文章编号: 0583-1431(2006)06-1417-08 **文献标识码:** **A**

半参数回归模型小波估计的强相合性

胡宏昌

武汉大学数学与统计学院 武汉 430072
湖北师范学院数学系 黄石 435002
E-mail: retutome@163.com

胡迪鹤

武汉大学数学与统计学院 武汉 430072

摘 要 考虑半参数回归模型 $y_i^{(n)}=X_i^{(n)T}\beta+g(t_i^{(n)})+\varepsilon_i^{(n)}$ $(1\le i\le n)$, 其中 $\beta\in R^d$ 为未知参数, $g(t)$ 为 $[0,1]$ 上的未知 Borel 函数, $X_i^{(n)}$ 为 R^d 上的随机设计, 随机误差序列 $\{\varepsilon_i^{(n)}\}$ 为鞅差序列, $\{t_i^{(n)}\}$ 为 $[0,1]$ 上的常数序列. 本文用小波的方法得到 β、$g(t)$ 的估计量分别为 $\hat\beta_n$、$\hat g_n(t)$, 并证明了它们的强相合性.

关键词 半参数回归模型; 鞅差序列; 强相合性
MR(2000) 主题分类 62G05, 62G20, 60G42
中图分类 O212.1

Strong Consistency of Wavelet Estimation in Semiparametric Regression Models

Hong Chang HU

School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072*, P. R. China*
Department of Mathematics, Hubei Normal University, Huangshi 435002*, P. R. China*
E-mail: retutome@163.com

Di He HU

School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072*, P. R. China*

Abstract Consider the semiparametric regression model $y_i^{(n)}=X_i^{(n)T}\beta+g(t_i^{(n)})+\varepsilon_i^{(n)}$ $(1\le i\le n)$ where β is a $d\times 1$ unknown parametric vector, $g(t)$ is an unknown Borel function on $[0,1]$, $X_i^{(n)}$ is a $d\times 1$ random design vector, random error sequences $\{\varepsilon_i^{(n)}\}$ are martingale difference sequences, $\{t_i^{(n)}\}$ is a constant sequence on $[0,1]$. In this paper, the estimators of parameter and nonparameter are established by wavelet method, and the strong consistency of wavelet estimators is studied.

Keywords semiparametric regression model; martingale sequences; wavelet estimation
MR(2000) Subject Classification 62G05, 62G20, 60G42
Chinese Library Classification O212.1

收稿日期: 2005-03-12; 修改日期: 2005-05-24; 接受日期: 2006-01-10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (40274005);
湖北省创新团队资助项目; 湖北省教育厅科学技术研究资助项目 (Q200622001)

1 引言及引理

由于在不少实际问题中, 半参数回归模型更接近于真实, 因而引起了广泛的注意, 并取得了大量相当深入的研究结果 [1–9]. 文 [3–6] 用小波的方法研究了半参数回归模型, 得到了估计量的重要的大样本性质, 但这些结果是在 "误差序列 $\{\varepsilon_i^{(n)}\}$ 独立同分布" 条件下得到的; 当误差为鞅差序列情形, 文 [7] 用近邻估计的方法研究了半参数回归模型, 得到了理想的结果; 文 [8] 用小波的方法讨论误差为鞅差情形的半参数回归模型的稳定地依分布收敛性. 本文继续用小波的方法研究误差为鞅差序列情形的半参数回归模型, 得到了参数及非参数估计量的强相合性.

考虑半参数回归模型

$$y_i^{(n)} = X_i^{(n)T}\beta + g(t_i^{(n)}) + \varepsilon_i^{(n)}, \quad 1 \le i \le n, \tag{1.1}$$

其中 $\beta \in R^d$ 为未知参数, $g(t)$ 为 $[0,1]$ 上的未知 Borel 函数, $X_i^{(n)}$ 为 R^d 上的随机设计, 随机误差 $\{\varepsilon_i^{(n)}, F_{ni}, i \le n\}$ 为鞅差序列, $\{t_i^{(n)}\}$ 为 $[0,1]$ 上的常数.

采用文献 [9] 的假定:

$$X_{ir}^{(n)} = f_r(t_i^{(n)}) + \eta_{ir}^{(n)}, \quad 1 \le i \le n, \quad 1 \le r \le d. \tag{1.2}$$

其中 $f_r(\cdot)$ 为 $[0,1]$ 上的未知函数, 诸 $\overline{\eta}_i^{(n)} = (\eta_{i1}^{(n)}, \ldots, \eta_{id}^{(n)})^T$ 独立同分布, $\{\eta_{ir}^{(n)}\}$ 与 $\{\varepsilon_i^{(n)}\}$ 相互独立, 且

$$E\overline{\eta}_i^{(n)} = 0, \quad \mathrm{cov}(\overline{\eta}_i^{(n)}) = V, \tag{1.3}$$

这里 $V = (V_{ij})$ 为 d 阶正定矩阵.

下面使用文献 [5] 的方法估计 β 及 $g(t)$. 设有一个给定的刻度函数 $\phi(x) \in S_l$ (阶为 l 的 Schwartz 空间), 相伴 $L^2(R)$ 的多尺度分析为 V_m, 其再生核为

$$E_m(t,s) = 2^m E_0(2^m t, 2^m s) = 2^m \sum_{k\in Z} \phi(2^m t - k)\phi(2^m s - k),$$

其中 Z 为整数.

记 $A_i = [s_{i-1}, s_i]$ 是 $[0,1]$ 上的分割且 $t_i \in A_i, 1 \le i \le n$. 先假定 β 已知, 定义 $g(\cdot)$ 的估计为

$$\hat{g}_0(t,\beta) = \sum_{i=1}^n (y_i^{(n)} - X_i^{(n)T}\beta) \int_{A_i} E_m(t,s)ds;$$

接着求解极值问题

$$\sum_{i=1}^n (y_i^{(n)} - X_i^{(n)T}\beta - \hat{g}_0(t_i^{(n)},\beta))^2 = \min,$$

记其解为 $\hat{\beta}_n$; 然后定义 $g(t)$ 的线性小波估计为

$$\hat{g}_n(t) = \hat{g}_0(t,\hat{\beta}_n) = \sum_{i=1}^n (y_i^{(n)} - X_i^{(n)T}\beta) \int_{A_i} E_m(t,s)ds.$$

若令 $X = (X_{ir}^{(n)})_{n\times d}$, $Y = (y_1^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)})^T$, $g = (g(t_1^{(n)}), \ldots, g(t_n^{(n)}))^T$, $S = (S_{ij})_{n\times n}$, $S_{ij} = \int_{A_j} E_m(t_i^{(n)}, s)ds$, $\varepsilon = (\varepsilon_1^{(n)}, \ldots, \varepsilon_n^{(n)})^T$, $\widetilde{X} = (I-S)X$, $\widetilde{Y} = (I-S)Y$, 则易得

$$\hat{\beta}_n = (\widetilde{X}^T\widetilde{X})^{-1}\widetilde{X}^T\widetilde{Y}; \tag{1.4}$$

$$\hat{g}_n = S(Y - X\hat{\beta}), \tag{1.5}$$

其中 $\hat{g}_n = (\hat{g}(t_1), \ldots, \hat{g}(t_n))^T$ 为 g 的估计.

以下是本文的基本假设:

(A_1) $g(\cdot), f_r(\cdot) \in H^\alpha$ (阶为 α 的 Sobolev 空间), $\alpha > 1/2$, $1 \le r \le d$;

(A_2) $g(\cdot), f_r(\cdot) \in H^\alpha$ 满足 γ 阶 Lipschitz 条件, $\gamma > 0$, $1 \le r \le d$;

(A_3) $\phi(\cdot)\in S_l$ (阶为 l 的 Schwartz 空间) $l\geq\alpha$; ϕ 满足 1 阶 Lipschitz 条件且具有紧支撑, 当 $\xi\to 0$ 时, $|\hat{\phi}(\xi)-1|=O(\xi)$, 其中 $\hat{\phi}$ 为 ϕ 的 Fourier 变换;

(A_4) $\max_{1\leq i\leq n}(s_i-s_j)=O(n^{-1})$, 且 $2^m=O(n^{1/3})$.

引理 1.1[5] 若条件 (A_3) 成立, 则有

(I) $|E_0(t,s)|\leq\frac{C_k}{(1+|t-s|)^k}$, $|E_m(t,s)|\leq\frac{2^mC_k}{(1+2^m|t-s|)^k}$ (其中 $k\in N$, $C_k\in R$);

(II) $\sup_{0\leq s\leq 1}|E_m(t,s)|=O(2^m)$;

(III) $\sup_t\int_0^1|E_m(t,s)|ds\leq C$.

引理 1.2[10] 设 $\{S_i,F_i,\ i\geq 1\}$ 为鞅序列, 则对 $\forall\, r>2$, 有

$$E\Big(\max_{1\leq i\leq n}|S_i|^r\Big)\leq 2C_{r_2}\bigg(\sum_{i=1}^n(E|X_i|^r)^{\frac{2}{r}}\bigg)^{\frac{r}{2}}. \tag{1.6}$$

若进一步假设存在 $0<\alpha<2$ 和正常数列 $\{M_n,n\geq 1\}$, 使 $\sum_{i=1}^n E(|X_i|^\alpha|F_{i-1})\leq M_n$ a.s., 则对 $\forall\, r>2$, 有

$$E\Big(\max_{1\leq i\leq n}|S_i|^r\Big)\leq\frac{2+r^2}{\alpha}C_{r_1}\sum_{i=1}^n E|X_i|^r+C_{r_2}^{\frac{2}{r}}M_n^{\frac{r}{\alpha}}, \tag{1.7}$$

其中 $C_{r_1}=(\frac{r}{r-1})^r2^{r-3}r$, $C_{r_2}=(C_{r_2}r)^{\frac{r}{2}}$.

引理 1.3[11] 设 $\{T_n,n\geq 1\}$ 为随机变量序列, 且 $\sum_{n=1}^\infty E|T_n|^q<\infty$ $(q>0)$, 则

$$T_n\longrightarrow 0\ \ \text{a.s.}\ \ (n\to\infty).$$

引理 1.4 设 $\{\varepsilon_i^{(n)},F_{ni},\ i\leq n\}$ 为鞅差序列, $\sup_i E|\varepsilon_i^{(n)}|^q<\infty$, $q>2$, 且设 $\exists\, u\in(\frac12+\frac1q,1)$, 使 $\sup_i\int_{A_i}|E_m(t,s)|ds=O(n^{-u})$, 则

$$\sum_{i=1}^n\varepsilon_i^{(n)}\int_{A_i}E_m(t,s)ds\longrightarrow 0\quad\text{a.s.},\quad n\to\infty. \tag{1.8}$$

证明 当 $q>2$ 时, 由引理 1.2 中的 (1.6) 式, 得

$$\begin{aligned}E\bigg|\sum_{i=1}^n\varepsilon_i^{(n)}\int_{A_i}E_m(t,s)ds\bigg|^q&\leq C\bigg(\sum_{i=1}^n\Big(\int_{A_i}E_m(t,s)ds\Big)^2(E|\varepsilon_i^{(n)}|^q)^{\frac{2}{q}}\bigg)^{\frac{q}{2}}\\&\leq C\bigg(\sum_{i=1}^n\Big(\int_{A_i}E_m(t,s)ds\Big)^2\bigg)^{\frac{q}{2}}\leq Cn^{\frac{(1-2u)q}{2}},\end{aligned}$$

从而 $\sum_{n=1}^\infty E|\sum_{i=1}^n\varepsilon_i^{(n)}\int_{A_i}E_m(t,s)ds|^q<\infty$, 故由引理 1.3 知

$$\sum_{i=1}^n\varepsilon_i^{(n)}\int_{A_i}E_m(t,s)ds\longrightarrow 0\quad\text{a.s.},\quad n\to\infty.$$

2 主要结果及其证明

下文证明过程中 C 表示任意常数, 即使在同一式子中也可能不同.

定理 2.1 设 $\{\varepsilon_i^{(n)},F_{ni},\ i\leq n\}$ 为鞅差序列, $\sup_i E|\varepsilon_i^{(n)}|^q<\infty$, $q>2$, $E|\eta_{1j}|^{\frac32+\delta}<\infty$ (δ>0, $j=1,2,\ldots,d$), 且条件 (A_1)–(A_4) 成立. 又设 $\exists\, u\in(\frac12+\frac1q,1)$, 使 $\sup_i\int_{Ai}|E_m(t,s)|ds=O(n^{-u})$, 则 $\hat{\beta}_n\longrightarrow\beta$ a.s., $n\to\infty$.

证明 令 $\widetilde{\varepsilon}=(I-S)\varepsilon$, $\widetilde{g}=(I-S)g$, 则

$$\hat{\beta}_n-\beta=\big(n^{-1}\widetilde{X}^T\widetilde{X}\big)^{-1}\big(n^{-1}\widetilde{X}^T\widetilde{g}+n^{-1}\widetilde{X}^T\widetilde{\varepsilon}\big). \tag{2.1}$$

首先证明 $n^{-1}\widetilde{X}^T\widetilde{X}$ 的第 (i,j) 元素

$$\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\widetilde{X}_{hi}\widetilde{X}_{hj}\longrightarrow V_{ij}\quad \text{a.s.},\quad (n\to\infty). \tag{2.2}$$

事实上, 由于 $f_r(\cdot)$ 满足 γ 阶 Lipschitz 条件, 故

$$\begin{aligned}&\sup_i\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t,s)ds\right)f_j(t_k)-\int_0^1 E_m(t,s)f_j(s)ds\right|\\&=\sup_i\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}E_m(t,s)(f_j(t_k)-f_j(s))ds\right|=O(n^{-\gamma}).\end{aligned} \tag{2.3}$$

由文献 [12] 中定理 3.2 的证明知

$$\sup_t\left|f_j(t)-\int_0^1 E_m(t,s)f_j(s)ds\right|=O(\tau_m), \tag{2.4}$$

其中

$$\tau_m=\begin{cases}(2^{-m})^{\frac{\alpha-1}{2}}, & \frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{2};\\ \frac{\sqrt{m}}{2^m}, & \alpha=\frac{3}{2};\\ 2^{-m}, & \alpha>\frac{3}{2}.\end{cases}$$

由 (2.3) 式及 (2.4) 式可得

$$\sup_i\left|f_j(t)-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t,s)ds\right)f_j(t_k)\right|=O(n^{-\gamma})+O(\tau_m). \tag{2.5}$$

$n^{-1}\widetilde{X}^T\widetilde{X}$ 的第 (i,j) 元素

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\widetilde{X}_{hi}\widetilde{X}_{hj}\\
&=\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(f_i(t_h)-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)dsf_i(t_k)\right)+\eta_{hi}-\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}(E_m(t_h,s)ds)\eta_{ki}\right)\\
&\quad\cdot\left(f_j(t_h)-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)dsf_j(t_k)\right)+\eta_{hj}-\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}(E_m(t_h,s)ds)\eta_{kj}\right)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(f_i(t_h)-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)dsf_i(t_k)\right)\right)\left(\eta_{hj}-\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}(E_m(t_h,s)ds)\eta_{kj}\right)\\
&\quad+\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(f_j(t_h)-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)dsf_j(t_k)\right)\right)\left(\eta_{hi}-\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}(E_m(t_h,s)ds)\eta_{ki}\right)\\
&\quad+\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(f_i(t_h)-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)dsf_i(t_k)\right)\right)\left(f_j(t_h)-\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}(E_m(t_h,s)ds)f_j(t_k)\right)\\
&\quad+\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(\eta_{hi}-\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}E_m(t_h,s)ds\eta_{ki}\right)\left(\eta_{hj}-\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}(E_m(t_h,s)ds)\eta_{kj}\right)\\
&=:U_1+U_2+U_3+U_4.\end{aligned} \tag{2.6}$$

由文献 [5] 引理 4(i) 的 (2.4) 式易知

$$\sup_t\left|\sum_{k=1}^{n}\eta_{kj}\int_{A_k}E_m(t,s)ds\right|=o(1),\quad \text{a.s.} \tag{2.7}$$

由 (2.5) 式、(2.7) 式及强大数定理知

$$\begin{aligned}|U_1| \leq & \max_{1\leq h\leq n}\left|f_i(t_h)-\sum_{k=1}^n\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)dsf_i(t_k)\right)\right| \\ & \cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{h=1}^n|\eta_{hj}|+\sup_h\left|\sum_{h=1}^n\eta_{kj}\int_{A_k}E_m(t_h,s)ds\right|\right) \\ = & O(n^{-\gamma})+O(\tau_m) \quad \text{a.s.} \end{aligned} \tag{2.8}$$

同理可得

$$|U_2| = O(n^{-\gamma})+O(\tau_m) \quad \text{a.s.} \tag{2.9}$$

由 (2.5) 式得

$$U_3 = O(n^{-2\gamma})+O(\tau_m^2) \tag{2.10}$$

由 (2.7) 式及 (1.3) 式得

$$U_4 = V_{ij}+o(1) \tag{2.11}$$

由 (2.6), (2.8)–(2.11) 式得 $\frac{1}{n}\sum_{h=1}^n\widetilde{X}_{hi}\widetilde{X}_{hj}\longrightarrow V_{ij}\quad \text{a.s.}\quad (n\to\infty)$.

其次, 可以证明 $n^{-1}\widetilde{X}^T\widetilde{g}$ 的第 i 元素

$$\frac{1}{n}\sum_{h=1}^n\widetilde{X}_{hi}\widetilde{g}_h = O(n^{-\gamma})+O(\tau_m) \quad \text{a.s.} \quad (n\to\infty)' \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{h=1}^n\widetilde{X}_{hi}\widetilde{g}_h = & \frac{1}{n}\sum_{h=1}^n\left(X_{hi}-\sum_{k=1}^nS_{hk}X_{ki}\right)\left(g(t_h)-\sum_{r=1}^nS_{hr}g(t_r)\right) \\ = & \frac{1}{n}\sum_{h=1}^n\left(\eta_{hi}-\sum_{k=1}^nS_{hk}\eta_{ki}\right)\left(g(t_h)-\sum_{r=1}^nS_{hr}g(t_r)\right) \\ & +\frac{1}{n}\sum_{h=1}^n\left(f_i(t_h)-\sum_{k=1}^nS_{hk}f_i(t_k)\right)\left(g(t_h)-\sum_{r=1}^nS_{hr}g(t_r)\right) \\ =: & J_1+J_2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

由于

$$|J_1| \leq \left(\max_{1\leq h\leq n}\left|g(t_h)-\sum_{r=1}^nS_{hr}g(t_r)\right|\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{h=1}^n|\eta_{hi}|+\max_{1\leq h\leq n}\left|\sum_{k=1}^nS_{hk}\eta_{ki}\right|\right), \tag{2.14}$$

所以由强大数定理及 (2.7)、(2.5) 式, 可得

$$|J_1| = O(n^{-\gamma})+O(\tau_m). \tag{2.15}$$

又由 (2.5) 式易得

$$J_2 = O(n^{-2\gamma})+O(\tau_m^2), \tag{2.16}$$

故由 (2.13), (2.15) 式及 (2.16) 式即得 (2.12) 式成立.

最后, 可以证明

$$n^{-1}\widetilde{X}^T\widetilde{\varepsilon}\longrightarrow 0 \quad \text{a.s.,} \quad n\to\infty. \tag{2.17}$$

事实上 (为方便起见, 记 $\varepsilon_i^{(n)} = \varepsilon_i$, $F_{n,i} = F_i$, 以下同), $n^{-1}\widetilde{X}^T\widetilde{\varepsilon}$ 的第 i 元素为

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\widetilde{X}_{hi}\widetilde{\varepsilon}_h &= \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(X_{hi}-\sum_{k=1}^{n}S_{hk}X_{ki}\right)\left(\varepsilon_h-\sum_{r=1}^{n}S_{hr}\varepsilon_r\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(\eta_{hi}-\sum_{k=1}^{n}S_{hk}\eta_{ki}\right)\left(\varepsilon_h-\sum_{r=1}^{n}S_{hr}\varepsilon_r\right)\\ &\quad+\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(f_i(t_h)-\sum_{k=1}^{n}S_{hk}f_i(t_k)\right)\left(\varepsilon_h-\sum_{r=1}^{n}S_{hr}\varepsilon_r\right)\\ &=: T_1+T_2. \end{aligned}\tag{2.18}$$

令 $\varepsilon_{ni}=\varepsilon_i I\big(|\varepsilon_i|\le n^{\frac{1}{q}}\big)$, $\widetilde{\eta}_{ni}=\varepsilon_i I\big(|\varepsilon_i|>n^{\frac{1}{q}}\big)$, $y_{ni}=\varepsilon_{ni}-E(\varepsilon_{ni}|F_{i-1})$, $z_{ni}=\widetilde{\eta}_{ni}-E(\widetilde{\eta}_{ni}|F_{i-1})$, 则

① $y_{ni}+z_{ni}=\varepsilon_{ni}-E(\varepsilon_{ni}|F_{i-1})+\widetilde{\eta}_{ni}-E(\widetilde{\eta}_{ni}|F_{i-1})=\varepsilon_{ni}+\widetilde{\eta}_{ni}-E((\varepsilon_{ni}+\widetilde{\eta}_{ni})|F_{i-1})=\varepsilon_i$

② $\{y_{ni},F_i,i\le n\}$ 仍为鞅差, $\sup_i E|y_{ni}|^q<\infty$, $|y_{ni}|\le 2n^{\frac{1}{q}}$.

$$T_1=\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(\eta_{hi}-\sum_{k=1}^{n}S_{hk}\eta_{ki}\right)\varepsilon_h-\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(\eta_{hi}-\sum_{k=1}^{n}S_{hk}\eta_{ki}\right)\sum_{r=1}^{n}S_{hr}\varepsilon_r=:T_1^{(1)}+T_1^{(2)}.\tag{2.19}$$

由定理的已知条件及 (2.7) 式易得

$$T_1^{(1)}\longrightarrow 0\quad \text{a.s.},\quad n\to\infty.\tag{2.20}$$

由 (2.7) 式、引理 1.4 及大数定理易得

$$|T_1^{(2)}|\le o(1)\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}|\eta_{hi}|+o^2(1)\longrightarrow 0\quad \text{a.s.},\quad (n\to\infty).\tag{2.21}$$

由 (2.19), (2.20) 式及 (2.21) 式知

$$T_1\longrightarrow 0\quad \text{a.s.},\quad n\to\infty.\tag{2.22}$$

令 $a_{hi}=:f_i(t_h)-\sum_{k=1}^{n}S_{hk}f_i(t_k)$, 则

$$a_{hi}=O(n^{-\gamma})+O(\tau_m),\tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}T_2&=\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}a_{hi}\left(\varepsilon_h-\sum_{r=1}^{n}S_{hr}\varepsilon_r\right)\\ &=\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}a_{hi}y_{nh}+\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}a_{hi}z_{nh}-\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}a_{hi}\sum_{r=1}^{n}S_{hr}\varepsilon_r\\ &=:T_2^{(1)}+T_2^{(2)}+T_2^{(3)}.\end{aligned}\tag{2.24}$$

由于 $|y_{ni}|\le 2n^{\frac{1}{q}}$, 故 $E\big((\frac{1}{n}a_{hi}y_{nh})^2|F_{i-1}\big)\le 4n^{\frac{2}{q}}\,\big(\frac{1}{n}a_{hi}\big)^2$.

又 $\big\{\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}a_{hi}y_{nh},\,m\le n\big\}$ 为鞅, 于是由引理 1.2 的 (1.7) 式, 得

$$\begin{aligned}E|T_2^{(1)}|^r&\le C\left\{\sum_{h=1}^{n}\left|\frac{1}{n}a_{hi}\right|^r E|y_{nh}|^r+\left(\sum_{h=1}^{n}\left|\frac{1}{n}a_{hi}\right|^2 n^{\frac{2}{q}}\right)^{\frac{r}{2}}\right\}\\ &\le C\big\{n\cdot n^{-r}(C_r n^{-r\gamma}+C_r\tau_m^r)n^{\frac{r-q}{q}}+\big(n\cdot n^{-2}(2n^{-2\gamma}+2\tau_m^2)n^{\frac{2}{q}}\big)^{\frac{r}{2}}\big\}\\ &\le C\big\{n^{-r\left(1+\gamma-\frac{1}{q}\right)}+n^{-r\left(1-\frac{1}{q}\right)}\tau_m^r+n^{-r\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}+\gamma\right)}+n^{-r\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}\tau_m^r\big\}.\end{aligned}$$

取适当的 r, 使 $\sum_{n=1}^{\infty}E|T_2^{(1)}|^r<\infty$, 于是由引理 1.3 知

$$T_2^{(1)}\longrightarrow 0\quad \text{a.s.},\quad (n\to\infty).\tag{2.25}$$

令 $\xi_i = \varepsilon_i I\big(|\varepsilon_i| > i^{\frac{1}{q}}\big)$, $\zeta_i = |\xi_i| + E\big(|\xi_i|\,|F_{i-1}\big)$, $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{\zeta_i}{i^\rho}$ (其中 $\frac{1}{q} < \rho < 1$), 则 $\{S_n, F_n, n \geq 1\}$ 为下鞅, 且

$$E|S_n| = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^\rho} E|\zeta_i| = 2\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^\rho} E|\xi_i| = 2\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^\rho} E|\varepsilon_i|^q \cdot |\varepsilon_i|^{-(q-1)} I\big(|\varepsilon_i| > i^{\frac{1}{q}}\big)$$
$$\leq C\sum_{i=1}^n i^{-\left(1+\rho-\frac{1}{q}\right)} \leq C \tag{2.26}$$

于是由下鞅收敛定理 [11] 知：存在随机变量 S, 使 $ES < \infty$, $S_n \longrightarrow S$ a.s., 从而有

$$|T_2^{(2)}| \leq \sum_{h=1}^n \frac{1}{n} |a_{hi}||z_{nh}| \leq C \cdot \frac{1}{n}(n^{-\gamma} + \tau_m) \sum_{h=1}^n \zeta_h$$
$$\leq C n^{-1+\rho} (n^{-\gamma} + \tau_m) \sum_{h=1}^n \frac{\zeta_h}{h^\rho} \longrightarrow 0 \quad \text{a.s.} \tag{2.27}$$

由引理 1.4 及 (2.23) 式易得

$$T_2^{(3)} = \frac{1}{n}\sum_{h=1}^n a_{hi} \sum_{r=1}^n S_{hr}\varepsilon_r \longrightarrow 0 \quad \text{a.s.} \tag{2.28}$$

故由 (2.24), (2.25), (2.27) 和 (2.28) 知

$$T_2 \quad \xrightarrow{\text{a.s.}} 0. \quad n \to \infty. \tag{2.29}$$

由 (2.18), (2.19), (2.29) 式知 (2.17) 成立.

至此, 综合 (2.1), (2.2), (2.12), (2.17) 式定理得证.

定理 2.2 在定理 2.1 条件下, 有

$$\hat{g}_n(t) \longrightarrow g(t) \quad \text{a.s.}, \quad n \to \infty. \tag{2.30}$$

证明

$$\begin{aligned}
\sup_t |\hat{g}_n(t) - g(t)| \ &\leq \ \sup_t |\hat{g}_0(t,\beta) - g(t)| + \sup_t \left| \sum_{j=1}^n X_i^T (\beta - \hat{\beta}_n) \int_{A_j} E_m(t,s)ds \right| \\
&\leq \ \sup_t \left| \sum_{j=1}^n g(t_j) \int_{A_j} E_m(t,s)ds - g(t) \right| + \sup_t \left| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \int_{A_j} E_m(t,s)ds \right| \\
&\quad + \sum_{j=1}^d \left(|\hat{\beta}_{nj} - \beta_{nj}| \sup_t \left| \sum_{i=1}^n X_{ij} \int_{A_i} E_m(t,s)ds \right| \right) \\
&\leq \ \sup_t \left| \sum_{j=1}^n g(t_j) \int_{A_j} E_m(t,s)ds - g(t) \right| + \sup_t \left| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \int_{A_j} E_m(t,s)ds \right| \\
&\quad + \sum_{j=1}^d \left(|\hat{\beta}_{nj} - \beta_{nj}| \sup_t \left| \sum_{i=1}^n f_j(t_i) \int_{A_i} E_m(t,s)ds \right| \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^d \left(|\hat{\beta}_{nj} - \beta_{nj}| \sup_t \left| \sum_{i=1}^n \eta_{ij} \int_{A_i} E_m(t,s)ds \right| \right) \\
&=: \ K_1 + K_2 + K_3 + K_4.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

由于对于 $g(t)$ 有类似于 (2.5) 式结论, 故

$$K_1 \longrightarrow 0 \quad \text{a.s.}, \quad n \to \infty. \tag{2.32}$$

由引理 1.4 知

$$K_2 \longrightarrow 0 \quad \text{a.s.}, \quad n \to \infty. \tag{2.33}$$

由引理 1.1 及定理 2.1, 得

$$K_3 \le d \cdot \max_j \sup_t |f_j(t)| \cdot \sup_t \int_0^1 |E_m(t,s)| ds \cdot \max_j |\hat{\beta}_{nj} - \beta_{nj}| \longrightarrow 0 \quad \text{a.s.}, \quad n \to \infty. \tag{2.34}$$

由 (2.7) 式及定理 2.1 得

$$K_4 \longrightarrow 0 \quad \text{a.s.}, \quad n \to \infty, \tag{2.35}$$

故由 (2.31)–(2.35) 式知结论成立.

注 1 本文的结论与文献 [5] 的结论相同, 但 [5] 研究的是误差为独立同分布的情形, 而本文研究的是误差为鞅差序列的情形, 这是本文与文献 [5] 最本质的不同. 本文的矩条件与 [5] 的不同之处在于：本文误差序列 $\{\varepsilon_i^{(n)}\}$ 的矩条件 $\sup_i E|\varepsilon_i^{(n)}|^q < \infty (q > 2)$ 比文献 [5] 中的 $E|\varepsilon_i^{(n)}|^{3/2+\delta}$ $(\delta > 0)$ 要略强；但对于 $\{\eta_{1j}\}$, 我们的假设 $E|\eta_i^{(n)}|^{3/2+\delta}$ $(\delta > 0)$ 比文献 [5] 中的 $E|\eta_{1j}|^2 < \infty$ 要略弱. 除此之外, 其余条件完全相同. 这些说明了在误差为鞅差序列情形下, 用小波估计的方法研究半参数回归模型是成功的.

致谢 作者感谢审稿专家所提出的宝贵意见, 感谢徐侃教授所提供的有益建议.

参考文献

[1] Hu H. C., Ridge estimation of a semiparametric regression model, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 2005, **176**(1): 215–222.

[2] Xue L. G., Berry-esseen bound of the estimate of error variance in semiparametric regression model, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2005, **48**(1): 157–170.

[3] Xue L. G., Rates of random weighting approximation of wavelet estimates in semiparametric regression model, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica,* 2003, **26**(1): 11–25.

[4] Chai G. X., Xu K. J., Wavelet smoothing in semiparamtric regression model, *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics,* 1999, **15**(1): 97–105 (in Chinese).

[5] Qian W. M., Cai G. X., Strong approximability of wavelet estimate in semiparamtric regression model, *Science in China, Series A,* 1999, **29**(3): 1233–240 (in Chinese).

[6] Qian W. M., Cai G. X., Jiang F. Y., Error variamce of wavelet in semiparamtric regression, *Chinese Journal of Annual of Math.,* 2000, **21**A(3): 341–350 (in Chinese).

[7] Yan Z. Z., Wu W. Z., Nie Z. K., Near neighbour estimate in semiparamtric regression model: The martingale difference error sequence case, *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics,* 2001, **17**(1): 44–50 (in Chinese).

[8] Hu H. C., Sun H. Y., Stably convergence in distribution about wavelet estimation in semiparamtric regression model: The martingale difference error sequence case, *Journal of Wuhan University* (*Natural Science Edition*), 2003, **49**(5): 571–574 (in Chinese).

[9] Speckman P., Kernel smoothing in partial linear models, *J R Statist Soc. B,* 1988, **50**: 413–436.

[10] Yang S. C., Nonparamtric regression weighted function estimator for martingale sequence, *J. Sys. Sci & Math. Scis.,* 1999, **19**(1): 79–85 (in Chinese).

[11] Stout W. F., Almost sure convergence, Academic Press, New York, 1974.

[12] Antoniads A., Gregoire G., Mckeahue I. W., Wavelet methods for curve estimation, *J. Amer. Statist Assoc*, 1994, **89**: 1340–1653.