第49卷第6期 数学学报中文版 Vol.49, No.6
2006年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Nov., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)06-1403-08 **文献标识码:** **A**

不等式约束下线性模型中线性估计的可容许性

吴鑑洪

华东师范大学统计系 上海 200062
E-mail: wjhstat1@yahoo.com.cn

陈学琴

宜春学院 江西 336000
E-mail: cxqluky_2005@163.com

摘 要 研究了线性模型在不等式约束条件下齐次和非齐次线性估计的可容许性, 刻画了两者之间的关系, 得到了不等式约束条件下非齐次线性估计可容许性的充要条件.

关键词 可容许性; 不等式约束; 齐次/非齐次线性估计

MR(2000) 主题分类 62C15

中图分类 O212.7

Admissibility of Linear Estimators in Linear Models with Respect to Inequality Constraints

Jian Hong WU

Department of Statistics, East China Normal University, Shanghai 200062*, P. R. China*
E-mail: wjhstat1@yahoo.com.cn

Xue Qin CHEN

Yichun University, Jiangxi 336000*, P. R. China*
E-mail: cxqluky_2005@163.com

Abstract Admissibility of both homogeneous and inhomogeneous linear estimators is investigated in linear models with respect to inequality constraints. The relation between admissibility of the two types of estimators is derived. Under some conditions, sufficient and necessary conditions for the admissibility of inhomogeneous linear estimators with respect to inequality constraints are given.

Keywords admissibility; inequality constraint; homogeneous/inhomogeneous linear estimator

MR(2000) Subject Classification 62C15

Chinese Library Classification O212.7

收稿日期: 2005-07-05; 接受日期: 2005-12-20

1 引言及记号

考虑线性模型

$$Y = X\beta + \varepsilon, \tag{1}$$

其中 ε 是均值为零方差阵为 V 的 $n\times 1$ 误差变量, Y 是 $n\times 1$ 因变量, X 是已知的 $n\times p$ 矩阵, 未知参数 (β, V) 属于卡氏积 $R^p\times\nu$ 的一个子集 T, ν 是给定的 $n\times n$ 非负定矩阵. 为方便起见, 上述模型记为 $(Y, X\beta, V\,|\,(\beta, V)\in T)$. 在文献中, 线性估计的可容许性得到了极大的关注. 关于 Gauss-Markov 模型, 最早由 Cohen [1] 提出线性估计的可容许性问题. 此后很多学者进入这一领域, 取得了许多很好的结果. 相关的工作有 Shinozaki [2], Rao [3], LaMotte [4], 朱显海和鹿长余 [5,6], Stepniak [7,8], Mathew [9], 吴启光 [10], Klonecki & Zontek [11], Zontek [12]. Baksalary & Markiewicz [13] 研究了参数约束集为 $T = R^p\times\sigma^2 V$, $\sigma^2 > 0$, 实质为参数 (β, σ^2) 无约束之情形. Hoffmann [14], Mathew [15], 朱显海和张双林 [16] 研究了椭球约束情形, 即 $\beta' N\beta\le\sigma^2$, 其中 N 是正定矩阵. 鹿长余和朱显海 [17], 鹿长余和李维新 [18] 以及文 [19,20] 进一步研究了带有椭球约束线性模型中线性估计的可容许性问题, 其中 N 是已知的非负定矩阵. 鹿长余和史宁中在文 [21] 中考虑了在一组不等式约束下, 线性模型 $(Y, X\beta, V\,|\,(\beta, V)\in T)$ 中线性估计的可容许性, 其中参数满足 $\beta\in C = \{\beta : R\beta\ge 0\}$, R 为已知的 $k\times p$ 矩阵. 带有这种不等式约束的模型记为 $(Y, X\beta, V\,|\,R\beta\ge 0, V\in\nu)$. 本文改正了文 [21] 的两个错误, 得到了进一步的结果. 同时, 在 2.2 小节中讨论了在一些新的不等式约束下线性模型中线性估计的可容许性问题.

下面对文中的记号作简略说明. 对矩阵 A, $A', rk(A), A^+, \mu(A)$ 和 $\mu^\perp(A)$ 分别表示矩阵 A 的转置, 秩, Moore–Penrose 逆, 张成的空间和 $\mu(A)$ 的正交补. 另外, tr$A$ 表示 A 的迹, $A\ge B$ 和 $A > B$ 分别表示 $A - B$ 是非负定矩阵和正定矩阵. 对一向量 b, $b\ge 0$ 表示 b 的所有分量都是非负的, $b\not< 0$ 则表示 b 的分量中至少有一个是非负的. 本文用 $L(AY + a, S\beta)$ 表示向量参数函数 $S\beta$ 的向量估计 $AY + a$ 的二次损失函数, 其中

$$L(AY + a, S\beta) = (AY + a - S\beta)'(AY + a - S\beta). \tag{2}$$

风险函数定义为 $R(AY + a, S\beta) = E[L(AY + a, S\beta)]$, 其中 S 为已知的 $s\times p$ 矩阵, $S\beta$ 是待估的向量参数函数. 记

$$\mathscr{L}\mathscr{I} = \{AY + a : A \text{ 为 } s\times n \text{ 矩阵}, a \text{ 为 } s\times 1 \text{ 向量}\}, \tag{3}$$

$$\mathscr{L}\mathscr{H} = \{AY : A \text{ 为 } s\times n \text{ 矩阵}\}, \tag{4}$$

其中 $\mathscr{L}\mathscr{I}$ 表示线性估计类, $\mathscr{L}\mathscr{H}$ 表示齐次线性估计类. 在参数约束 T 下, 估计 $AY + a$ 与估计 $BY + b$ 一样好当且仅当对所有的 $(\beta, V)\in T$, $R(AY + a, S\beta)\le R(BY + b, S\beta)$. 在参数约束条件 T 下, 估计 $AY + a$ 优于 $BY + b$ 当且仅当在参数约束 T 下 $AY + a$ 与 $BY + b$ 一样好, 且在 T 中一些点 $AY + a$ 比 $BY + b$ 有更小的方差. 记 $\mathscr{L}$ 为估计类, 则 $d(Y)$ 是在参数约束 T 下估计类 $\mathscr{L}$ 中可容许的估计, 当且仅当 $d(Y)\in\mathscr{L}$ 且不存在 $\mathscr{L}$ 中其它估计优于 $d(Y)$. 若 $d(Y)$ 是 $S\beta$ 在参数约束 T 下类 $\mathscr{L}$ 中可容许的估计, 则我们记 $d(Y)\overset{\mathscr{L}}{\sim} S\beta(T)$.

2 关于不等式约束的可容许线性估计

前面考虑带有参数约束 $C\times\nu$ 的线性模型 $(Y, X\beta, V)$ 中线性估计的可容许性, 其中 $V\in$

ν, $C=\{\beta: R\beta\geq 0\}$, R 是已知的矩阵. 另外, 本节也考虑了一些其它的不等式约束, 并得到了线性模型在这些不等式约束下线性估计的可容许性的充要条件.

2.1 参数约束为 $C=\{\beta: R\beta\geq 0\}$ 情形

记 $T=\{(\beta,V): R\beta\geq 0, V\in\nu\}$, $T_1=\{(\beta,V): R\beta\geq 0,\ V\in\nu_1\}$, 其中 ν_1 是 $n\times n$ 非负定矩阵的锥集, $C=\{\beta: R\beta\geq 0\}$, $C^*=\{\alpha: \alpha'\beta\leq 0,\ \forall\beta\in C\}$ 是 C 的共轭锥.

对一具有不等式约束的线性模型 $(Y, X\beta,\ V\mid R\beta\geq 0,\ V\in\nu)$, 若线性估计 $AY+a$ 是可容许的, 则非齐次项 a 满足 $a\in\mu(AX-S)$, 这一结论由鹿长余和史宁中 [21] 给出. 实际上, 存在另一个必要条件.

定理 1 考虑线性模型 $(Y, X\beta,\ V\mid R\beta\geq 0,\ V\in\nu)$. 假如 $AY+a\overset{\mathscr{L}\mathscr{I}}{\sim} S\beta(T)$, 则对任意 $c\in\mu[(AX-S)']\cap C^*$, $c'(AX-S)^+a\geq 0$.

证明 反证法. 若 $c\in\mu[(AX-S)']\cap C^*$ 且 $c'(AX-S)^+a<0$, 则存在 c_0, 使得 $c=(AX-S)'(AX-S)c_0$ 成立. 由于 $a\in\mu(AX-S)$, 存在某一 a_0, 使得 $a=(AX-S)(AX-S)'a_0$. 记 $b=(AX-S)^+a+\lambda c_0$, $\lambda>0$, 则对所有的 $(\beta,V)\in T$, 有

$$\begin{aligned}&R(AY+(AX-S)b, S\beta)-R(AY+a, S\beta)\\&=2\lambda c'\beta+2\lambda c'(AX-S)^+a+\lambda^2 c_0{}'(AX-S)'(AX-S)c_0.\end{aligned}$$

因此, 根据文 [21] 中的引理 2.1, 只要 λ 充分小, 则对所有 $(\beta,V)\in T$, 有

$$R(AY+(AX-S)b, S\beta)-R(AY+a, S\beta)<0,$$

故 $AY+(AX-S)b$ 优于 $AY+a$, 这与假设 $AY+a\overset{\mathscr{L}\mathscr{I}}{\sim} S\beta(T)$ 矛盾.

根据定理 1, 文 [21, 定理 3.1 和 3.2] 的条件 (b) 是不对的. 推论 1 和 2 给出了正确的结论.

推论 1 考虑线性模型 $(Y, X\beta,\ V\mid R\beta\geq 0,\ V\in\nu_1)$. 若下面条件成立:

(1) $a\in\mu(AX-S)$;

(2) $c'(AX-S)^+a\geq 0,\ \forall c\in\mu((AX-S)')\cap C^*$;

(3) $AY\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim} S\beta(T_1)$,

则 $AY+a\overset{\mathscr{L}\mathscr{I}}{\sim} S\beta(T_1)$.

推论 2 考虑线性模型 $(Y, X\beta,\ V\mid R\beta\geq 0,\ V\in\nu)$. 若 $AY+a\overset{\mathscr{L}\mathscr{I}}{\sim} S\beta(T)$, 则

(1) $a\in\mu(AX-S)$;

(2) $c'(AX-S)^+a\geq 0, \forall c\in\mu((AX-S)')\cap C^*$.

关于参数约束集 T, 若 $AY+a$ 在 (3) 中非齐次线性估计类 $\mathscr{L}\mathscr{I}$ 是可容许的, AY 在 (4) 中齐次线性估计类 $\mathscr{L}\mathscr{H}$ 是否是可容许的还不清楚. 不过, 在某些情形, 答案是肯定的.

定理 2 考虑线性模型 $(Y, X\beta,\ V\mid R\beta\geq 0,\ V\in\nu)$. 假定 $(AX-S)'\in\mu^{\perp}(R')$. 若 $AY+a\overset{\mathscr{L}\mathscr{I}}{\sim} S\beta(T)$, 则 $AY\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim} S\beta(T)$.

证明 首先, 根据文 [21] 中定理 2.2, 存在 a_0, 使得 $a=(AX-S)(AX-S)'a_0$ 成立.

假若 BY 与 AY 一样好, 也即对所有 $(\beta,V)\in T$, 有

$$R(BY, S\beta)\leq R(AY, S\beta),$$

从而

$$\mathrm{tr}BVB'+\beta'(BX-S)'(BX-S)\beta\leq \mathrm{tr}AVA'+\beta'(AX-S)'(AX-S)\beta,$$

以及

$$\mathrm{tr}BVB' \le \mathrm{tr}(AVA'),\quad \beta'(BX-S)'(BX-S)\beta \le \beta'(AX-S)'(AX-S)\beta,\quad \forall\,\beta\in C.$$

当 $(AX-S)'\in\mu^{\perp}(R')$, 则对所有 $\beta\in C$, 有 $\beta+(AX-S)'a_0\in C$. 因此对所有 $(\beta,V)\in T$, 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}BVB'+[\beta+(AX-S)'a_0]'(BX-S)'(BX-S)[\beta+(AX-S)'a_0]\\&\quad\le \mathrm{tr}AVA'+[\beta+(AX-S)'a_0]'(AX-S)'(AX-S)[\beta+(AX-S)'a_0].\end{aligned}\tag{5}$$

这意味对所有 $(\beta,V)\in T$, 有

$$R[BY+(BX-S)(AX-S)'a_0,S\beta]\le R(AY+a,S\beta).\tag{6}$$

当 $AY+a\overset{\mathscr{L}\mathscr{I}}{\sim}S\beta(T)$, (6) 式中等号成立, 这意味对所有 $(\beta,V)\in T$, (5) 中等号成立. 注意到 C 是凸锥集, $(\beta,V)\in T$ 意味 $(\lambda\beta,V)\in T$, 只要 $\lambda>0$. 因此对所有 $(\beta,V)\in T$, 我们有

$$\begin{aligned}R(BY,S\beta)&=\mathrm{tr}BVB'+\beta'(BX-S)'(BX-S)\beta=\mathrm{tr}AVA'+\beta'(AX-S)'(AX-S)\beta\\&=R(AY,S\beta).\end{aligned}$$

这表明不存在关于约束 T 优于 AY 的齐次线性估计. $AY\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}S\beta(T)$ 得证.

根据本文定理 1, 2, 和推论 1, 2, 可得下面的定理. 这两个定理刻画了齐次和非齐次线性估计的可容许性之间的关系.

定理 3 考虑线性模型 $(Y,X\beta,V\mid R\beta\ge 0,V\in\nu)$. 假定 $(AX-S)'\in\mu^{\perp}(R')$. 若 $AY+a\overset{\mathscr{L}\mathscr{I}}{\sim}S\beta(T)$, 则

(1) $a\in\mu(AX-S)$;

(2) $c'(AX-S)^{+}a\ge 0,\ \forall\,c\in\mu((AX-S)')\cap C^{*}$;

(3) $AY\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}S\beta(T)$.

定理 4 考虑线性模型 $(Y,X\beta,V\mid R\beta\ge 0,V\in\nu_1)$. 假定 $(AX-S)'\in\mu^{\perp}(R')$, 则 $AY+a\overset{\mathscr{L}\mathscr{I}}{\sim}S\beta(T_1)$ 当仅当

(1) $a\in\mu(AX-S)$;

(2) $c'(AX-S)^{+}a\ge 0,\ \forall\,c\in\mu((AX-S)')\cap C^{*}$;

(3) $AY\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}S\beta(T_1)$.

2.2 参数约束为 $C=\{\beta:R\beta\not<0\}$ 情形

本节考虑一些新的不等式约束, 相应的记号也重新定义. 记 $T=\{(\beta,V):R\beta\not<0,\ V\in\nu\}$, $T_1=\{(\beta,V):R\beta\not<0,\ V\in\nu_1\}$, 其中 ν_1 是非负定 $n\times n$ 矩阵的锥集, $C=\{\beta:R\beta\not<0\}$, $C^{*}=\{\alpha:\alpha'\beta\le 0,\ \forall\,\beta\in C\}$ 是 C 的共轭锥集.

引理 1 任意两非负定阵 A 和 B, 实数 d_1,d_2, 若对所有 $\beta\in C=\{\beta:R\beta\not<0\}$, $\beta'A\beta+d_1\le\beta'B\beta+d_2$ 成立, 则有 $B-A$ 是非负定阵, 且 $d_1\le d_2$.

引理 2 在线性模型 $(Y,X\beta,V\mid R\beta\not<0,\ V\in\nu)$, $AY\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}S\beta(T)$ 当且仅当在线性模型 $(Y,X\beta,V\mid\beta\in R^{p},\ V\in\nu)$, $AY\overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim}S\beta$.

注记 引理 1 和 2 的证明简单, 故省略.

根据引理 1 和 2, 可得非齐次线性估计在不等式约束 $C=\{\beta:R\beta\not<0\}$ 下的可容许性的必要条件.

定理 5 考虑线性模型 $(Y, X\beta, V \mid R\beta \nleq 0, V\in\nu)$. 若 $AY+a \overset{\mathscr{L}\mathscr{I}}{\sim} S\beta(T)$, 则

(1) $a\in\mu(AX-S)$;

(2) $c'(AX-S)^{+}a\geq 0, \forall c\in\mu((AX-S)')\cap C^{*}$;

(3) $AY \overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim} S\beta(T)$.

证明 (1) 假若 $a\notin\mu(AX-S)$, 记 $a=a_1+a_2$, 其中 $a_1\in\mu(AX-S)$, $a_2\in\mu^{\perp}(AX-S)$, $a_2\neq 0$, 于是有 $a'a>a_1'a_1$. 因此对任意的 $(\beta,V)\in T$, 可得

$$R(AY+a,S\beta)-R(AY+a_1,S\beta)=a'a-a_1'a_1>0.$$

换言之, $AY+a_1$ 优于 $AY+a$, 与假设矛盾.

(2) 假若 c 满足 $c\in\mu((AX-S)')\cap C^{*}$ 且 $c'(AX-S)^{+}a<0$ 存在 c_0, 使得 $c=(AX-S)'(AX-S)c_0$. 令 $b=(AX-S)^{+}a+\lambda c_0$, 其中 $\lambda>0$, 则对所有 $(\beta,V)\in T$, 有

$$\begin{aligned}&R(AY+(AX-S)b,S\beta)-R(AY+a,S\beta)\\&\quad=2\lambda c'\beta+2\lambda c'(AX-S)^{+}a+\lambda^2 c_0{}'(AX-S)'(AX-S)c_0.\end{aligned}$$

根据文 [21] 中的引理 2.1, 只要 λ 充分小, 对所有的 $(\beta,V)\in T$, 有

$$R(AY+(AX-S)b,S\beta)-R(AY+a,S\beta)<0.$$

因此, $AY+(AX-S)b$ 优于 $AY+a$, 这与 $AY+a \overset{\mathscr{L}\mathscr{I}}{\sim} S\beta(T)$ 矛盾.

(3) 根据本定理中必要条件 (1), 存在 a_0, 使得 $a=(AX-S)a_0$. 假定 BY 与 AY 一样好, 也即对所有 $(\beta,V)\in T$, 可得

$$R(BY,S\beta)\leq R(AY,S\beta).$$

根据本文引理 1 和 2, 有

$$\mathrm{tr}BVB'\leq \mathrm{tr}AVA', \tag{7}$$

$$(BX-S)'(BX-S)\leq (AX-S)'(AX-S). \tag{8}$$

因此, 根据上两式 (7) 和 (8), 对所有 $(\beta,V)\in T$, 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}BVB'+(\beta+a_0)'(BX-S)'(BX-S)(\beta+a_0)\\&\quad\leq \mathrm{tr}AVA'+(\beta+a_0)'(AX-S)'(AX-S)(\beta+a_0).\end{aligned} \tag{9}$$

这表明, 对所有 $(\beta,V)\in T$, 有

$$R[BY+(BX-S)a_0,S\beta]\leq R(AY+a,S\beta). \tag{10}$$

由于 $AY+a \overset{\mathscr{L}\mathscr{I}}{\sim} S\beta(T)$, (10) 式中等号成立, 从而 (9) 式中等号成立. 注意到 C 是凸锥集, 由 $(\beta,V)\in T$ 可推出 $(\lambda\beta,V)\in T$, 只要 $\lambda>0$, 因此对所有 $(\beta,V)\in T$, 有

$$\begin{aligned}R(BY,S\beta)&=\mathrm{tr}BVB'+\beta'(BX-S)'(BX-S)\beta=\mathrm{tr}AVA'+\beta'(AX-S)'(AX-S)\beta\\&=R(AY,S\beta).\end{aligned}$$

这表明不存在在约束 T 下优于 AY 的齐次线性估计, 因此 $AY \overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim} S\beta(T)$.

接下来的结果给出了线性估计可容许性的充要条件.

定理 6 考虑线性模型 $(Y, X\beta, V \mid R\beta \nleq 0, V\in\nu_1)$, 则 $AY+a \overset{\mathscr{L}\mathscr{I}}{\sim} S\beta(T_1)$ 当且仅当

(1) $a \in \mu(AX-S)$;

(2) $c'(AX-S)^{+}a \geq 0,\ \forall c \in \mu((AX-S)') \cap C^{*}$;

(3) $AY \overset{\mathscr{L}\mathscr{H}}{\sim} S\beta(T_1)$.

证明 ($\Longrightarrow$) 根据定理 5, 必要性成立.

($\Longleftarrow$) 根据定理 5 中 (1) 的证明, 不存在 $B \in R^{s\times n}$ 和 $b \in R^{p}$, 使得 $BY+(BX-S)b$ 优于 $AY+(AX-S)a_0 = AY+a$. 假定 $BY+(BY-S)b$ 与 $AY+a$ 一样好, 则对所有 $(\beta, V) \in T$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}BVB' + (\beta+b)'(BX-S)'(BX-S)(\beta+b)\\ &\quad \leq \mathrm{tr}AVA' + (\beta+a_0)'(AX-S)'(AX-S)(\beta+a_0).\end{aligned} \tag{11}$$

注意到 ν_1 是锥集, 若 $V \in \nu_1$ 和 $k > 0$, 则有 $kV \in v_1$. 因此让 k 分别趋于无穷大和零, 考察 (11), 两边取极限, 可得

$$\mathrm{tr}BVB' \leq \mathrm{tr}AVA',$$
$$(\beta+b)'(BX-S)'(BX-S)(\beta+b) \leq (\beta+a_0)'(AX-S)'(AX-S)(\beta+a_0).$$

类似地, 用 $\lambda\beta$ 代替 β, 让 λ 趋于无穷大, 得到

$$\beta'(BX-S)'(BX-S)\beta \leq \beta'(AX-S)'(AX-S)\beta. \tag{12}$$

因此齐次线性估计 BY 和 AY 一样好. 由 AY 的可容许性可推出

$$\mathrm{tr}BVB' + \beta'(BX-S)'(BX-S)\beta = \mathrm{tr}AVA' + \beta'(AX-S)'(AX-S)\beta,$$

从而

$$\mathrm{tr}BVB' = \mathrm{tr}AVA', \tag{13}$$
$$(BX-S)'(BX-S) = (AX-S)'(AX-S). \tag{14}$$

根据 (11)–(14) 式可得, 对所有的 $(\beta, V) \in T$, 有

$$\begin{aligned}&2\beta'(BX-S)'(BX-S)b - 2\beta'(AX-S)'a + b'(BX-S)'(BX-S)b - a'a\\ &\quad = 2\beta'(AX-S)'(AX-S)(b-(AX-S)^{+}a) + b'(AX-S)'(AX-S)b - a'a \leq 0.\end{aligned} \tag{15}$$

而由本文引理 1 及 (15) 式, 可推出

$$(AX-S)'(AX-S)(b-(AX-S)^{+}a) \in C^{*}, \tag{16}$$
$$b'(AX-S)'(AX-S)b - a'a \leq 0. \tag{17}$$

注意到

$$(AX-S)'(AX-S)(b-(AX-S)^{+}a) \in \mu((AX-S)').$$

结合 (16) 式和本定理条件 (2), 可得

$$((AX-S)^{+}a)'(AX-S)'(AX-S)(b-(AX-S)^{+}a) \geq 0.$$

另外, 注意到

$$0 \leq (b-(AX-S)^{+}a)'(AX-S)'(AX-S)(b-(AX-S)^{+}a).$$

因此

$$((AX-S)'(AX-S)(b-(AX-S)^+a))'b \\ \geq ((AX-S)'(AX-S)(b-(AX-S)^+a))'(AX-S)^+a. \tag{18}$$

另一方面, 由 (16), (17) 式，可得

$$\begin{aligned}&((AX-S)'(AX-S)(b-(AX-S)^+a))'b+((AX-S)'(AX-S)(b-(AX-S)^+a))'(AX-S)^+a\\ &\quad = a'(AX-S)b-a'a+b'(AX-S)'(AX-S)b-b'(AX-S)'a\\ &\quad = b'(AX-S)'(AX-S)b-a'a\leq 0.\end{aligned}$$

再加上 (18) 式, 有

$$[(AX-S)^+a]'(AX-S)'(AX-S)(b-(AX-S)^+a)\leq 0. \tag{19}$$

根据 (16), (18) 和 (19) 这三式, 可得

$$[(AX-S)'(AX-S)(b-(AX-S)^+a)]'a_0=0,$$
$$[(AX-S)'(AX-S)(b-(AX-S)^+a)]'b=0.$$

对所有 $(\beta,V)\in T$, (11) 式中等号成立. 这表明不存在优于 $AY+a$ 的线性估计. 因此

$$AY+a\overset{\mathscr{L}\mathscr{I}}{\sim}S\beta(T_1).$$

充分性得证.

下面研究在一些特殊的线性模型中可容许的线性估计 $AY+a$ 的 A 和 a 的特征.

据本文引理 1, 定理 6 以及文 [3] 中定理 3.1, 可得推论 3.

推论 3 考虑线性模型 $(Y,\beta,\sigma^2I\mid R\beta\nleq 0)$. $AY+a\overset{\mathscr{L}\mathscr{I}}{\sim}\beta(T_1)$ 当且仅当

(1) $a\in\mu(A-I)$;

(2) $c'(A-I)^+a\geq 0,\ \forall c\in\mu((A-I)')\cap C^*$;

(3) $0\leq A\leq I$.

结合文 [6] 中定理 2.2, 可得推论 4.

推论 4 考虑线性模型 $(Y,\beta,\sigma^2V\mid R\beta\nleq 0)$, 则 $AY+a\overset{\mathscr{L}\mathscr{I}}{\sim}\beta(T_1)$ 当且仅当

(1) $a\in\mu(A-I)$;

(2) $c'(A-I)^+a\geq 0,\ \forall c\in\mu((A-I)')\cap C^*$;

(3) $AVA'\leq AV$;

(4) $rk[(I-A)V]=rk(I-A)$.

对一般的 Gauss-Markov 模型, 结合文 [17] 的定理 3.1, 可得推论 5.

推论 5 考虑线性模型 $(Y,X\beta,\,\sigma^2V\mid R\beta\nleq 0)$, 则 $AY+a\overset{\mathscr{L}\mathscr{I}}{\sim}S\beta(T_1)$ 当且仅当

(1) $a\in\mu(AX-S)$;

(2) $c'(AX-S)^+a\geq 0,\ \forall c\in\mu((AX-S)')\cap C^*$;

(3) $\mu(VA')\subset\mu(X)$;

(4) AVD' 是对称的, 且 $AVA'\leq AVD'$;

(5) $rk(AX-S)=rk[(A-D)B]$ 或 $rk(AX-S)=rk[(AX-S)X^+B]$, 其中

$$B=V-V^{\frac{1}{2}}PV^{\frac{1}{2}},\quad P=V^{\frac{1}{2}}H(V^{\frac{1}{2}}H)^+,\quad H=I-XX^+,\quad D=SX^+.$$

致谢 本文第一作者感谢其导师朱力行教授给与的建设性的意见和建议!

参 考 文 献

[1] Cohen A., All admissible estimates of the mean vector, *Ann. Math. Statist.*, 1966, **37**: 458–463.
[2] Shinozaki N., A study of generalized inverse of matrix and estimation with quadratic loss, Ph.D. Thesis, Japan: Keio University, 1975.
[3] Rao C. R., Estimation of parameter in a linear models, *Ann. Statist.*, 1976, **4**: 1023–1037.
[4] LaMotte L. R., Admissibility in linear estimation, *Ann. Statist.*, 1982, **10**: 245–255.
[5] Zhu X. H. and Lu C. Y., Admissibility of inhomogeneous linear estimator regression coefficient, *Chinese Appl. Probab. Statist.*, 1986, **2**(2): 97–99 (in Chinese).
[6] Zhu X. H. and Lu C. Y., Admissibility of linear estimator in linear model, *Chinese Ann. Math.*, 1987, **8A**(2): 220–226 (in Chinese).
[7] Stepniaki C., On admissible estimators in a linear model, *Biometrical J.*, 1984, **26**: 815–816.
[8] Stepniaki C., Admissibility in mixed models, *J. Multivariate Anal.*, 1989, **31**: 90–106.
[9] Mathew T., Rao C. R. and Sinha B. K., Admissibility of linear estimation in sigular linear models, *Commun. Statist. Theory Methods*, 1984, **13**(24): 3033–3045.
[10] Wu Q. G., Admissibility of linear estimates of regression coefficient in general Gauss–Markoff Model, *Acta. Math. Appl. Sinica.*, 1986, **9**: 251–256 (in Chinese).
[11] Klonecki W. and Zontek S., On the structure of admissible linear estimators, *J. Multivariate Anal.*, 1988, **24**: 11–30.
[12] Zontek S., On characterization of linear admissible of linear admissible estimator: an extension of a result due to C. R. Rao., *J. Multivariate Anal.*, 1987, **23**: 1–12.
[13] Baksalary J. K. and Markiewicz A., Admissible linear estimator in the general Gauss–Markov model, *J. Statist. Plan Inference*, 1988, **19**: 349–359.
[14] Hoffmann K., Admissibility of linear estimation with respect to restricted parameter sets, *Math. Oper. Statist. Ser. Statist.*, 1977, **8**: 425–438.
[15] Mathew T., Admissible linear estimation in sigular models with respect to restricted parameter set, *Commun. Statist. Theory Methods*, 1985, **14**(2): 491–498.
[16] Zhu X. H. and Zhang S. L., Admissible linear estimator in linear model with respect to a restricted set, *Chinese Science Bulletin*, 1989, **34**(2): 805–808 (in Chinese).
[17] Lu C. Y. and Zhu X. H., Admissible linear estimator in linear models, *J. Northeastern Math.*, 1994, **10**: 71–80.
[18] Lu C. Y. and Li W. X., Admissibility of linear estimators in linear model with respect to an incomplete ellipsoidal restriction, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1994, **37**(3): 289–295.
[19] Lu C. Y., Admissibility of inhomogeneous linear estimators in linear model with respect to an incomplete ellipsoidal restriction, *Commun. Statist. Theory Methods*, 1995, **24**(7): 1737–1742.
[20] Lu C. Y., Wu J. H. and Chen X. Q., Admissibility of linear estimator in linear models with respect to an incomplete non-central ellipsoidal restricts, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2006, **49**(5): 985–988.
[21] Lu C. Y. and Shi N. Z., Admissible linear estimation in linear models with respect to inequality constraints, *Linear Algrebra Appl.*, 2002, **354**: 187–194.