第50卷第1期 数学学报中文版 Vol.50, No.1
2007年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Jan., 2007

文章编号: 0583-1431(2007)01-0105-12 **文献标识码: A**

弱 entwined 模的 Frobenius 性质和 Maschke 型定理

贾 玲 李 方

浙江大学数学系 杭州 310027
E-mail: jialing471@126.com

摘 要 主要引入了弱 entwined 模上的弱度量, 并用它来考虑两个弱 entwined 模范畴之间的函子关系. 同时还给出了弱 entwined 模的 Frobenius 性质和 Maschke 型定理.

关键词 弱 entwined 模; Frobenius 性质; Maschke 型定理; 弱度量
MR(2000) 主题分类 16W30
中图分类 O153.6

Frobenius Property and Maschke-Type Theorem for Weak Entwined Modules

Ling JIA Fang LI

Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, *P. R. China*
*E-mail: jialing*471@126.com

Abstract In this paper, we mainly introduce the notion of weak measure of weak entwining structures which is used to discuss the functors between two categories of weak entwined modules. In addition, we show that Frobenius property and Maschke-type theorem still hold for weak entwined modules.

Keywords weak entwined module; Frobenius properties; Maschke-type theorem; weak measure
MR(2000) Subject Classification 16W30
Chinese Library Classification O153.6

1 引言基本知识

Brzezinski 和 Majid 在文 [1] 中引入了 entwining 结构, 它包含一个代数 A, 一个余代数 C 及满足若干条件的一个线性映射 $\psi: C\otimes A\to A\otimes C$. 同时, entwined 模被定义并且它的许多重要性质被广泛研究, 如文 [2] 提出了 entwining 结构的度量并用它来研究两个 entwined 模范畴之间的函子, 文 [3] 给出了 entwined 模的 Frobenius 性质及 Maschke 型定理. 最近, Caenepeel 和 De Groot 将 entwining 结构的条件弱化, 引入了弱 entwining 结构的概念. 它仍然包含一个代数 B, 一个余代数 Y 和一个线性映射 $\delta: Y\otimes B\to B\otimes Y$. 但 δ 并不满足 $\delta(y\otimes 1)=1\otimes y$, 而是满足较弱的条件 $\delta(y\otimes 1)=((1_B\otimes\varepsilon_Y\otimes 1_Y)\circ(\delta\otimes 1_X)\circ(1_Y\otimes\tau)\circ(\Delta_Y\otimes 1_B))(y\otimes 1)$, 其中 τ 是

收稿日期: 2005-07-05; 接受日期: 2005-12-20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10571153)

扭映射. 在文 [4] 中作者得到了弱 entwined 模范畴和模 (余模) 范畴之间的忘却函子有伴随函子的结论.

本文主要引入了弱 entwined 模上的弱度量, 用它来考虑两个弱 entwined 模范畴之间的函子关系. 同时还给出了弱 entwined 模的 Frobenius 性质和 Maschke 型定理.

第一节回忆弱 entwining 结构和弱 entwined 模的基本概念并给出例子, 第二节考虑弱 entwined 模的积分和 Frobenius 性质, 第三节给出弱 entwined 模的 Maschke 型定理, 第四节引入了弱 entwined 模上的弱度量, 并用它来考虑两个弱 entwined 模范畴之间的函子关系.

以下规定：所有的工作都是在交换环 k 上展开的, 并假定所有的代数都是有单位的, 所有的余代数都是有余单位的. 未加修饰的张量积是在交换环 k 上的, 对任意 k- 模 V, W, 我们用 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 来表示 k- 模映射 $V\to W$ 的全体, 用 1_V 表示单位映射 $V\to V$, $ev_V: V\otimes V^*\to k$ 表示赋值映射, 即 $\langle v, v^*\rangle = v^*(v)$. 我们用 Sweedler 符号来表示余积, 右余和左余作用, 即

$$\Delta(c)=\sum c_1\otimes c_2,\quad \rho_r(m)=\sum m_{[0]}\otimes m_{[1]}$$

和

$$\rho_l(m)=\sum m_{\langle 1\rangle}\otimes m_{\langle 0\rangle}.$$

$M_A({}_AM)$ 表示右 (左)A- 模范畴. 此范畴中的态射用$\mathrm{Hom}_A(M,N)({}_A\mathrm{Hom}(M,N))$表示. $M^C({}^CM)$ 表示右 (左)C- 余模范畴. 此范畴中的态射用 $\mathrm{Hom}^C(M,N)({}^C\mathrm{Hom}(M,N))$ 表示. $M_A^C(\psi)$ 表示弱 entwining 结构 (A,C,ψ) 上的右 - 右弱 entwined 模范畴. 对一个 k- 模 V 和任意 $v\in V$, 我们用 $[v]$ 表示 k- 模 $V/\ker f$ 中相应元素, 其中 f 是从 V 到自身的 k- 线性映射.

定义 1.1 称 (A,C,ψ) 是右 - 右弱 entwining 结构 如果 A 是一个代数, C 是平坦余代数且线性映射 $\psi: C\otimes A\to A\otimes C$ 满足下列条件

$$\sum (ab)^\psi\otimes c_\psi=\sum a^\psi b^\phi\otimes c_{\psi\phi}; \tag{1}$$

$$\sum a^\psi\varepsilon(c_\psi)\ =\sum \varepsilon(c_\psi)1^\psi a; \tag{2}$$

$$\sum a^\psi\otimes\Delta(c_\psi)=\sum a^{\psi\phi}\otimes c_{1\phi}\otimes c_{2\psi}; \tag{3}$$

$$\sum 1^\psi\otimes c_\psi=\sum \varepsilon(c_{1\psi})1^\psi\otimes c_2. \tag{4}$$

本文对弱 entwined 映射 ψ 用以下符号：$\psi(c\otimes a)=\sum a^\psi\otimes c_\psi$. 如果 ψ 在同一个式子中出现多次, 则用不同的字母 $\delta,\phi,\ldots$ 表示.

注 1.2 如果将条件 (2) 和 (4) 分别替换为

$$\sum a^\psi\varepsilon(c_\psi)=a\varepsilon(c)\quad (2)',\qquad \sum 1^\psi\otimes c_\psi=1\otimes c\quad (4)',$$

则称 (A,C,ψ) 为右 - 右 entwining 结构. 显然, 一个 entwining 结构是弱 entwining 结构.

例 1.3 设 H 是弱 Hopf 代数, C 是右 H- 模余代数且 A 是右 H- 余模代数. 如果定义 $\psi: C\otimes A\to A\otimes C$ 为 $\psi(c\otimes a)=\sum a_{[0]}\otimes c\cdot a_{[1]}$, 则易证 (A,C,ψ) 是右 - 右弱 entwining 结构.

定义 1.4 设 (A,C,ψ) 是右 - 右弱 entwining 结构. 一个带有右 A- 模作用及一个右 C- 余模作用的 k- 模 M 如果满足 $\rho(m\cdot a)=\sum m_{[0]}\cdot a^\psi\otimes m_{[1]\psi}$, 则 M 为被称为 (A,C,ψ) 上的右 - 右弱 entwined 模.

例 1.5 设 (A,C,ψ) 是右 - 右弱 entwining 结构.

(i) 如果 M 是右 A- 模, 则 $\overline{M\otimes C}=\{\sum m1^{\psi}\otimes c_{\psi}\mid m\in M, c\in C\}$ 连同自然的余作用及由 $\sum[m1^{\psi}\otimes c_{\psi}]\cdot b=\sum[m1^{\psi}b^{\phi}\otimes c_{\psi\phi}]$ 所定义的作用是范畴 $M_A^C(\psi)$ 的一个对象.

(ii) 如果 N 是右 C- 余模, 则 $\underline{N\otimes A}=\{\sum\varepsilon(n_{[1]\psi})n_{[0]}\otimes a^{\psi}\mid n\in N,\, a\in A\}$ 连同自然的作用及由 $\rho([n\otimes a])=\sum[n_{[0]}\otimes a^{\psi}]\otimes n_{[1]_{\psi}}$ 所定义的余作用是范畴 $M_A^C(\psi)$ 的一个对象.

注 1.6 如果 (A,C,ψ) 是右 - 右 entwining 结构, 则有

(i)$'$ 如果 M 是右 A- 模, 则 $\overline{M\otimes C}=M\otimes C$ 连同自然的余作用及由 $\sum(m\otimes c)\cdot b=\sum m\cdot b^{\psi}\otimes c_{\psi}$ 所定义的作用是范畴 $M_A^C(\psi)$ 的一个对象.

(ii)$'$ 如果 N 是右 C- 余模, 则 $\underline{N\otimes A}=N\otimes A$ 连同自然的作用及由 $\rho(n\otimes a)=\sum n_{[0]}\otimes a^{\psi}\otimes n_{[1]_{\psi}}$ 所定义的余作用是范畴 $M_A^C(\psi)$ 的一个对象.

注意, 从这些注释, 我们可以看出弱 entwining 结构不再满足 $\sum 1^{\psi}\otimes c_{\psi}=1\otimes c$, 使得某些推广并不平凡.

2 弱 entwined 模的 Frobenius 性质

定义 2.1 一个弱 entwining 结构 (A,C,ψ) 被称为可因子化 是指如果存在唯一的映射 $\overline{\psi}: A\otimes C^*\to C^*\otimes A$, 对任意 $\zeta\in C^*,\ a\in A,\ c\in C$, $\overline{\psi}(a\otimes\zeta)=\sum\zeta_{\overline{\psi}}\otimes a^{\overline{\psi}}$ 满足 $\sum\zeta_{\overline{\psi}}(c)a^{\overline{\psi}}=\sum\zeta(c_{\psi})a^{\psi}$.

注 2.2 如果 C 是有限生成投射 k- 模, 则 (A,C,ψ) 是可因子化的. 因为可定义 $\overline{\psi}(a\otimes\zeta)=\sum\xi_n\zeta(c_{n\psi})\otimes a^{\psi}$, 其中 $\{\xi_n,c_n\}$ 是 C^* 和 C 的一组对偶基.

给定一个可因子化弱 entwining 结构 (A,C,ψ), 令 $B=C^{*op}$, 定义 $B\natural_{\overline{\psi}}A=(B\otimes A)/\ker l$ 作为 k- 空间, 其中 $l: B\otimes A\to B\otimes A$ 为对任意 $\zeta\in B,\ a\in A,\ l(\zeta\otimes a)=\sum\zeta\varepsilon_{\overline{\psi}}\otimes a^{\overline{\psi}}$, 乘法定义为对任意 $\zeta,\zeta'\in B,\ a,\ a'\in A,\ [\zeta\natural_{\overline{\psi}}a])([\zeta'\natural_{\overline{\psi}}a'])=\sum[\zeta\zeta'_{\overline{\psi}}\natural_{\overline{\psi}}aa'^{\overline{\psi}}]$.

引理 2.3 设 (A,C,ψ) 是弱 entwining 结构, $B=C^{*op}$, 并假设 C 是有限生成投射 k- 模, 则 $B\natural_{\overline{\psi}}A$ 是有单位 $[\varepsilon\natural_{\overline{\psi}}1]$ 的结合代数.

证明 如果 $\{\xi_n,c_n\}$ 是 C^* 和 C 的一组对偶基, 则有

$$\sum c_{n1}\otimes c_{n2}\otimes\xi_n=\sum c_n\otimes c_m\otimes\xi_n\xi_m.$$

根据文 [4] 的定理 3.2 只需证明下列条件满足. 对任意 $a,\, b\in A,\, \xi,\, \eta\in C^{*op}$,

$$\sum\xi_{\overline{\psi\phi}}\otimes a^{\overline{\phi}}b^{\overline{\psi}}=\sum\xi(c_{m\phi\psi})\xi_m\otimes a^{\phi}b^{\psi}=\sum\xi(c_{m\phi})\xi_m\otimes(ab)^{\phi}=\sum\xi_{\overline{\phi}}\otimes(ab)^{\overline{\phi}};$$
$$\sum\xi_{\overline{\psi}}\eta_{\overline{\phi}}\otimes a^{\overline{\psi\phi}}=\sum\xi(c_{n2\psi})\eta(c_{n1\phi})\xi_n\otimes a^{\psi\phi}=\sum\xi(c_{n\psi2})\eta(c_{n\phi1})\xi_n\otimes a^{\phi}=\sum(\xi\eta)_{\overline{\phi}}\otimes a^{\overline{\phi}};$$
$$\sum\xi\varepsilon_{\overline{\psi}}\otimes 1^{\overline{\psi}}=\sum\xi(c_{n2})\varepsilon(c_{n1\phi})\xi_n\otimes 1^{\phi}=\sum\xi(c_{n\phi})\xi_n\otimes 1^{\phi}=\sum\xi_{\overline{\phi}}\otimes 1^{\overline{\phi}};$$
$$\sum\varepsilon_{\overline{\psi}}\otimes 1^{\overline{\psi}}a=\sum\varepsilon(c_{n\phi})\xi_n\otimes a^{\phi}=\sum\varepsilon_{\overline{\phi}}\otimes a^{\overline{\phi}}.$$

引理 2.4 设 (A,C,ψ) 是弱 entwining 结构且 $B=C^{*op}$, 并假定 C 是有限生成投射 k- 模, 则映射 $i_A: A\to B\natural_{\overline{\psi}}A,\ i_A(a)=[\varepsilon\natural_{\overline{\psi}}a]$ 和 $i_B: B\to B\natural_{\overline{\psi}}A,\ i_B(\xi)=[\xi\natural_{\overline{\psi}}1]$ 是代数映射.

证明 这里只证其中之一. 事实上, 对任意 $a,\ a'\in A$,

$$i_A(a)i_A(a')=\sum\left[\varepsilon_{\overline{\psi}}\varepsilon_{\overline{\phi}}\natural_{\overline{\psi}}(a^{\overline{\psi}}a')^{\overline{\phi}}\right]=\sum\left[\varepsilon_{\overline{\psi}}\varepsilon_{\overline{\theta\phi}}\natural_{\overline{\psi}}a^{\overline{\psi\phi}}a'^{\overline{\theta}}\right]=\sum\left[\varepsilon_{\overline{\theta}}\natural_{\overline{\psi}}(aa')^{\overline{\theta}}\right]=i_A(aa').$$

显然 $i_A(1)=[\varepsilon\natural_{\overline{\psi}}1]$.

设 (A,C,ψ) 是弱 entwining 结构且 $B=C^{*op}$, 对任意 $f\in \mathrm{Hom}(B,A)$, $\eta\in B$ 定义

$$\tau:\mathrm{Hom}(B,A)\to \mathrm{Hom}(B,A), \tau(f)(\eta)=\sum f(\eta_{\overline{\psi}})1^{\overline{\psi}},$$

易证 $\tau^2=\tau$, 因此可以定义 $\overline{\mathrm{Hom}(B,A)}=\mathrm{Hom}(B,A)/\ker\tau$ 作为 k- 空间.

引理 2.5 设 (A,C,ψ) 是弱 entwining 结构且 $B=C^{*op}$, 并假定 C 有限生成投射 k- 模. 给定 $B\natural_{\overline{\psi}}A$, 则 k- 模 $\overline{\mathrm{Hom}(B,A)}$ 可被赋予一个 $(A,B\natural_{\overline{\psi}}A)$ 双模结构, 具体为对任意 $a\in A$, $\xi,\eta\in B$, $(a\cdot f)(\eta)=af(\eta)$, $(f\cdot[\xi\natural_{\overline{\psi}}a])(\eta)=\sum f(\xi\eta_{\overline{\psi}})a^{\overline{\psi}}$.

证明 显然 $\overline{\mathrm{Hom}(B,A)}$ 是左 A- 模. 只需证明 $\overline{\mathrm{Hom}(B,A)}$ 也是右 $B\natural_{\overline{\psi}}A$- 模. 首先, 它是合理的, 实际上, 对任意 $f\in \mathrm{Hom}(B,A)$, $\xi,\eta\in B$, $a\in A$,

$$\begin{aligned}
\sum(f\cdot(\xi\natural_{\overline{\psi}}a-\xi\varepsilon_{\overline{\psi}}\natural_{\overline{\psi}}a^{\overline{\psi}}))(\eta)&=\sum f(\xi\eta_{\overline{\phi}})a^{\overline{\phi}}-\sum f(\xi\varepsilon_{\overline{\psi}}\eta_{\overline{\delta}})a^{\overline{\psi\delta}}\\
&=\sum f(\xi\eta_{\overline{\phi}})a^{\overline{\phi}}-\sum f(\xi\eta_{\overline{\psi}})a^{\overline{\psi}}=0;\\
\tau((f-\tau(f))\cdot(\xi\natural_{\overline{\psi}}a))(\eta)&=\sum f(\xi\eta_{\overline{\psi\phi}})a^{\overline{\phi}}1^{\overline{\psi}}-\sum f(\xi\eta_{\overline{\psi\phi}}\varepsilon_{\overline{\delta}})a^{\overline{\phi\delta}}1^{\overline{\psi}}\\
&=\sum f(\xi\eta_{\overline{\psi\phi}})a^{\overline{\phi}}1^{\overline{\psi}}-\sum f(\xi\eta_{\overline{\psi\delta}})a^{\overline{\delta}}1^{\overline{\psi}}=0.
\end{aligned}$$

其次, 可验证它确实定义了 $\overline{\mathrm{Hom}(B,A)}$ 的一个右 $B\natural_{\overline{\psi}}A$- 模结构. 实际上

$$((f\cdot[\xi\natural_{\overline{\psi}}a])\cdot[\xi'\natural_{\overline{\psi}}a'])(\eta)=\sum f(\xi\xi'_{\overline{\delta}}\eta_{\overline{\psi\theta}})a^{\overline{\delta\theta}}a'^{\overline{\psi}}=\sum f(\xi(\xi'\eta_{\overline{\psi}})_{\overline{\delta}})a^{\overline{\delta}}a'^{\overline{\psi}}=\sum(f\cdot[\xi\natural a][\xi'\natural a'])(\eta);$$
$$(f\cdot[\varepsilon\natural_{\overline{\psi}}1])(\eta)=\sum f(\varepsilon\eta_{\overline{\psi}})1^{\overline{\psi}}=\sum f(\eta_{\overline{\psi}})1^{\overline{\psi}}=f(\eta).$$

注 2.6 如果 (A,C,ψ) 是 entwining 结构, 则显然 $\overline{\mathrm{Hom}(B,A)}=\mathrm{Hom}(B,A)$,这意味着引理 2.5 就是文 [4] 中 entwining 结构的结论.

定义 2.7 一个满足 $a\cdot\lambda=\lambda\cdot a$ 的 k- 模映射 $\lambda\in\overline{\mathrm{Hom}(B,A)}$ 被称为 $B\natural_{\overline{\psi}}A$ 的积分, 其全体表示为 $\mathrm{Int}(B\natural_{\overline{\psi}}A)$.

定义 2.8 设 B 是代数, A 是其子代数. 扩张 $A\subseteq B$ 被称为 Frobenius 扩张 如果 B 有限生成投射右 A- 模且作为 (A,B)- 双模 $B\cong \mathrm{Hom}_A(B,A)$, 其中 $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ 的双模结构分别为对任意 $a\in A$, $x,x'\in B$, $f\in\mathrm{Hom}_A(B,A)$, $(a\cdot f)(x)=af(x)$, $(f\cdot x)(x')=f(xx')$.

如上述所说, 因为弱 entwining 结构 $\sum 1^{\psi}\otimes c_{\psi}\neq 1\otimes c$, 所以 i_A 并不象在 entwining 结构下总是代数映射. 但在很多重要的情况下, 它仍然是单射. 下面看两个例子：

(i) 如果存在元素 $c\in C$ 满足 $\sum\varepsilon(c_{\psi})1^{\psi}$ 是 A 的非零因子, 则 i_A 是单射. 事实上, 如果 $i_A(a)=i_A(a')$, 则 $l(\varepsilon\natural_{\overline{\psi}}a-\varepsilon\natural_{\overline{\psi}}a')=0$. 因此对任意 $c\in C$, 我们有 $\sum\varepsilon(c_{\psi})1^{\psi}a=\sum\varepsilon(c_{\psi})1^{\psi}a'$, 如果 $\sum\varepsilon(c_{\psi})1^{\psi}$ 是 A 的非零因子, 则我们得到 $a=a'$.

(ii) 如果 ψ 是满射且 A 是交换的, 则 i_A 是单射. 实际上, 存在 $c\otimes a\in C\otimes A$, 使得 $1_A\otimes 1_C=\psi(c\otimes a)$, 因此 $1_A=\sum\varepsilon(c_{\psi})1^{\psi}a$, 意味着 $\varepsilon(c_{\psi})1^{\psi}$ 是可逆的, 故 i_A 是单射.

更重要的是, 一旦 i_A 是单射则可以得到下列定理, 它们可看作是文 [3] 定理 3.2 的推广.

命题 2.9 设 (A,C,ψ) 是弱 entwining 结构且 $B=C^{*op}$. 假设 B 有限生成投射 k- 模, A 是忠实平坦 k- 模, $X=B\natural_{\overline{\psi}}A$, 则当映射 i_A 是单射时下列等价：

(i) 扩张 $A\subseteq X$ 是 Frobenius;

(ii) X 作为 (A,X) 双模同构于 $\overline{\mathrm{Hom}(B,A)}$;

(iii) 存在积分 $\lambda \in \mathrm{Int}\,(B\natural_{\overline{\psi}}A)$ 满足映射 $\phi: B\natural_{\overline{\psi}}A \to \overline{\mathrm{Hom}\,(B,A)}$, $\phi([\xi\natural_{\overline{\psi}}a]) = \lambda\cdot[\xi\natural_{\overline{\psi}}a]$ 为双射.

证明 (i)⇔(ii) 由假设 B 是有限生成投射 k- 模, A 是忠实平坦 k- 模且 $l^2=l$, 因此作为右 A- 模 $X\cong(B\otimes A)/\ker l$. 于是 X 是有限生成投射右 A- 模. 因此扩张 $A\subseteq X$ 是 Frobenius 的当且仅当 $X\cong \mathrm{Hom}_A(X,A)$ 作为 (A,X) 双模. 对任意 $f\in\overline{\mathrm{Hom}(B,A)}$, $\xi\in B$, $a\in A$ 定义

$$\sigma:\overline{\mathrm{Hom}(B,A)}\to \mathrm{Hom}_A(X,A),\quad \sigma(f)([\xi\natural_{\overline{\psi}}a])=\sum f(\xi\varepsilon_{\overline{\psi}})a^{\overline{\psi}},$$

则可验证 σ 是 (A,X)- 双模同构. 首先, σ 是合理的. 事实上, 对任意 $f\in\mathrm{Hom}(B,A)$, $\xi\in B$, a, $b\in A$,

$$\sigma(f-\tau(f))([\xi\natural_{\overline{\psi}}a])=\sum f(\xi\varepsilon_{\overline{\psi}})a^{\overline{\psi}}-\sum f(\xi\varepsilon_{\overline{\psi}}\varepsilon_{\overline{\phi}})1^{\overline{\phi}}a^{\overline{\psi}}=\sum f(\xi\varepsilon_{\overline{\psi}})a^{\overline{\psi}}-\sum f(\xi\varepsilon_{\overline{\psi}})a^{\overline{\psi}}=0;$$
$$\sigma(f)([\xi\natural_{\overline{\psi}}a][\varepsilon\natural_{\overline{\psi}}1]=\sum f(\xi\varepsilon_{\overline{\psi}}\varepsilon_{\overline{\phi}})a^{\overline{\psi\phi}}=\sum f(\xi\varepsilon_{\overline{\psi}})a^{\overline{\psi}}=\sigma(f)([\xi\natural_{\overline{\psi}}a]).$$

其次, $\sigma(f)$ 是右 A- 模映射. 因为对任意 $f\in\mathrm{Hom}(B,A)$, $\xi\in B$, a, $a'\in A$,

$$\sigma(f)([\xi\natural_{\overline{\psi}}a]\cdot a')=\sum f(\xi\varepsilon_{\overline{\psi}})1^{\overline{\psi}}aa'=\sum f(\xi\varepsilon_{\overline{\psi}})a^{\overline{\psi}}a'=\sigma(f)([\xi\natural_{\overline{\psi}}a])\cdot a'.$$

再者, 可证明 σ 是 (A,X)- 双模映射. 事实上, 对任意 $f\in\mathrm{Hom}(B,A)$, $\xi,\xi'\in B$, a, $a'\in A$,

$$\sigma(a'\cdot f)([\xi\natural_{\overline{\psi}}a])=(a'\cdot f)(\xi\varepsilon_{\overline{\psi}})a^{\overline{\psi}}=a'f(\xi\varepsilon_{\overline{\psi}})a^{\overline{\psi}}=(a'\cdot\sigma(f))([\xi\natural_{\overline{\psi}}a]);$$
$$\begin{aligned}(\sigma(f)\cdot[\xi\natural_{\overline{\psi}}a])([\xi'\natural_{\overline{\psi}}a'])&=\sum f(\xi\xi'_{\overline{\psi}}\varepsilon_{\overline{\phi\delta}})a^{\overline{\psi\delta}}a'^{\overline{\phi}}=\sum f(\xi(\xi'\varepsilon_{\overline{\psi}})_{\overline{\phi}})a^{\overline{\phi}}a'^{\overline{\psi}};\\&=\sum(f\cdot([\xi\natural_{\overline{\psi}}a]))\cdot([\xi'\varepsilon_{\overline{\psi}}\natural a'^{\overline{\psi}}])=\sigma(f\cdot[\xi\natural_{\overline{\psi}}a])\cdot([\xi'\natural_{\overline{\psi}}a']).\end{aligned}$$

最后, 需验证 σ 是同构. 对任意 $f\in\mathrm{Hom}_A(X,A)$, $\xi\in B$, 定义

$$\sigma':\mathrm{Hom}_A(X,A)\to\overline{\mathrm{Hom}(B,A)},\quad \sigma'(f)(\xi)=\sum f(\xi_{\overline{\psi}}\natural_{\overline{\psi}}1^{\overline{\psi}}),$$

则 σ' 是合理的且是 σ 的逆. 事实上, 对任意 $f\in\mathrm{Hom}_A(X,A)$, $\xi\in B$, 定义

$$\begin{aligned}\tau(\sigma'(f)-\tau(\sigma'(f)))(\xi)&=\sum f(\xi_{\overline{\psi\phi}}\natural_{\overline{\psi}}1^{\overline{\phi}})1^{\overline{\psi}}-\sum f(\xi_{\overline{\psi\phi\delta}}\natural_{\overline{\psi}}1^{\overline{\delta}})1^{\overline{\phi}}1^{\overline{\psi}}\\&=\sum f(\xi_{\overline{\psi\phi}}\natural_{\overline{\psi}}1^{\overline{\phi}})1^{\overline{\psi}}-\sum f(\xi_{\overline{\psi\delta}}\natural_{\overline{\psi}}1^{\overline{\delta}})1^{\overline{\psi}}=0;\\(\sigma\sigma')(f)([\xi\natural_{\overline{\psi}}a])&=\sum f([(\xi\varepsilon_{\overline{\psi}})_{\overline{\phi}}\natural_{\overline{\psi}}1^{\overline{\phi}}])a^{\overline{\psi}}=\sum f([\xi_{\overline{\phi}}\varepsilon_{\overline{\psi\delta}}\natural_{\overline{\psi}}1^{\overline{\phi\delta}}1^{\overline{\psi}}a])=f([\xi\natural_{\overline{\psi}}a]).\end{aligned}$$

类似地, 可证对任意 $f\in\mathrm{Hom}(B,A)$, $\sigma'\sigma(f)(\eta)=f(\eta)$.

把 Frobenius 同构与 σ^{-1} 结合在一起, 我们可得需要的 (A,X)- 双模同构.

(ii)⇔(iii) 只需要证明对任意 $x\in X$, $\lambda\in\mathrm{Int}(B\natural_{\overline{\psi}}A)$, 定义

$$\mu:\mathrm{Int}(B\natural_{\overline{\psi}}A)\to_A \mathrm{Hom}_X(X,\overline{\mathrm{Hom}(B,A)}),\quad \mu(\lambda)(x)=\lambda\cdot x$$

是合理的且是双射.

首先, 它是合理的. 事实上, 对任意 $\xi,\eta\in B$, $a\in A$,

$$\begin{aligned}\mu(\lambda-\tau(\lambda))([\xi\natural_{\overline{\psi}}a])(\eta)&=\sum\lambda(\xi\eta_{\overline{\psi}})a^{\overline{\psi}}-\sum\lambda(\xi\eta_{\overline{\psi}}\varepsilon_{\overline{\phi}})1^{\overline{\phi}}a^{\overline{\psi}}\\&=\sum\lambda(\xi\eta_{\overline{\psi}})a^{\overline{\psi}}-\sum\lambda(\xi\eta_{\overline{\psi}})a^{\overline{\psi}}=0.\end{aligned}$$

其次, 对任意积分 λ, 映射 $\mu(\lambda)$ 显然是右 X- 模映射, 故只需证 $\mu(\lambda)$ 也是左 A- 模映射. 事实上, 对任意 $a,\ b\in A,\ \xi\in B$,

$$(b\cdot\mu(\lambda))([\xi\natural_{\overline{\psi}}a])=b\cdot\mu(\lambda)([\xi\natural_{\overline{\psi}}a])=b\cdot\lambda\cdot([\xi\natural_{\overline{\psi}}a])=(\lambda\cdot b)\cdot([\xi\natural_{\overline{\psi}}a])=\mu(\lambda)(b\cdot([\xi\natural_{\overline{\psi}}a]))$$

最后, 将证明 μ 是双射. 对任意 $f\in_A \mathrm{Hom}_X(X,\overline{\mathrm{Hom}(B,A)})$, 定义

$$\mu':_A \mathrm{Hom}_X(X,\overline{\mathrm{Hom}(B,A)})\to \mathrm{Int}(B\natural_{\overline{\psi}}A),\quad \mu'(f)=f([\varepsilon\natural_{\overline{\psi}}1]),$$

则 μ' 是合理的且是 μ 的逆. 实际上

$$\begin{aligned}&a\cdot\mu'(f)=f([\varepsilon\natural_{\overline{\psi}}a][\varepsilon\natural_{\overline{\psi}}1])=f([\varepsilon\natural_{\overline{\psi}}1][\varepsilon\natural_{\overline{\psi}}a])=f([\varepsilon\natural_{\overline{\psi}}1])\cdot a=\mu'(f)\cdot a;\\&(\mu\mu')(f)([\xi\natural_{\overline{\psi}}a])=f([\varepsilon\natural_{\overline{\psi}}1])\cdot([\xi\natural_{\overline{\psi}}a])=f([\xi\natural_{\overline{\psi}}a]);\\&(\mu'\mu)(\lambda)=\lambda\cdot([\varepsilon\natural_{\overline{\psi}}1])=\lambda.\end{aligned}$$

注 2.10 (i) 如果命题 2.9 中的 (A,C,ψ) 是 entwining 结构, 显然作为 k- 模 $\overline{\mathrm{Hom}(B,A)}=\mathrm{Hom}(B,A),\ X=B\otimes A$. 在这种情况下, 它就是文 [3] 的命题 3.2.

(ii) 如果 (A,C,ψ) 是可因子化的弱 entwining 结构, C 是有限生成投射 k- 模, 则范畴 $M_A^C(\psi)$ 中的每一个对象 M 都可被看作 M_X 的对象, 其中 $X=C^{*op}\natural_{\overline{\psi}}A$, 作用为 $m\cdot(\xi\natural a)=\sum m_{[0]}\cdot a\xi(m_{[1]})$. 而且每一右 X- 模连同自然的作用和由 $\sum m_{[0]}\xi(m_{[1]})=m\cdot\xi$ 所定义的余作用都是 $M_A^C(\psi)$ 的对象, 因此 $M_A^C(\psi)\cong M_X$.

命题 2.11 设 (A,C,ψ) 是弱 entwining 结构, 并假设 C 是投射 k- 模, 则下列等价:

(i) 存在元素 $e\in C$ 满足 $C=C^*\triangleright e,\ \psi(e\otimes a)=a\otimes e$;

(ii) C 是有限生成 k- 模且存在右 C- 余模同构 $\delta:C^*\to C$ 满足 $\psi\circ(\delta\otimes 1)\circ\overline{\phi}=1\otimes\delta$, 其中 $\overline{\phi}:A\otimes C^*\to C^*\otimes A$ 是可因子化映射, C^* 通过对任意 $\xi,\zeta\in C^*$, $\sum\xi_{[0]}\zeta(\xi_{[1]})=\zeta\xi$ 是右 C-余模.

证明 (i)⇒(ii) 由假设我们可定义 $\delta:C^*\to C$ by $\delta(\xi)=\xi\triangleright e=\sum\xi(e_2)e_1$. 显然 δ 是右 C-余模映射. 如果 $\Delta(e)=\sum e_1\otimes e_2$, 则 $C=C^*\triangleright e=\sum C^*(e_2)e_1$, 因此 C 是有限生成的. 因为 C 也是投射的, 所以它的对偶 C^* 是有限生成投射 k- 模.

$$\psi\circ(\delta\otimes 1)\circ\overline{\phi}(a\otimes\xi)=\sum\xi(e_{2\phi})a^{\phi\psi}\otimes e_{1\psi}=\sum\xi(e_{\psi_2})a^{\psi}e_{\psi_1}=\sum\xi(e_2)a\otimes e_1=a\otimes\delta(e).$$

(ii)⇒(i) 令 $e=\delta(\varepsilon)$, 则对任意 $\xi\in C^*$ 我们有 $\delta(\xi)=\xi\triangleright e$. 实际上

$$\begin{aligned}&\xi\triangleright e=\xi\triangleright\delta(\varepsilon)=\sum\xi(\delta(\varepsilon)_2)\delta(\varepsilon)_1=\sum\delta(\varepsilon_{[0]})\xi(\varepsilon_{[1]})=\delta(\xi);\\&a\otimes e=\sum\psi\circ(\delta\otimes 1)(\varepsilon_{\overline{\phi}}\otimes a^{\overline{\phi}})=\sum\psi(e_1\otimes a^{\phi})\varepsilon(e_{2\phi})=\sum a^{\phi\psi}\otimes e_{1\psi}\varepsilon(e_{2\phi})=\sum a^{\psi}\otimes e_{\psi}.\end{aligned}$$

3 弱 entwined 模的 Maschke 型定理

著名的 Maschke 定理表明一个有限群的群代数是半单的充要条件为域的特征不能整除群的阶. 本节将把 Maschke 型定理推广到弱 entwined 模上.

定义 3.1 设 (A,C,ψ) 是弱 entwining 结构. 一个 k- 模映射 $\kappa:C\to C^*\otimes A,\ \kappa(c)=$

$\sum c^1\otimes c^2$ 被称为 (A,C,ψ) 的正规积分 如果对任意 $a\in A,\ c,\ d\in C$, 下列条件满足

$$\sum d_\psi{}^1(c_\phi)a^{\psi\phi}d_\psi{}^2=\sum d^1(c)d^2a; \tag{5}$$

$$\sum d_1{}^1(c)d_1{}^2\otimes d_2=\sum d^1(c_2)d^{2^\psi}\otimes c_{1\psi}; \tag{6}$$

$$\sum c_2{}^1(c_1)c_2{}^2=\sum\varepsilon(c_\psi)1^\psi. \tag{7}$$

注意如果 (A,C,ψ) 是 entwining 结构, 则它与文 [2] 中的定义相同.

类似于文 [3] 的引理 4.3 , 有:

引理 3.2 设 $M,\ N\in M_A^C(\psi),\ g\in \mathrm{Hom}_A(M,N),\ \kappa$ 是 (A,C,ψ) 的正规积分, 则对任意 $m\in M,\ \hat g: M\to N,\ \hat g(m)=\sum g(m_{[0]})_{[0]}\cdot m_{[1]}{}^2 m_{[1]}{}^1(g(m_{[0]})_{[1]})$ 是范畴 $M_A^C(\psi)$ 中的态射.

定理 3.3 如果存在 (A,C,ψ) 的正规积分, 若范畴 $M_A^C(\psi)$ 中的态射在范畴 M_A 中有 section(或 retraction), 则它在范畴 $M_A^C(\psi)$ 中也有 section(或 retraction).

证明 设 $M,N\in M_A^C(\psi)$, 并假定 $f\in \mathrm{Hom}_A^C(M,N)$ 有 section $g\in \mathrm{Hom}_A(N,M)$. 令 $\hat g$ 如引理 1 所述, 则对任意 $n\in N$,

$$(f\circ\hat g)(n)=\sum n_{[0]}\cdot n_{[1]2}{}^2 n_{[1]2}{}^1(n_{[1]1})=\sum n_{[0]}\cdot 1^\psi\varepsilon(n_{[1]\psi})=\sum\varepsilon((n\cdot 1)_{[1]})(n\cdot 1)_{[0]}=n.$$

类似地, 可证如果 g 是 f 的 retraction, 则 $\hat g$ 也是.

推论 3.4 如果 (A,C,ψ) 存在正规积分, 若范畴 $M_A^C(\psi)$ 中的对象作为范畴 M_A 中的对象是半单的, 则它在范畴 $M_A^C(\psi)$ 中也是半单的.

例 3.5 (在弱 Doi-Hopf 模上的应用) 设 (H,A,C) 是右 - 右弱 Doi-Hopf 数组, 则 $\psi: C\otimes A\to A\otimes C,\ \psi(c\otimes a)=\sum a_{[0]}\otimes c\cdot a_{[1]}$ 定义了一个右 - 右弱 entwining 结构 (A,C,ψ). 我们知道, 弱 Doi-Hopf 数组的积分空间正好是自然同态 $\eta: G\circ F\to id_{M(H)_A^C}$ 所组成的空间, 其中 F 是忘却函子 $M(H)_A^C\to M_A$, G 是其伴随函子. 在文 [5] 中, 定理 5.1 表明积分空间同构于

$$V_4=\{\gamma: C\to \mathrm{Hom}(C,A)\,|\,c,\ d\in C,\ a\in A\},\quad \gamma(c)(d)a=\sum a_{[0]}\gamma(c\cdot a_{[1]2})(d\cdot a_{[1]1}),$$
$$\sum c_2\otimes\gamma(c_1)(d)=\sum d_1\cdot\gamma(c)(d_2)_{[1]}\otimes\gamma(c)(d_2)_{[0]},$$

且积分是正规的充要条件是 η 为单位自然同态 $\delta: id_{M(H)_A^C}\to G\circ F$ 的可裂子. 现在, 我们将验证本文所给出的定义与文 [5] 是一致的.

如果弱 entwining 结构 (A,C,ψ) 存在正规积分, 则可定义 $\gamma: C\to \mathrm{Hom}(C,A),\ \ \gamma(c)(d)=\sum c^1(d)c^2$.

直接由定义 3.1 可得对任意 $c,\ d\in C,\ a\in A,\ \gamma$ 下列条件成立

$$\gamma(c)(d)a=\sum a_{[0]}\gamma(c\cdot a_{[1]2})(d\cdot a_{[1]1});\quad \sum c_2\otimes\gamma(c_1)(d)=\sum d_1\cdot\gamma(c)(d_2)_{[1]}\otimes\gamma(c)(d_2)_{[0]}.$$

反之, 如果存在文 [5] 意义下的正规积分, 则 (A,C,ψ) 也存在正规积分. 定义 $\kappa: C\to C^*\otimes A,\ \kappa(c)=\sum c^1\otimes c^2$ 且满足 $c^1(d)c^2=\gamma(c)(d)$, 则它满足定义 3.1 中的条件.

$$\sum a^{\psi\phi}d_\psi{}^1(c_\phi)\otimes d_\psi{}^2=\sum a_{[0]}\gamma(d\cdot a_{[1]2})(c\cdot a_{[1]1})=\sum d^1(c)d^2a;$$
$$\begin{aligned}\sum d_1{}^1(c)d_1{}^2\otimes d_2&=\sum\gamma(d)(c_2)_{[0]}\otimes c_1\cdot\gamma(d)(c_2)_{[1]}\\&=\sum d^2{}_{[0]}\otimes c_1\cdot d^2{}_{[1]}d^1(c_2)=\sum d^{2\psi}\otimes d^1(c_2)c_{1\psi};\end{aligned}$$
$$\sum c_2{}^1(c_1)c_2{}^2=\sum\varepsilon(c\cdot 1_{[1]})1_{[0]}=\sum\varepsilon(c_\psi)1^\psi.$$

4 弱 entwining 结构 (B,Y,δ) 到 (A,X,ψ) 的弱度量

本节主要给出了从弱 entwining 结构 (B,Y,δ) 到 (A,X,ψ) 的弱度量的定义, 并利用它来考虑范畴 $M_B^Y(\delta)$ 与 $M_A^X(\psi)$ 之间的函子. 我们约定本节弱 entwining 结构都是右 - 右弱 entwining 结构.

定义 4.1 设 (A,X,ψ) 和 (B,Y,δ) 是弱 entwining 结构, 令 $\alpha: Y\otimes B\to A$, $\gamma: Y\to A\otimes X$, $\gamma(y)=\sum\gamma(y)^A\otimes\gamma(y)_X$ 是满足下列条件的线性映射：对任意 $y\in Y$, $b,\bar{b}\in B$,

$$\sum\alpha(y_1,b^\delta)\alpha(y_{2\delta},\bar{b})=\alpha(y,b\bar{b}); \tag{8}$$

$$\sum\gamma(y_1)^A\gamma(y_2)^{A\psi}\otimes\gamma(y_1)_{X\psi}\otimes\gamma(y_2)_X=\sum\gamma(y)^A\otimes\gamma(y)_{X1}\otimes\gamma(y)_{X2}; \tag{9}$$

$$\sum\alpha(y_1,b^\delta)\gamma(y_{2\delta})^A\otimes\gamma(y_{2\delta})_X=\sum\gamma(y_1)^A\alpha(y_2,b)^\psi\otimes\gamma(y_1)_{X\psi}, \tag{10}$$

则 (α,γ) 被称为从弱 entwining 结构 (B,Y,δ) 到 (A,X,ψ) 的弱度量 (或 (α,γ) 弱度量 弱 entwining 结构 (B,Y,δ) 到 (A,X,ψ)).

例 4.2 (i) 如果 (f,g) 是从弱 entwining 结构 (B,Y,δ) 到 (A,X,ψ) 满足 $\sum f(b^\delta)\otimes g(y_\delta)=\sum f(b)^\psi\otimes g(y)_\psi$ 的线性映射, 则 $((f\otimes\varepsilon_Y)\circ\delta,\psi\circ(\eta_A\otimes g))$ 弱度量弱 entwining 结构 (B,Y,δ) 到 (A,X,ψ).

(ii) 如果 (B,Y,δ) 和 (A,X,ψ) 都是 entwining 结构, (α,γ) 弱度量 (B,Y,δ) 到 (A,X,ψ), 且 α 和 γ 分别满足 $\alpha(y\otimes 1)=\varepsilon(y)1$, $\sum\varepsilon(\gamma(y)_X)\gamma(y)^A=\varepsilon(y)1$, 则它就是从 (B,Y,δ) 到 (A,X,ψ) 度量的定义.

命题 4.3 设 (α,γ) 弱度量 (B,Y,δ) 到 (A,X,ψ), 则

(i) 对任意 $M\in M_A$, $\overline{M\otimes Y}$ 通过自然余作用和由 $[m\otimes y]\cdot b=\sum[m\cdot\alpha(y_1,b^\delta)\otimes y_{2\delta}]$ 所定义的作用成为 $(B,Y)_\delta$- 模, 其中作为 k- 模 $\overline{M\otimes Y}=(M\otimes Y)/\ker f$, $f: M\otimes Y\to M\otimes Y$ 为 $f(m\otimes y)=\sum m\cdot\alpha(y_1,1^\delta)\otimes y_{2\delta}$.

(ii) 对任意 $N\in M^Y$, $\underline{N\otimes A}$ 通过自然作用和由 $\rho([n\otimes a])=\sum[n_{[0]}\otimes\gamma(n_{[1]})^Aa^\psi]\otimes\gamma(n_{[1]})_{X\psi}$ 所定义的余作用成为 $(A,X)_\psi$- 模, 其中作为 k- 模 $\underline{N\otimes A}=(N\otimes A)/\ker g$, $g: N\otimes A\to N\otimes A$ 为 $g(n\otimes a)=\sum\varepsilon(\gamma(n_{[1]})_{X\psi})n_{[0]}\otimes\gamma(n_{[1]})^Aa^\psi$.

证明 (1) 从定义 4.1 易证 f 是投影. 因此可定义

$$\overline{M\otimes Y}=(M\otimes Y)/\ker f\cong\operatorname{Im} f.$$

首先, 上述作用是合理的, 实际上

$$\begin{aligned}\sum(m\otimes y)\cdot b-(m\cdot\alpha(y_1,1^\delta)\otimes y_{2\delta})\cdot b&=\sum m\cdot\alpha(y_1,b^\theta)\otimes y_{2\theta}-m\cdot\alpha(y_1,1^\delta b^\eta)\otimes y_{2\delta\eta}\\&=\sum m\cdot\alpha(y_1,b^\theta)\otimes y_{2\theta}-m\cdot\alpha(y_1,b^\eta)\otimes y_{2\eta}=0.\end{aligned}$$

而且, 易得 $([m\otimes y]\cdot b)\cdot b'=[m\otimes y]\cdot bb'$ 和 $[m\otimes y]\cdot 1=[m\otimes y]$.

其次, 上述余作用是合理的, 实际上, 对任意 $m\in M$, $y\in Y$,

$$\begin{aligned}\rho([m\cdot\alpha(y_1,1^\delta)\otimes y_{2\delta}])&=\sum[m\cdot\alpha(y_1,1^{\delta\eta})\otimes y_{2\eta}]\otimes\varepsilon(y_{3\delta})y_4\\&=\sum[m\cdot\alpha(y_1,1^\delta)\otimes y_{2\delta}]\otimes y_3=\rho([m\otimes y]).\end{aligned}$$

最后, 相容性条件满足. 事实上, 对任意 $m \in M,\ y \in Y,\ b \in B$,

$$\rho([m \otimes y] \cdot b) = \sum [m \otimes y_1] \cdot b^{\delta} \otimes y_{2\delta} = \sum\, [m \otimes y]_{[0]} \cdot b^{\delta} \otimes [m \otimes y]_{[1]\delta}.$$

因此, $\overline{M \otimes Y}$ 是范畴 $M_B^Y(\delta)$ 的一个对象.

(ii) 证明过程对偶于 (i) 的证明.

注 4.4 如果 (B, Y, δ) 和 (A, X, ψ) 都是 entwining 结构, 这时

$$\alpha(y \otimes 1) = 1 \otimes y, \quad \varepsilon(\gamma(y)_C)\gamma(y)^A = \varepsilon(y)1,$$

则 $\overline{M \otimes Y} = M \otimes Y,\ \underline{N \otimes A} = N \otimes A$, 这就回到了文 [2] 的命题 3.3.

推论 4.5 设 (A, C, ψ) 是弱 entwining 结构, 则

(i) 对任意 $M \in M_A, \overline{M \otimes C}$ 通过作用 $[m \otimes c] \cdot a = [m \cdot a^{\psi} \otimes c_{\psi}]$ 和余作用 $\rho([m \otimes c]) = \sum [m \otimes c_1] \otimes c_2$ 成为 $(A, C)_{\psi}$- 模.

(ii) 对任意 $N \in M^C, \underline{N \otimes A}$ 通过作用 $[n \otimes a] \cdot a' = [n \otimes aa']$ 和余作用 $\rho([n \otimes a]) = \sum [n_{[0]} \otimes a^{\psi}] \otimes n_{[1]\psi}$ 成为 $(A, C)_{\psi}$- 模.

证明 为证明 (i), 取 $(A, k)_{\sigma}$, 其中 $\sigma : k \otimes A \to A \otimes k$ 是扭映射. 只需验证 $((1_A \otimes \varepsilon) \circ \psi, (1_A \otimes \varepsilon) \circ \psi \circ (1_C \otimes \eta))$ 弱度量 $(A, C)_{\psi}$ 到 $(A, k)_{\sigma}$, 其中 $\eta : k \to A$ 是 A 的结构映射. 由定义 4.1 很容易得到上述结论.

(ii) 是因为 $((1_A \otimes \varepsilon) \circ \psi \circ (1_C \otimes \eta),\ \psi \circ (1_C \otimes \eta))$ 弱度量 $(k, C)_{\sigma'}$ 到 $(A, X)_{\psi}$, 其中 $\sigma' : C \otimes k \to k \otimes C$ 是扭映射.

命题 4.6 设 (α, γ) 弱度量弱 entwining 结构 (B, Y, δ) 到 (A, X, ψ) 则:

(i) 对任意 $M \in M_A^X(\psi)$ 映射 $\overline{h_M} : \overline{M \otimes Y} \to \overline{\overline{M \otimes X} \otimes Y},\ \overline{h_M}([m \otimes y]) = \sum [[m_{[0]} \otimes m_{[1]}] \otimes y] - [[m \cdot \gamma(y_1)^A \otimes \gamma(y_1)_X] \otimes y_2]$ 是范畴 $M_B^Y(\delta)$ 的态射, 其中 $\overline{M \otimes Y},\ \overline{\overline{M \otimes X} \otimes Y}$ 分别如命题 4.3 (i) 和推论 4.5 (i) 所述.

(ii) 对任意 $N \in M_B^Y(\delta)$ 映射 $\underline{h_N} : \underline{\underline{N \otimes B} \otimes A} \to \underline{N \otimes A},\ \underline{h_N}([[n \otimes b] \otimes a]) = [n \cdot b \otimes a] - \sum [n_{[0]} \otimes \alpha(n_{[1]}, b)a]$ 是范畴 $M_A^X(\psi)$ 的态射, 其中 $\underline{N \otimes A},\ \underline{\underline{N \otimes B} \otimes A}$ 分别如命题 4.3 (ii) 和推论 4.3 (ii) 所述.

证明 (1) 首先验证 $\overline{h_M}$ 是合理的. 事实上, 对任意 $m \in M,\ y \in Y$,

$$\begin{aligned}
&\overline{h_M}(m \otimes y) - \sum \overline{h_M}(m \cdot \alpha(y_1, 1^{\delta}) \otimes y_{2\delta}) \\
&\quad = \sum [[m_{[0]} \otimes m_{[1]}] \otimes y] - [[m \cdot \gamma(y_1)^A \otimes \gamma(y_1)_X] \otimes y_2] - \sum [[(m \cdot \alpha(y_1, 1^{\delta}))_{[0]} \\
&\qquad \otimes (m \cdot \alpha(y_1, 1^{\delta}))_{[1]}] \otimes y_{2\delta}] + \sum [[m \cdot \alpha(y_1, 1^{\delta})\gamma(y_{2\delta 1})^A \otimes \gamma(y_{2\delta 1})_X] \otimes y_{2\delta 2}] \\
&\quad = \sum [[(m_{[0]} \otimes m_{[1]})] \cdot \alpha(y_1, 1^{\delta}) \otimes y_{2\delta}] - \sum [[(m \cdot \gamma(y_1)^A \otimes \gamma(y_1)_X)] \cdot \alpha(y_2, 1^{\delta'}) \otimes y_{3\delta'}] \\
&\qquad - \sum [[m_{[0]} \cdot \alpha(y_1, 1^{\theta})^{\psi} \otimes m_{[1]\psi}] \otimes y_{2\theta}] + [[m \cdot \alpha(y_1, 1^{\theta\zeta'})\gamma(y_{2\zeta'})^A \otimes \gamma(y_{2\zeta'})_X] \otimes y_{3\theta}] \\
&\quad = \sum [[m_{[0]} \cdot \alpha(y_1, 1^{\delta})^{\phi} \otimes m_{[1]\phi}] \otimes y_{2\delta}] - [[m \cdot \gamma(y_1)^A \alpha(y_2, 1^{\delta'})^{\varphi} \otimes \gamma(y_1)_{X\varphi}] \otimes y_{3\delta'}] \\
&\qquad - \sum [[m_{[0]} \cdot \alpha(y_1, 1^{\theta})^{\psi} \otimes m_{[1]\psi}] \otimes y_{2\theta}] + [[m \cdot \gamma(y_1)^A \alpha(y_2, 1^{\theta})^{\phi} \otimes \gamma(y_1)_{X\phi}] \otimes y_{3\theta}] \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

这里我们利用 $\overline{h_M}$ 和 $\overline{M \otimes Y}$ 的定义分别得到第一和第二个式子, 利用 $\overline{M \otimes X}$ 的 A- 模作用得到最后一个式子.

易证 $\overline{h_M}$ 是右 Y- 余模映射. 其次断言 $\overline{h_M}$ 是右 B- 模映射. 事实上, 对任意 $m \in M$, $y \in Y$, $b \in B$,

$$\begin{aligned}
&\overline{h_M}(([m \otimes y]) \cdot b)\\
&\quad = \sum [[m_{[0]} \cdot \alpha(y_1, b^{\delta})^{\psi} \otimes m_{[1]\psi}] \otimes y_{2\delta}] - \sum [[m \cdot \alpha(y_1, b^{\zeta\varsigma})\gamma(y_{2\varsigma})^{A} \otimes \gamma(y_{2\varsigma})_{X}] \otimes y_{3\zeta}]\\
&\quad = \sum [[m_{[0]} \cdot \alpha(y_1, b^{\delta})^{\psi} \otimes m_{[1]\psi}] \otimes y_{2\delta}] - \sum [[m \cdot \gamma(y_1)^{A}\alpha(y_2, b^{\zeta})^{\varsigma} \otimes \gamma(y_1)_{X\varsigma}] \otimes y_{3\zeta}]\\
&\quad = \sum ([[m_{[0]} \otimes m_{[1]}] \otimes y] - [[m \cdot \gamma(y_1)^{A} \otimes \gamma(y_1)_{X}] \otimes y_2)] \cdot b\\
&\quad = \overline{h_M}([m \otimes y]) \cdot b.
\end{aligned}$$

这里我们利用弱 entwined 模定义得到第一个式子, 由 (10) 得到第二个式子, 利用 $\overline{M \otimes Y}$ 和 $\overline{M \otimes X}$ 的模作用得到三个式子.

(ii) 可看作 (i) 的对偶.

给定一个从弱 entwining 结构 (B, Y, δ) 到 (A, X, ψ) 的弱度量, 对任意 $M \in M_A^X(\psi)$, 通过以下正合列定义 $M \widehat{\bigcirc}_X Y \subseteq \overline{M \otimes Y}$,

$$0 \longrightarrow M \widehat{\bigcirc}_X Y \longrightarrow \overline{M \otimes Y} \xrightarrow{\overline{h_M}} \overline{\overline{M \otimes X} \otimes Y},$$

这个正合列在范畴 $M_B^Y(\delta)$ 中, 因此 $M \widehat{\bigcirc}_X Y$ 是范畴 $M_B^Y(\delta)$ 的一个对象. 于是存在一个函子 $-\widehat{\bigcirc}_X Y : M_A^X(\psi) \to M_B^Y(\delta)$. 对偶地, 对任意 $N \in M_B^Y(\delta)$ 通过下面正合列定义 $N \widehat{\otimes}_B A$,

$$\underline{\underline{N \otimes B} \otimes A} \xrightarrow{\underline{h_N}} \underline{N \otimes A} \xrightarrow{\widehat{\pi}} N \widehat{\otimes}_B A \longrightarrow 0$$

也可得到一个函子 $-\widehat{\otimes}_B A : M_B^Y(\delta) \to M_A^X(\psi)$.

命题 4.7 给定一个从弱 entwining 结构 (B, Y, δ) 到 (A, X, ψ) 的弱度量, 则对任意 $M \in M_A^X(\psi)$, $N \in M_B^Y(\delta)$, 有:

$$\eta_{N,M} : \mathrm{Hom}_A^X(N \widehat{\otimes}_B A, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B^Y(N, M \widehat{\bigcirc}_X Y),\ \eta_{N,M}(f)(n) = \sum f(\widehat{\pi}(n_{[0]} \otimes 1)) \otimes n_{[1]}$$

是可裂的自然单同态.

证明 首先断言 $\eta_{N,M}(f)(n) \in M \widehat{\bigcirc}_X Y$. 事实上, 对任意 $f \in \mathrm{Hom}_A^X(N \widehat{\otimes}_B A, M)$, $n \in N$,

$$\begin{aligned}
&\overline{h_M}(\eta_{N,M}(f)(n))\\
&\quad = \sum f(\widehat{\pi}(n_{[0]} \otimes 1)_{[0]}) \otimes f(\widehat{\pi}(n_{[0]} \otimes 1)_{[1]}) \otimes n_{[1]} - f(\widehat{\pi}(n_{[0]} \otimes \gamma(n_{[1]1})^{A})) \otimes \gamma(n_{[1]1})_{X} \otimes n_{[1]2}\\
&\quad = \sum f(\widehat{\pi}(n_{[0]} \otimes \gamma(n_{[1]1})^{A} 1^{\psi})) \otimes \gamma(n_{[1]1})_{X\psi} \otimes n_{[1]2}\\
&\qquad - f(\widehat{\pi}(n_{[0]} \otimes \gamma(n_{[1]1})^{A})) \otimes \gamma(n_{[1]1})_{X} \otimes n_{[1]2} = 0.
\end{aligned}$$

这里我们利用 f 是范畴 $M_A^B(\psi)$ 的态射得到第一个式子, 第二个式子是利用 $N \widehat{\otimes}_B A$ 的 X-余模作用和 $\widehat{\pi}$ 是范畴 $M_B^Y(\delta)$ 的态射.

显然 $\eta_{N,M}(f)$ 是右 Y- 余模映射, 并断言它也是右 B- 模映射. 事实上

$$\begin{aligned}
\eta_{N,M}(f)(n) \cdot b &= \sum f(\widehat{\pi}(n_{[0]} \otimes 1)) \cdot \alpha(n_{[1]1}, b^{\delta})) \otimes n_{[1]2\delta} = \sum f(\widehat{\pi}(n_{[0]} \cdot b^{\delta} \otimes 1)) \otimes n_{[1]\delta}\\
&= \eta_{N,M}(f)(n \cdot b).
\end{aligned}$$

这里我们利用 f 是右 A- 模映射得到第一个式子, 利用 $N \widehat{\otimes}_B A$ 的定义得到第二个式子. 易证 $\eta_{N,M}$ 在 M 和 N 上都是自然的.

其次, 断言 $\eta_{N,M}$ 的左逆为

$$\eta^{-1}{}_{N,M}(g)\circ\widehat{\pi}([n\otimes a])=\sum g(n)^M\cdot\gamma(g(n)^Y)^A a^\psi\varepsilon(\gamma(g(n)^Y)_{X\psi}),$$

对任意 $n\in N$, 定义 $g(n)=\sum g(n)^M\otimes g(n)^Y$.

现在将证明 $\eta_{N,M}{}^{-1}(g)\circ\widehat{\pi}$ 合理的. 事实上, 对任意 $n\in N,\ a\in A,\ g\in \mathrm{Hom}_B^Y(N,M\widehat{\bigcirc}_X Y)$,

$$\begin{aligned}
&\sum\eta_{N,M}{}^{-1}(g)\circ\widehat{\pi}(n\otimes a-\varepsilon(\gamma(n_{[1]})_{X\psi})n_{[0]}\otimes\gamma(n_{[1]})^A a^\psi)\\
&=\sum g(n)^M\cdot\gamma(g(n)^Y)^A a^\psi\varepsilon(\gamma(g(n)^Y)_{X\psi})\\
&\quad-\ \sum\varepsilon(\gamma(g(n)^Y{}_2)_{X\psi})g(n)^M\cdot\gamma(g(n)^Y{}_1)^A\gamma(g(n)^Y{}_2)^{A\phi}a^{\psi\varphi}\varepsilon(\gamma(g(n)^Y{}_1)_{X\phi\varphi})\\
&=\sum g(n)^M\cdot\gamma(g(n)^Y)^A a^\psi\varepsilon(\gamma(g(n)^Y)_{X\psi})\\
&\quad-\sum\varepsilon(\gamma(g(n)^Y)_{X2\psi})g(n)^M\cdot\gamma(g(n)^Y)^A a^{\psi\varphi}\varepsilon(\gamma(g(n)^Y)_{X1\varphi})\\
&\sum g(n)^M\cdot\gamma(g(n)^Y)^A a^\psi\varepsilon(\gamma(g(n)^Y)_{X\psi})-\sum g(n)^M\cdot\gamma(g(n)^Y)^A a^\psi\varepsilon(\gamma(g(n)^Y)_{X\psi})\\
&=0.
\end{aligned}$$

这里我们利用 g 是余模映射得到第一个式子, 由式子 (9) 和式子 (10) 分别得到第二和和第三个式子.

再者, 断言 $\eta^{-1}_{N,M}(g)\circ\widehat{\pi}|_{\mathrm{Im}\underline{\mathrm{h_N}}}=0$.

$$\begin{aligned}
\eta^{-1}_{N,M}(g)\circ\widehat{\pi}([n\cdot b\otimes a])&=\sum g(n)^M\cdot\alpha(g(n)^Y{}_1,b^\delta)\gamma(g(n)^Y{}_{2\delta})^A a^\psi\varepsilon(\gamma(g(n)^Y{}_{2\delta})^A)\\
&=\sum g(n)^M\cdot\gamma(g(n)^Y{}_1)^A\alpha(g(n)^Y{}_2,b)^\psi a^\phi\varepsilon(\gamma(g(n)^Y{}_1)_{X\psi\phi})\\
&=\sum g(n_{[0]})^M\cdot\gamma(g(n_{[0]})^Y)^A\alpha(n_{[1]},b)a^\psi\varepsilon(\gamma(g(n_{[0]})^Y)_{X\psi})\\
&=\eta^{-1}_{N,M}(g)\circ\widehat{\pi}([n_{[0]}\otimes\alpha(n_{[1]},b)a]),
\end{aligned}$$

故 $\eta^{-1}_{N,M}(g)\circ\widehat{\pi}|_{\mathrm{Im}\underline{\mathrm{h_N}}}=0$.

这里我们利用 g 既是右 B- 模映射又是右 Y- 余模映射得到第一和第三个式子.

而且, 断言对任意 $f\in\mathrm{Hom}_A^X(N\widehat{\otimes}_B A,M)$, $(\eta^{-1}\eta)(f)=f$. 因为

$$\begin{aligned}
(\eta^{-1}\eta)(f)(\widehat{\pi}([n\otimes a]))&=\sum f(\widehat{\pi}(n_{[0]}\otimes 1)\cdot\gamma(n_{[1]})^A a^\psi)\varepsilon(\gamma(n_{[1]})_{X\psi})\\
&=\sum f(\widehat{\pi}(n_{[0]}\otimes\gamma(n_{[1]})^A a^\psi)\varepsilon(\gamma(n_{[1]})_{X\psi})\\
&=\sum f(\widehat{\pi}([n\otimes a]_{[0]}))\varepsilon([n\otimes a]_{[1]})\\
&=f(\widehat{\pi}([n\otimes a])).
\end{aligned}$$

这里我们反复利用 f 和 $\widehat{\pi}$ 都是余模映射及 $\underline{N\otimes A}$ 的余模作用.

尽管一般情况下函子 $-\widehat{\bigcirc}_X Y$ 和 $-\widehat{\otimes}_B A$ 并不是伴随的. 但在某些特殊情况下它们确实是伴随对. 看例子:

推论 4.8 设 (A,C,ψ) 是弱 entwining 结构, 则

(i) 命题 2.2[6] 函子 $-\widehat{\bigcirc}_k C:M_A\to M_A^C(\psi)$ 是忘却函子 $M_A^C(\psi)\to M_A$ 的右伴随函子.

(ii) 命题 2.1[6] 函子 $-\widehat{\otimes}_k A:M^C\to M_A^C(\psi)$ 是忘却函子 $M_A^C(\psi)\to M^C$ 的左伴随函子.

证明 为证 (i), 取推论 4.5 (i) 中的度量

$$(\alpha,\gamma),\ \alpha(c,a)=\sum\varepsilon(c_\psi)a^\psi,\ \ \gamma(c)=\sum\varepsilon(c_\psi)1^\psi,$$

则 $M_A^k(\sigma)=M_A$, 且对任意 $M\in M_A$,

$$N\in M_A^C(\psi)\ M\widehat{\bigcirc}_k C=\overline{M\otimes C}\ N\widehat{\otimes}_A A=N.$$

令

$$(B,Y)_\delta:=(A,C)_\psi,\ \ (A,X)_\psi:=(A,k)_\sigma,$$

则由命题 4.7 知道 $\eta_{N,M}$ 有左逆, 只需证明 $\eta\eta^{-1}=1$. 事实上, 对任意 $g\in\mathrm{Hom}_A^C(N,\overline{M\otimes C})$, $n\in N$,

$$\begin{aligned}(\eta\eta^{-1})(g)(n)&=\sum[g(n_{[0]})^M\cdot\gamma(g(n_{[0]})^Y)^A1^\psi\varepsilon(\gamma(g(n_{[0]})^Y)_{X_\psi})\otimes n_{[1]}]\\&=\sum[g(n)^M\cdot\gamma(g(n)^Y{}_1)^A\varepsilon(\gamma(g(n)^Y{}_1)_X)\otimes g(n)^Y{}_2]\\&=\sum[g(n)^M\cdot 1^\psi\varepsilon(g(n)^Y{}_{1\psi})\otimes g(n)^Y{}_2]\\&=\sum[g(n)^M\cdot\alpha(g(n)^Y{}_1,1^\psi)\otimes g(n)^Y{}_{2\psi}]\\&=g(n).\end{aligned}$$

这里我们利用 g 是右 C- 余模映射得到第一个式子, 由式子 (4) 得到第三个.

(ii) 可看作是 (i) 的对偶, 如果取

$$(B,Y)_\delta=(k,X)_\sigma,\ \ (\alpha,\gamma)=((1_A\otimes\varepsilon)\circ\psi\circ(1_C\otimes\eta),\ \psi\circ(1_C\otimes\eta)),$$

则可从命题 4.7 得到结论.

参 考 文 献

[1] Brzezinski T., Majid S., Coalgebra bundles, *Comm. Math. Phys.*, 1998, **191**: 467–492.
[2] Brzezinski T., On modules associated to coalgebra Galois extension, *J. Algebra*, 1999, **215**: 290–317.
[3] Brzezinski T., Frobenius properties and Maschke-type theorems for entwined modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1999, **128**(8): 2261–2270.
[4] Caenepeel S., De Groot E., Modules over weak entwining structures, New trends in Hopf algebra theory (La Falda, 1999), *Contemp. Math.*, **267**: 31–54; *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 2000.
[5] Bohm G., Doi-Hopf modules over weak Hopf algebras, *Comm. Algebra.*, 2000, **28**: 4687–4698.
[6] Bohm G., Nill F., Szlachanyi K., Weak Hopf algebras (I): Integral theory and $C*$-structure, *J. Algebra*, 1999, **221**: 385–438.