第49卷第6期 数学学报中文版 Vol.49, No.6
2006年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Nov., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)06-1411-06 **文献标识码:** **A**

Digraph 代数上的 2- 局部导子

张建华 李红霞

陕西师范大学数学与信息科学学院 西安 710062
E-mail: jhzhang@snnu.edu.cn

摘 要 本文证明了对称 digraph 代数上的每一个 2- 局部导子都是导子, 并给出一个例子说明该结论在非对称 digraph 代数上不成立.

关键词 Digraph 代数; 2- 局部导子; 导子
MR(2000) 主题分类 47B47, 47L35
中图分类 O177.1

2-Local Derivations on Digraph Algebras

Jian Hua ZHANG Hong Xia LI

College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, *P. R. China*
E-mail: jhzhang@snnu.edu.cn

Abstract In this paper, we prove that every 2-local derivation from any symmetric digraph algebra into itself is a derivation. Moreover, we give an example to show that the conclusion may not be true if it has not the condition of symmetry.

Keywords Digraph algebra; 2-local derivation; derivation
MR(2000) Subject Classification 47B47, 47L35
Chinese Library Classification O177.1

1 引言及主要结果

设 $\mathcal{A}$ 是一个代数, $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是一个线性映射. 如果对任意 $A, B \in \mathcal{A}$, 都有 $\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)$, 则称 δ 是代数 $\mathcal{A}$ 上的导子; 如果存在 $S \in \mathcal{A}$, 使得任意 $A \in \mathcal{A}$, 有 $\delta(A) = SA - AS$, 则称 δ 是代数 $\mathcal{A}$ 上的内导子. 称映射 $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (不必线性) 是一个 2- 局部导子; 如果对任意 $A, B \in \mathcal{A}$, 都相应地存在导子 $\phi_{A,B} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (依赖于 A 和 B), 使得 $\phi(A) = \phi_{A,B}(A)$ 且 $\phi(B) = \phi_{A,B}(B)$. 2- 局部导子的概念是由 Šemrl 引入的, 并在无线性和连续的假设下, Šemrl [1] 证明了如果 $\mathcal{H}$ 是一个无限维可分 Hilbert 空间, 那么 $B(\mathcal{H})$ 上的任一 2- 局部导子均为内导子.

复数域 $\mathbf{C}$ 上的代数 $\mathcal{A}$ 称为 n 阶 digraph 代数是指: 它由某些 $n \times n$ 矩阵单位 $\{E_{ij}\}$ (第 i 行第 j 列为 1, 其它为 0) 和所有对角矩阵单位 $\{E_{ii}\}_{i=1}^{n}$ 生成, 并在乘法运算下封闭. 进一步, 如果 $E_{ij} \in \mathcal{A}$ 蕴涵着 $E_{ji} \in \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 为 n 阶对称 digraph 代数. 近 20 年来, 许多学者对此类代数 (如有限维 CSL 代数) 进行了研究, 并获得了大量有趣的结论 [2−5]. 例如: 它包含许多 Hochschild

收稿日期: 2005-07-12; 接受日期: 2005-12-20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10571114), 陕西省自然科学基础研究计划资助项目 (2004A17)

上同群非零的代数, 包含许多代数其自同构不保秩. Crist [3] 讨论了此类代数的局部自同构, 并在文 [2] 中对有限维 CSL 代数上的局部导子进行了研究. 其它有关局部映射的结果请参阅文献 [6] 和 [7].

在文 [3] 中, Crist 提出一个问题: 是否任何 digraph 代数上的 2- 局部自同构一定为自同构. Xie 和 Lu [8] 证明了对称 digraph 代数上的任一 2- 局部自同构一定是自同构, 并给出一个例子说明此结论在非对称 digraph 代数上不成立. 最近, Kim 和 Kim [9] 证明了矩阵代数 $M_n(\mathbf{C})$ 上的任一 2- 局部导子都是内导子. 自然地, 我们要问: 是否任何 digraph 代数上的 2- 局部导子一定为导子? 或者, 怎样的 digraph 代数使得其上的每一个 2- 局部导子均为导子? 本文正是对此问题进行研究, 并得到下列主要结论:

定理 1.1 设 $\mathcal{A}$ 是任一 n 阶对称 digraph 代数, 且 $\phi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是一个 2- 局部导子 (ϕ 不必线性), 那么 ϕ 是一个导子.

2 2- 局部导子

为了方便, 如果 $\mathcal{A}$ 是一个 n 阶 digraph 代数, 我们记:

$$\mathcal{E}=\{(i,j):E_{ij}\in\mathcal{A}\},\quad \mathcal{E}^+=\{(i,j)\in\mathcal{E}:i<j\}.$$

令 $\epsilon_{ij}=1$ 若 $(i,j)\in\mathcal{E}$; $\epsilon_{ij}=0$ 若 $(i,j)\notin\mathcal{E}$.

引理 2.1 设 $\mathcal{A}$ 是一个 n 阶 digraph 代数, 且 $\delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是一个导子, 则存在 $T\in\mathcal{A}$ 和 $S=(s_{ij})\in\mathcal{A}$ 满足 $s_{ii}=0$ $(i=1,2,\dots,n)$ 且当 $E_{ij},E_{jk}\in\mathcal{A}$ 时, 有 $s_{ij}+s_{jk}=s_{ik}$, 使得对任意 $A\in\mathcal{A}$, 有 $\delta(A)=S*A+TA-AT$, 其中 $S*A$ 表示 S 与 A 的 Schur 积.

证明 设 $\mathcal{D}$ 是由 $\{E_{ii}:i=1,2,\dots,n\}$ 生成的 von Neumann 代数且 $\delta_1=\delta|\mathcal{D}$ 为 δ 在 $\mathcal{D}$ 上的限制, 则 δ_1 是从可交换 von Neumann 代数 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{A}$ 的一个导子, 从而由文 [10, 定理 10.8] 知, 存在 $T\in\mathcal{A}$, 使得对任意 $D\in\mathcal{D}$, 有 $\delta_1(D)=TD-DT$. 对任意 $A\in\mathcal{A}$, 我们定义 $\eta(A)=\delta(A)-(TA-AT)$, 则 $\eta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是一个导子且对任意 $D\in\mathcal{D}$, 都有 $\eta(D)=0$. 特别地, 对任意 $i=1,2,\dots,n$, 都有 $\eta(E_{ii})=0$. 设 $E_{ij}\in\mathcal{A}$, 则

$$\eta(E_{ij})=\eta(E_{ii}E_{ij}E_{jj})=E_{ii}\eta(E_{ij})E_{jj}=s_{ij}E_{ij}.\tag{1}$$

这里 $s_{ij}\in\mathbf{C}$. 令 $S=(s_{ij})$, 其中 $s_{ii}=0$, 从而对任意 $A\in\mathcal{A}$, 有 $\eta(A)=S*A$. 当 $E_{ij},E_{jk}\in\mathcal{A}$ 时, 则 $E_{ik}\in\mathcal{A}$, 并由 (1) 式知

$$s_{ik}E_{ik}=\eta(E_{ik})=\eta(E_{ij}E_{jk})=\eta(E_{ij})E_{jk}+E_{ij}\eta(E_{jk})=(s_{ij}+s_{jk})E_{ik}.$$

这说明当 $E_{ij},E_{jk}\in\mathcal{A}$ 时, 有 $s_{ij}+s_{jk}=s_{ik}$. 因此, 对任意 $A\in\mathcal{A}$, 有 $\delta(A)=S*A+TA-AT$. 证毕.

引理 2.2 设$\mathcal{A}$是一个n阶对称 digraph 代数且 $N=\sum_{(i,k)\in\mathcal{E}^+}E_{ik}$ 及 $U=\sum_{(i,k)\in\mathcal{E}^+}u_{ki}E_{ki}$. 如果 $NU-UN$ 是一个严格上三角矩阵, 则 $U=0$.

证明 我们用归纳法证明. 当 $n=1$ 时, 显然该结论成立. 假设 $n=m-1$ 时, 该结论也成立. 当 $n=m$ 时, 令 $\Delta_1=\{s:(1,s)\in\mathcal{E}^+\}$. 以下分两种情形来讨论:

情形 1 如果 $\Delta_1=\emptyset$, 由 U 的定义可知, 对任意 $k=2,3,\dots,m$, 都有 $u_{k1}=0$.

情形 2 如果 $\triangle_1\neq\emptyset$, 令 $\triangle_1=\{j_1,j_2,\dots,j_t\}$ 且 $j_1<j_2<\cdots<j_t$, 则对任意 $k\neq j_1,j_2,\dots,j_t$, 有 $u_{k1}=0$. 由 $\mathcal{A}$ 的对称性可知, 对任意 $i=1,2,\dots,t-1$ 和 $l=1,2,\dots,t-i$, 有 $(j_i,j_{i+l})\in\mathcal{E}^+$. 由于 $NU-UN$ 是严格上三角矩阵, 则 $(NU-UN)E_{11}=0$, 从而 $E_{11}NUE_{11}=0$,

且对任意 $i=1,2,\ldots,t-1$, 都有 $E_{j_ij_i}NUE_{11}=0$. 这说明对任意 $i=1,2,\ldots,t-1$, 有

$$u_{j_11}+u_{j_21}+\cdots+u_{j_t1}=0 \;\text{ 且 }\; u_{j_{i+1}1}+u_{j_{i+2}1}+\cdots+u_{j_t1}=0,$$

于是 $u_{j_11}=u_{j_21}=\cdots=u_{j_t1}=0$, 从而对任意 $k=2,3,\ldots,m$, 都有 $u_{k1}=0$. 因此, N 和 U 分别有下列形式

$$N=\begin{pmatrix} 0 & N_1 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix},$$

这里 $N_2=(I-E_{11})N(I-E_{11})$ 和 $U_2=(I-E_{11})U(I-E_{11})$ 是两个 $(m-1)\times(m-1)$ 矩阵. 容易验证 $N_2U_2-U_2N_2$ 仍是一个严格上三角矩阵, 从而由归纳假设得 $U_2=0$, 进而 $U=0$. 证毕.

引理 2.3 设 $\mathcal{A}$ 是一个 n 阶对称 digraph 代数, $N=\sum_{(i,k)\in\mathcal{E}^+}E_{ik}$ 且 $S=(s_{ij})\in\mathcal{A}$ 满足 $s_{ii}=0(i=1,2,\ldots,n)$ 且当 $E_{ij},E_{jk}\in\mathcal{A}$ 时, 有 $s_{ij}+s_{jk}=s_{ik}$. 如果对 $U=(u_{ij})\in\mathcal{A}$, 有 $NU-UN=S*N$, 则 U 是一个上三角矩阵, 并且对任意 $(i,k)\in\mathcal{E}^+$, 有 $s_{ik}=u_{kk}-u_{ii}$.

证明 设 $U_1=\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}^+}u_{ji}E_{ji}$ 且 $U_2=\sum_{k=1}^n u_{kk}E_{kk}+\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}^+}u_{ij}E_{ij}$. 显然, $U=U_1+U_2$ 且 $NU_1-U_1N=S*N+(U_2N-NU_2)$ 是一个严格上三角矩阵, 从而由引理 2.2 得 $U_1=0$. 这说明 U 是一个上三角矩阵.

以下我们将证明: 对任意 $(i,k)\in\mathcal{E}^+$, 有 $s_{ik}=u_{kk}-u_{ii}$.

断言 1 如果 $(i,k)\in\mathcal{E}^+$, 使得对任一满足 $i<t<k$ 的 t, 都有 $(i,t)\notin\mathcal{E}^+$, 则 $s_{ik}=u_{kk}-u_{ii}$.

由于 U 是一个上三角矩阵, 从而

$$\begin{aligned} s_{ik}E_{ik}&=E_{ii}(NU-UN)E_{kk}=E_{ii}NUE_{kk}-E_{ii}UNE_{kk}\\ &=E_{ii}N\left(u_{ik}E_{ik}+u_{kk}E_{kk}+\sum_{t<k,\,t\neq i}\epsilon_{tk}u_{tk}E_{tk}\right)-E_{ii}U\left(E_{ik}+\sum_{t<k,\,t\neq i}\epsilon_{tk}E_{tk}\right)\\ &=u_{kk}E_{ik}+\sum_{t<k,\,t\neq i}\epsilon_{tk}u_{tk}E_{ii}NE_{tk}-u_{ii}E_{ik}-\sum_{t<k,\,t\neq i}\epsilon_{tk}E_{ii}UE_{tk}\\ &=(u_{kk}-u_{ii})E_{ik}+\sum_{i<t<k}\epsilon_{it}\epsilon_{tk}u_{tk}E_{ik}-\sum_{i<t<k}\epsilon_{it}\epsilon_{tk}u_{it}E_{ik}. \end{aligned}$$

又, 对任一满足 $i<t<k$ 的 t, 都有 $(i,t)\notin\mathcal{E}^+$, 则对任一满足 $i<t<k$ 的 t, 都有 $\epsilon_{it}\epsilon_{tk}=0$, 于是由上式可得 $s_{ik}=u_{kk}-u_{ii}$.

由断言 1, 不失一般性, 以下假设对任意 $(i,k)\in\mathcal{E}^+$ 总存在 t 且 $i<t<k$, 使得 $(i,t)\in\mathcal{E}^+$.

断言 2 如果 $(i,k)\in\mathcal{E}^+$ 满足存在唯一 t 且 $i<t<k$, 使得 $(i,t)\in\mathcal{E}^+$, 则 $s_{ik}=u_{kk}-u_{ii}$.

由 $\mathcal{A}$ 的对称性, 则 $(t,k)\in\mathcal{E}^+$, 从而由断言 1, $s_{it}=u_{tt}-u_{ii}$ 且 $s_{tk}=u_{kk}-u_{tt}$. 由此我们有 $s_{ik}=s_{it}+s_{tk}=u_{kk}-u_{ii}$.

断言 3 如果 $(i,k)\in\mathcal{E}^+$, 使得对某些 t 且 $i<t<k$, 都有 $(i,t)\in\mathcal{E}^+$, 则 $s_{ik}=u_{kk}-u_{ii}$.

我们记 $\Delta_h=\{s:(h,s)\in\mathcal{E}^+\}$ $(h=1,2,\ldots,n-1)$. 设 $t_1=\min\{s\in\Delta_i:s<t\}$ 且 $t_j=\min\{s\in\Delta_i:t_{j-1}<s<t\}$ $(j=2,3,\ldots,m)$, 则 $t_1<t_2<\cdots<t_m<t_{m+1}=t$, 并由 $\mathcal{A}$ 的对称性可知, 对任一 $j=1,2,\ldots,m$, 都有 $(i,t_j),(t_j,t_{j+1})\in\mathcal{E}^+$. 由断言 2, 我们有

$$s_{it_2}=u_{t_2t_2}-u_{ii}. \tag{2}$$

由于 $(i,t_1),(t_1,t_3)\in\mathcal{E}^+$ 且 $i<t_1<t_2<t_3$, 从而由断言 1 和断言 2, 我们有 $s_{it_1}=u_{t_1t_1}-u_{ii}$ 且 $s_{t_1t_3}=u_{t_3t_3}-u_{t_1t_1}$, 于是

$$s_{it_3}=u_{t_3t_3}-u_{ii}. \tag{3}$$

依此下去, 我们可得

$$s_{it} = u_{tt} - u_{ii}. \tag{4}$$

设 $k_1 = \min\{s \in \Delta_t : s < k\}$ 且 $k_j = \min\{s \in \Delta_t : k_{j-1} < s < k\}$ $(j = 2, 3, \dots, l)$, 则 $k_1 < k_2 < \cdots < k_l < k_{l+1} = k$, 并由 $\mathcal{A}$ 的对称性可知, 对任一 $j = 1, 2, \dots, l$, 都有

$$(t, k_j), (k_j, k_{j+1}) \in \mathcal{E}^+.$$

类似与以上的讨论, 我们可得

$$s_{tk} = u_{kk} - u_{tt}. \tag{5}$$

由 (4) 和 (5) 式, 因此, $s_{ik} = s_{it} + s_{tk} = u_{kk} - u_{ii}$. 证毕.

定理 1.1 的证明 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 的一组标准基. 定义矩阵 $A, N \in \mathcal{A}$ 如下

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} E_{ii}, \quad N = \sum_{(i,k) \in \mathcal{E}^+} E_{ik}.$$

令 $\varphi = \phi - \phi_{A,N}$, 则 φ 是一个 2- 局部导子且 $\varphi(A) = \varphi(N) = 0$. 由引理 2.1, 对任一 $X \in \mathcal{A}$, 存在 $T = (t_{ij}), V = (v_{ij}) \in \mathcal{A}$ (依赖于 X 和 A) 且 $v_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. 当 $E_{ij}, E_{jk} \in \mathcal{A}$ 时, 有 $v_{ij} + v_{jk} = v_{ik}$, 以及存在 $U = (u_{ij})$, $S = (s_{ij}) \in \mathcal{A}$ (依赖于 X 和 N) 且 $s_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$; 当 $E_{ij}, E_{jk} \in \mathcal{A}$ 时, 有 $s_{ij} + s_{jk} = s_{ik}$, 使得

$$\varphi(X) = V * X + TX - XT, \tag{6}$$

$$V * A + TA - AT = 0, \tag{7}$$

且

$$\varphi(X) = S * X + UX - XU, \tag{8}$$

$$S * N + UN - NU = 0. \tag{9}$$

由于 A 是一个对角阵且对任意 $i = 1, 2, \dots, n$, 有 $v_{ii} = 0$, 从而由 (7) 式, $TA - AT = 0$, 于是存在 $\lambda_i \in \mathbf{C}$ (依赖于 X 和 A), 使得

$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{ii}. \tag{10}$$

由 (6) 和 (10) 式, 则对任意 $i = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\varphi(E_{ii}) = 0. \tag{11}$$

设 $(i, k) \in \mathcal{E}^+$, 由 (9) 式和引理 2.3 知: U 是一个上三角矩阵, 并且 $s_{ik} = u_{kk} - u_{ii}$, 从而由 (8) 式, 可得

$$\begin{aligned}
\varphi(E_{ik}) &= s_{ik} E_{ik} + U E_{ik} - E_{ik} U \\
&= s_{ik} E_{ik} + \left(\sum_{j=1}^{n} u_{jj} E_{jj} + \sum_{s<t} \epsilon_{st} u_{st} E_{st} \right) E_{ik} - E_{ik} \left(\sum_{j=1}^{n} u_{jj} E_{jj} + \sum_{s<t} \epsilon_{st} u_{st} E_{st} \right) \\
&= s_{ik} E_{ik} + \left(u_{ii} E_{ik} + \sum_{s<i} \epsilon_{si} u_{si} E_{sk} \right) - \left(u_{kk} E_{ik} + \sum_{t>k} \epsilon_{kt} u_{kt} E_{it} \right) \\
&= (s_{ik} + u_{ii} - u_{kk}) E_{ik} + \sum_{s<i} \epsilon_{si} u_{si} E_{sk} - \sum_{t>k} \epsilon_{kt} u_{kt} E_{it} \\
&= \sum_{s<i} \epsilon_{si} u_{si} E_{sk} - \sum_{t>k} \epsilon_{kt} u_{kt} E_{it}.
\end{aligned}$$

这说明 $\varphi(E_{ik})$ 的第 i 行第 k 列是 0. 另一方面, 由 (6) 和 (10) 式, 我们有

$$\varphi(E_{ik}) = V * E_{ik} + TE_{ik} - E_{ik}T = (v_{ik} + \lambda_i - \lambda_k)E_{ik}.$$

因此

$$\varphi(E_{ik}) = 0. \tag{12}$$

对任意 $(i,k) \in \mathcal{E}^+$, 由 (8) 式和引理 2.3 以及 $s_{ik} = -s_{ki}$, 我们可得

$$\begin{aligned}\varphi(E_{ki}) &= s_{ki}E_{ki} + UE_{ki} - E_{ki}U \\ &= s_{ki}E_{ki} + \left(\sum_{j=1}^{n} u_{jj}E_{jj} + \sum_{s<t} \epsilon_{st}u_{st}E_{st}\right)E_{ki} - E_{ki}\left(\sum_{j=1}^{n} u_{jj}E_{jj} + \sum_{s<t} \epsilon_{st}u_{st}E_{st}\right) \\ &= (s_{ki} + u_{kk} - u_{ii})E_{ki} + \sum_{s<k} \epsilon_{sk}u_{sk}E_{si} - \sum_{t>i} \epsilon_{it}u_{it}E_{kt} \\ &= \sum_{s<k} \epsilon_{sk}u_{sk}E_{si} - \sum_{t>i} \epsilon_{it}u_{it}E_{kt}.\end{aligned}$$

这说明 $\varphi(E_{ki})$ 的第 k 行第 i 列是 0. 另一方面, 由 (6) 和 (10) 式, 我们有

$$\varphi(E_{ki}) = V * E_{ki} + TE_{ki} - E_{ki}T = (v_{ki} + \lambda_k - \lambda_i)E_{ki}.$$

于是

$$\varphi(E_{ki}) = 0. \tag{13}$$

由 (11)–(13) 式, 因此对任意 $E_{ij} \in \mathcal{A}$, 都有 $\varphi(E_{ij}) = 0$. 由于 E_{ij} 是一秩算子 $e_i \otimes e_j$, 则对任意 $X \in \mathcal{A}$, 我们有

$$E_{ij}\varphi(X)E_{ij} = \varphi_{E_{ij},X}(E_{ij}XE_{ij}) = \langle Xe_i, e_j\rangle\varphi_{E_{ij},X}(E_{ij}) = \langle Xe_i, e_j\rangle\varphi(E_{ij}) = 0.$$

于是 $\langle\varphi(X)e_i, e_j\rangle E_{ij} = 0$, 从而对任意 $(i,j) \in \mathcal{E}$, 有

$$\langle\varphi(X)e_i, e_j\rangle = 0. \tag{14}$$

设 $\varphi(X) = (c_{ij}) \in \mathcal{A}$, 则由 (14) 式, 对任意 $(i,j) \in \mathcal{E}$, 都有 $c_{ji} = 0$. 由 $\mathcal{A}$ 的对称性, 于是对任意 $X \in \mathcal{A}$, 有 $\varphi(X) = 0$. 因此, $\phi = \phi_{A,N}$ 是一个导子. 证毕.

3 一个例子

在文 [8] 中, Xie 和 Lu 给出一个例子说明非对称 digraph 代数上的 2- 局部自同构不一定是自同构. 本节给出以下例子说明非对称 digraph 代数上的 2- 局部导子不一定是导子.

例 3.1 存在非对称的 digraph 代数其上的 2- 局部导子不一定是导子.

设 $\{E_{ij}\}$ 是 $M_2(\mathbf{C})$ 中的标准矩阵单位, 且 $\mathcal{A}$ 是由 $\{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$ 生成的代数. 显然, $\mathcal{A}$ 是一个非对称的 digraph 代数. 记

$$\mathcal{R} = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{A} : a_{11} \neq a_{22}\}, \quad \mathcal{F} = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{A} : a_{11} = a_{22}\}.$$

对任一 $A = (a_{ij}) \in \mathcal{A}$, 定义

$$\phi(A) = \begin{cases} 0, & A \in \mathcal{R}, \\ 2a_{12}E_{12}, & A \in \mathcal{F}, \end{cases}$$

则 $\phi(E_{11} + E_{12}) = 0$ 且 $\phi(E_{11}) + \phi(E_{12}) = 2E_{12}$, 从而

$$\phi(E_{11} + E_{12}) \neq \phi(E_{11}) + \phi(E_{12}),$$

这说明 ϕ 不是导子.

以下将证明 ϕ 是一个 2- 局部导子.

如果 $A, B \in \mathcal{R}$, 对任意 $X \in \mathcal{A}$, 定义 $\phi_1(X) = 0$. 显然, ϕ_1 是一个导子. 同时, 我们有 $\phi(A) = \phi_1(A)$ 且 $\phi(B) = \phi_1(B)$.

如果 $A, B \in \mathcal{F}$, 对任意 $X = (x_{ij}) \in \mathcal{A}$, 定义

$$\phi_2(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

则 ϕ_2 是一个导子. 同时, 我们有 $\phi(A) = \phi_2(A)$ 且 $\phi(B) = \phi_2(B)$.

如果 $A \in \mathcal{F}$ 且 $B \in \mathcal{R}$, 对任意 $X = (x_{ij}) \in \mathcal{A}$, 定义

$$\phi_3(X) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2b_{12}}{b_{11} - b_{22}} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2b_{12}}{b_{11} - b_{22}} \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

则 ϕ_3 是一个导子. 同时, 我们有 $\phi(A) = \phi_3(A)$ 且 $\phi(B) = \phi_3(B)$.

如果 $A \in \mathcal{R}$ 且 $B \in \mathcal{F}$, 对任意 $X = (x_{ij}) \in \mathcal{A}$, 定义

$$\phi_4(X) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

则 ϕ_4 是一个导子. 同时, 我们有 $\phi(A) = \phi_4(A)$ 且 $\phi(B) = \phi_4(B)$. 因此, ϕ 是一个 2- 局部导子, 但不是导子.

参 考 文 献

[1] Šemrl P., Local automorphisms and derivations on $B(H)$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1997, **125**: 2677–2680.

[2] Crist R., Local derivations on operator algebras, *J. Funct. Anal.*, 1996, **135**: 76–92.

[3] Crist R., Local automorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 1999, **128**: 1409–1414.

[4] Davidson K., Power S., Isometric automorphisms and homology for non-self-adjoint operator algebras, *Quart. J. Math. Oxford, Ser.,* 1991, **42**: 271–192.

[5] Gilfeather F., Moore R., Isomorphisms of certain CSL algebras, *J. Funct. Anal.,* 1986, **66**: 264–291.

[6] Hadwin D., Li J. K., Local derivations and local automorphisms, *J. Math. Anal. Appl.,* 2004, **290**: 702–714.

[7] Molnăr L., Local automorphisms of operator algebras on Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 2003, **131**: 1867–1874.

[8] Xie J., Lu F., A note on 2-local automorphisms of digraph algebras, *Linear Algebra and Appl.,* 2004, **378**: 93–98.

[9] Kim S., Kim J., Local automorphisms and derivations on M_n, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 2003, **132**: 1389–1392.

[10] Davidson K., Nest algebras, Pitman Reseach Notes in Mathematics Series 191, Longman Scientific and Technical, 1988.