+V_0(-x)$, 我们有 $V_0(-x)=-V_0x$.

(2) 由引理 2.1, 对任意的 $x\in B_1(E)$, 存在 $x_1,x_2\in S_1(E)$, 满足 $x=x_1+x_2$, 定义 $\widetilde{V_0}:E\to F$ 满足 $\widetilde{V_0}x:=V_0x_1+V_0x_2$. 这样的定义是合理的 (若存在 $x_1,x_2,x_3,x_4\in S_1(E)$, 满足 $x=x_1+x_2=x_3+x_4$, 即 $x_1+x_2+x_2-x_2=x_3+x_4$), 由假设条件得

$$V_0x_1+V_0x_2+V_0x_2+V_0(-x_2)=V_0x_3+V_0x_4.$$

由 (1) $V_0(-x_2)=-V_0x_2$ 知 $V_0x_1+V_0x_2=V_0x_3+V_0x_4$) 且为 V_0 的延拓.

(3) $\widetilde{V_0}$ 是可加映射. 对任意的 $x,y,x+y\in B_1(E)$, 存在 $x_i,y_i,z_i\in S_1(E)$, $i=1,2$, 使得 $x=x_1+x_2$, $y=y_1+y_2$, $z=z_1+z_2$, 即 $x_1+x_2+y_1+y_2=z_1+z_2$. 由假设条件得

$$V_0x_1+V_0x_2+V_0y_1+V_0y_2=V_0z_1+V_0z_2.$$

即 $\widetilde{V_0}x+\widetilde{V_0}y=\widetilde{V_0}(x+y)$.

(4) $\widetilde{V_0}$ 是球内的保范映射. 任意的 $x\in B_1(E)$, 存在 $x_1,x_2\in S_1(E)$, 满足 $x=x_1+x_2$, 则

$$\|\widetilde{V_0}x\|=\|V_0x_1+V_0x_2\|=\|V_0x_1-V_0(-x_2)\|=\|x\|.$$

(5) $\widetilde{V_0}$ 是球内连续映射. 由于 $\widetilde{V_0}$ 是球内可加映射, 只需验证该映射在零点连续即可, 即 $x\to\theta\Rightarrow\widetilde{V_0}x\to\theta$. 事实上, 存在 $x_1,x_2\in S_1(E)$, 使得 $x=x_1+x_2$, 因 $x_1+x_2\to\theta\Rightarrow\|x_1-x_2\|\to 2$. 再由 $\widetilde{V_0}$ 的定义知

$$\widetilde{V_0}x=V_0x_1+V_0x_2,\quad \widetilde{V_0}\theta=V_0\Big(\frac{x_1-x_2}{\|x_1-x_2\|}\Big)+V_0\Big(\frac{x_2-x_1}{\|x_1-x_2\|}\Big).$$

由于 $\|x_1-\frac{2x_1-(x_1+x_2)}{\|x_1-x_2\|}\|\to\theta$, $\|x_2-\frac{2x_2-(x_1+x_2)}{\|x_1-x_2\|}\|\to\theta$, 且 V_0 在 $S_1(E)$ 上连续, 故有

$$V_0(x_1)\to V_0\Big(\frac{x_1-x_2}{\|x_1-x_2\|}\Big),\quad V_0(x_2)\to V_0\Big(\frac{x_2-x_1}{\|x_1-x_2\|}\Big).$$

因此 $\widetilde{V_0}x\to\theta$, 故 $\widetilde{V_0}$ 是等距映射. 再由定理 2.1, $\widetilde{V_0}$ 延拓到全空间上的线性等距映射 $\widetilde{V}$, 满足 $\widetilde{V}|_{B_1(E)}=\widetilde{V_0}$, 故 $\widetilde{V}|_{S_1(E)}=\widetilde{V_0}|_{S(E)}=V_0$.

3 赋 β 范空间中 $(\lambda,\psi,2)$- 等距的扩张

首先引入 $(\lambda,\psi,2)$- 等距的概念, 然后讨论它们的扩张问题. 在下文中, $\psi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 为任何一个确定的严格递增的函数.

定义 3.1 设 E 为赋 β 范空间. ψ 为上文所指的函数, $0<\lambda\le 1$. $V:E\to E$ 满足

$$\psi(\|V^2(x)\|)-\psi(\|Vx\|)=\lambda(\psi(\|Vx\|)-\psi(\|x\|)),$$

则称 V 为 $(\lambda,\psi,2)$- 等距; 若满足

$$\psi(\|V^2(x)\|)-\psi(\|Vx\|)\le\lambda(\psi(\|Vx\|)-\psi(\|x\|)),$$

则称 V 为弱 $(\lambda,\psi,2)$- 等距.

注 1 当 $\lambda=1,\psi=x^2$ 时, $(\lambda,\psi,2)$- 等距即为 2- 等距. 等距与 $(\lambda,\psi,2)$- 等距没有必然的蕴涵关系: 等距不能推出 $(\lambda,\psi,2)$- 等距, 例如: 令 $E=\mathbf{R}$, 取绝对值范数, $Vx=x+a$, $0<a\in\mathbf{R}$. 显然 V 是等距, 取 $\psi=x^2$, $V^2x=x+2a$, $x>0$, 显然 $\|V^2x\|^2-\|Vx\|^2\ne\|Vx\|^2-\|x\|^2$, 即 V 为非 2- 等距; 但若等距 V 满足 $V\theta=\theta$, 则必为 $(\lambda,\psi,2)$- 等距. 反之, $(\lambda,\psi,2)$- 等距为也不能推出等距. 例如: 令 E 为任何 - 个赋范空间, $x_0\in S_1(E)$, $V_0:S_1(E)\to S_1(E)$, $V_0x=x_0$. 显然 V_0 不为等距, 但由下面的定理可知 V_0 是 $(\lambda,\psi,2)$- 等距.

定理 3.1 E 是赋 β- 范空间, $V_0:S_r(E)\to S_r(E)$, 则 V_0 是 $(\lambda,\psi,2)$- 等距, 且 V_0 必可延拓为全空间上的 $(\lambda,\psi,2)$- 等距映射.

证明 由于 $\|V_0x\|=\|x\|$, 故 V_0 是 $(\lambda,\psi,2)$- 等距.

定义 $\widetilde{V_0}:E\to E$ 如下

$$\widetilde{V}(x)=\begin{cases}\Big(\dfrac{\|x\|}{r}\Big)^{\frac{1}{\beta}}V_0\Big(\Big(\dfrac{r}{\|x\|}\Big)^{\frac{1}{\beta}}x\Big), & x\ne\theta;\\ \theta, & x=\theta,\end{cases}$$

则 $\|\widetilde{V_0}(x)\|=\|x\|$, 因而 $\widetilde{V_0}$ 是 $(\lambda,\psi,2)$- 等距.

定理 3.2 设 E 是赋 β- 范空间, $V_0:B_1(E)\to B_1(E)$ 为弱 $(\lambda,\psi,2)$- 等距, 则 $\|V_0x\|\ge\|x\|$. 特别, 若 $\lambda=1$, 则 $V_0|_{S_1(E)}$ 是 $(1,\psi,2)$- 等距, 且其必可延拓为全空间上的 $(1,\psi,2)$- 等距映射 $\widetilde{V}$.

证明 V_0 为弱 $(\lambda,\psi,2)$- 等距, 故可导出: 当 $n=1,2,\dots$ 时, 有

$$\psi(\|V_0^nx\|)-\psi(\|V_0^{n-1}x\|)\le\lambda^{n-1}(\psi(\|Vx\|)-\psi(\|x\|)).$$

相加得到

$$\begin{aligned}\psi(\|V_0^nx\|)-\psi(\|x\|)&\le(1+\lambda+\cdots+\lambda^{n-1})(\psi(\|V_0x\|)-\psi(\|x\|))\\&=\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}(\psi(\|V_0x\|)-\psi(\|x\|)).\\ \psi(\|V_0x\|)&\ge\lambda\Big(\frac{1-\lambda^{n-1}}{1-\lambda^n}\Big)\psi(\|x\|).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 得到 $\psi(\|V_0x\|)\ge\lambda\psi(\|x\|)$. 若 $\lambda=1$, 由于 ψ 的严格递增性, 有 $\|V_0x\|\ge\|x\|$. 当 $\|x\|=1$, 由 V_0 的性质有 $\|V_0x\|\le\|x\|$, 故 $V_0|_{S_1(E)}$ 是 $(1,\psi,2)$- 等距, 其可以延拓到全空间中的映射如下

$$\widetilde{V}(x)=\begin{cases}\|x\|^{\frac{1}{\beta}}V_0\Big(\dfrac{x}{\|x\|^{\frac{1}{\beta}}}\Big), & x\ne\theta;\\ \theta, & x=\theta,\end{cases}$$

则 $\|\widetilde{V}(x)\| = \|x\|$, 因而 $\widetilde{V}$ 是 $(1,\psi,2)$- 等距.

注 2 文 [12] 中的定理 2, 定理 4 明显有误, 按照延拓公式得到的只是 $V_0|_{S_r(E)}$ 上的延拓 $\widetilde{V}$, 而非 V_0 的延拓, 因为若非齐性, $\widetilde{V}|_{B_r(E)} = V_0$ 不一定成立. 定理 4 对满足正齐性条件的映射是成立的.

定理 3.3 设 E 是赋 β- 范空间, 则正齐性映射 $V_0 : B_1(E) \to B_1(E)$ 是 $(1,\psi,2)$- 等距映射的充要条件为 $\|V_0x\| \geq \|x\|$, $\forall x \in B_1(E)$.

证明 充分性. 如果 $\|x\| = 1$, 则 $\|V_0x\| \leq \|x\|$. 结合已知条件 $\|V_0x\| \geq \|x\|$, 得 $\|V_0x\| = \|x\|$, 故 $V_0|_{S_1(E)}$ 是 $(1,\psi,2)$- 等距. 由定理 3.1, 其可以延拓到全空间中的 $(1,\psi,2)$- 等距映射 $\widetilde{V}$. 由于 V_0 是正齐性映射, $\widetilde{V}$ 必为 V_0 的延拓.

必要性. 由定理 3.2 即得.

定理 3.4 设 E 是赋 β- 范空间, $V_0 : E \to E$ 是线性映射, 且为弱 $(1,\psi,2)$- 等距映射. 如果满足条件: 当 $\|x-y\| \leq 1$ 时, 必有 $\|V_0x - V_0y\| \leq \|x-y\|$, 则 V_0 是等距映射.

证明 由定理 3.2, 对任意的 $x \in B_1(E)$, 有 $\|V_0x\| \geq \|x\|$. 当 $\|x-y\| \leq 1$, 必有 $\|V_0x - V_0y\| \geq \|x-y\|$. 因此, $\|V_0x - V_0y\| = \|x-y\|$. 对任意的 $x, y \in B_1(E)$, 有

$$\left\| \frac{x-y}{\|x-y\|^{1/\beta}} \right\| = 1.$$

由此易得 $\|V_0x - V_0y\| = \|x-y\|$. 由于 V_0 是线性映射, 不难导出 V_0 是全空间上的等距映射.

致谢 作者感谢定光桂教授的鼓励和支持, 同时也感谢审稿人对本文所提出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Tingley D., Isometries of the unit sphere, *Geometriae Dedicata*, 1987, **22**: 371–378.
[2] Ding G. G., On extension and approximations of isometric operators, *Advances in Mathematics*, 2003, **32** (4): 529–536 (in Chinese).
[3] Ding G. G., On extension of isometries between unit spheres of E and $C(\Omega)$, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2003, **19**(4): 793–800.
[4] An G. M., On extension of isometries between the unit spheres, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2004, **47**(4): 653–656.
[5] Yang X. Z., Hou Z. B. and Fu X. H., On linear extension of isometries between the unit spheres of β-normed spaces, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2005, **48**(6): 1199–1202.
[6] Li L., Extension of isometries between unit sphere, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2005, **48**(6): 1105–1108.
[7] Fang X. N., Wang J. H., On linear extension of isometries between the unit spheres, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2005, **48**(6): 1109–1112 .
[8] Fang X. N., Wang J. H., On extension of isometries between the unit spheres of normed space E and $C(\Omega)$, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2006, **22**(6): 1819–1824.
[9] Ding G. G., The representation theorem of onto isometric mappings between two unit spheres of $l^1(\Gamma)$ type spaces and the application to the isometric extension problem, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2004, **20**(6): 1089–1094.
[10] Wang J., On extension of isometries between unit spheres of AL_p-spaces ($0 < p < \infty$), *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2004, **132**(10): 2899–2909.
[11] Yang X. Z., On extension of isometries between unit spheres of $L_P(\mu)$ and $L_P(\nu, H)$ ($1 < p \neq 2$, H is a Hilbert space), *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, **323**(2): 985–992.
[12] Zhang L., On the extension problem of isometric operator between unit spheres of finite dimensional l^∞-spaces, *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis*, 2005, to appear.
[13] Song M. M., 2-isometries in β-normed spaces, *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis*, 2003, **36**(4): 28–30.
[14] Rätz J., On orthogonally additive mappings, *Aequationes Math.*, 1985, **28**: 35–49.
[15] Rolewicz S., Metric linear spaces, Warsaw: *Polish Sci Publ*, 1972.
[16] Ding G. G., The selected topics on topological linear spaces, Guangxi Education Press, 1987.