第50卷第2期 数学学报中文版 Vol.50, No.2
2007年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Mar., 2007

文章编号: 0583-1431(2007)02-0373-12 **文献标识码:** A

Riemann Zeta 函数的六阶和

孙 平

东北大学数学系 沈阳 110004
E-mail: plsun@mail.neu.edu.cn

摘 要 利用概率论与组合数学的方法, 研究了与 Riemann-zeta 函数 $\zeta(k)$ 的部分和 $\zeta_n(k)$ 有关的一些级数, 计算出了一些重要的和式. 特别的, Euler 的著名结果 $5\zeta(4)=2\zeta^2(2)$ 能够从四阶和式直接推出. 因此, 通过计算全部的 11 个六阶和式, 研究它们之间的非平凡关系, 就有可能得到 $\zeta(3)$ 的数值.

关键词 Riemann zeta 函数; Stirling 数; 组合恒等式
MR(2000) 主题分类 11M99, 05D40, 65B10
中图分类 O156.4

The 6-Order Sums of Riemann Zeta Function

Ping SUN

Department of Mathematics, Northeastern University, Shenyang 110004*, P. R. China*
E-mail: plsun@mail.neu.edu.cn

Abstract We study in this paper certain series involving $\zeta_n(k)$, which are the partial sums of Riemann-zeta function $\zeta(k)$, by the probabilistic and combinatorial methods, several important sums are evaluated. Specially the known result of Euler $5\zeta(4)=2\zeta^2(2)$ can be derived directly from the three sums of 4-order, and therefore the eleven sums of 6-order evaluated in this paper imply that it is possible to obtain the value of $\zeta(3)$ from searching for the nontrivial relation among certain series.

Keywords Riemann zeta function; Stirling numbers; combinatorial identities
MR(2000) Subject Classification 11M99, 05D40, 65B10
Chinese Library Classification O156.4

1 引言及命题

Euler 得到了如下著名的结果 [1]:

$$\zeta(2k)=(-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}, \tag{1.1}$$

这里 $k\ge 1$, B_{2k} 是 Bernoulli 数, 满足 $B_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k,\ B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2}$. 显然 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$, 并且

$$5\zeta(4)=2\zeta^2(2). \tag{1.2}$$

目前还没有类似于 (1.1) 关于 $\zeta(2k+1)$ 的封闭公式, 这方面的一些重要工作包括 Ramanujan

收稿日期: 2005-12-01; 修改日期: 2006-03-30

的部分结果 [2], Apéry's 关于 $\zeta(3)$ 的无理性的证明 [3] 以及 Zudilin [4] 的一些结果等. 然而, 人们甚至还不能确定 $\zeta(5)$ 是否是一个无理数.

定义 $\zeta(k)$ 的部分和 $\zeta_n(k)$ 为

$$\zeta_n(k)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^k},\ \ \zeta_n(1)=H_n.$$

我们把如下的级数称为 $\zeta_n(k)$ 的 $m(m\geq 3)$ 阶和式

$$S_m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_n^{k_1}(i_1)\zeta_n^{k_2}(i_2)\cdots\zeta_n^{k_r}(i_r)}{n^p},\ \ 2\leq p\leq m-1, \tag{1.3}$$

这里 $m=p+\sum i_jk_j$. 例如 S_3 只有一个 $\sum\frac{H_n}{n^2}$, 它的值为 $2\zeta(3)$; S_4 包含了 3 个级数: $\sum\frac{H_n}{n^3}$, $\sum\frac{H_n^2}{n^2}$, $\sum\frac{\zeta_n(2)}{n^2}$; S_5 有 6 个级数. 实际上, 容易验证 S_m 包含了 $p(1)+p(2)+\cdots+p(m-2)$ 个级数, $p(i)$ 是正整数 i 的分拆数.

S_m 所包含的每个级数的计算是一个困难的问题, 目前只解决了 $m\leq 6$ 的情况. 另一方面, 如果我们考察 S_4 (见文 [5–7]):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}=\frac{5}{2}\zeta(4)-\frac{1}{2}\zeta^2(2);\ \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^2}=\frac{11}{2}\zeta(4)-\frac{1}{2}\zeta^2(2);\ \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_n(2)}{n^2}=\frac{1}{2}\zeta(4)+\frac{1}{2}\zeta^2(2). \tag{1.4}$$

它们只与 $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ 有关, 有趣的是, 等式 (1.2) 能够直接从这 3 个级数推导出.

注意到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{H_i}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\Big(H_n-H_j+\frac{1}{j}\Big),$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{H_i}{i}=\frac{H_n^2+\zeta_n(2)}{2},\ \ n\geq 1,$$

从而我们得到如下的:

命题 1 当 $n\geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k(n+k)}=\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{2}H_n^2+\frac{1}{2}\zeta_n(2)+\zeta(2)-\frac{H_n}{n}\Big). \tag{1.5}$$

证明

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k(n+k)}&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(n+k)}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k}\Big)\\&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{j+i}=\frac{1}{n}\Big[\zeta(2)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+i}\Big)\Big]\\&=\frac{1}{n}\Big[\zeta(2)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{H_i}{i}\Big]=\frac{1}{n}\Big[\zeta(2)-\frac{H_n}{n}+\frac{H_n^2+\zeta_n(2)}{2}\Big].\end{aligned}$$

对 (1.5) 两边同时乘以 $1/n$ 并对 n 求和, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_n(2)}{n^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}=2\zeta^2(2). \tag{1.6}$$

这是 S_4 的 3 个级数之间的一个非平凡关系, 根据 (1.4), 它等价于 $5\zeta(4)=2\zeta^2(2)$, 从而也就意味着, 我们也许能够通过讨论一些级数之间的关系来研究 $\zeta(3)$ 与 $\zeta(5)$.

命题 2 已知 S_5 的 6 个级数如下 [7]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}=3\zeta(5)-\zeta(2)\zeta(3);\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^3}=\frac{7}{2}\zeta(5)-\zeta(2)\zeta(3);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_n(2)}{n^3}=-\frac{9}{2}\zeta(5)+3\zeta(2)\zeta(3);\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n\zeta_n(2)}{n^2}=\zeta(5)+\zeta(2)\zeta(3); \tag{1.7}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3}{n^2}=10\zeta(5)+\zeta(2)\zeta(3);\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_n(3)}{n^2}=\frac{11}{2}\zeta(5)-2\zeta(2)\zeta(3).$$

因为 $\zeta(2)$ 是已知的, 所以上式 6 个级数之间任何一个类似于 (1.6) 的非平凡关系都能够得到 $\zeta(5)/\zeta(3)$. 在本文的最后一节我们将给出 S_6 的 11 个级数, 它们都是 $\zeta(6)$ 与 $\zeta^2(3)$ 的有理和的形式, 从而, 这些级数之间的任何一个非平凡关系将蕴涵了 $\zeta(3)$ 的值.

2 预备知识

本文沿用文献 [7–9] 所使用的概率论与组合数学方法. 设 $u_1,u_2,\ldots$ 是独立同分布于 $(0,1)$ 区间上均匀分布的随机变量 (缩写成 u_i's, i.i.d $\sim U(0,1)$), $U(0,1)$ 的概率密度函数 (p.d.f) 是

$$p(x)=1,\ \ 0<x<1.$$

它的 n $(n\geq 0)$ 阶矩为 u^n 的数学期望

$$\mathbf{E}u^n=\int_{-\infty}^{+\infty}x^np(x)dx=\frac{1}{n+1}. \tag{2.1}$$

均匀分布的乘积 V_{k+1} 定义为

$$V_{k+1}=u_1u_2\cdots u_{k+1},\ \ k\geq 0$$

$0<V_{k+1}<1$, 它的密度函数出现在 Feller 的专著 [10] 中, 因此得到 $1-V_{k+1}$ 的密度函数 $p_{k+1}(x)$为:

引理 3 对任意 $k\geq 0$,

$$p_{k+1}(x)=\ln^k\Big(\frac{1}{1-x}\Big)/k!,\ \ 0<x<1. \tag{2.2}$$

满足如下递归关系的正整数 $\mathbf{s}(n,k)$ 称为第一类无符号 Stirling 数

$$\mathbf{s}(n,k)=\mathbf{s}(n-1,k-1)+(n-1)\mathbf{s}(n-1,k),\ \ n,k\geq 1,$$
$$\mathbf{s}(n,0)=\mathbf{s}(0,k)=0,\ \ n,k\geq 1,\ \ \mathbf{s}(0,0)=1,$$

已知 $\mathbf{s}(n,1)=(n-1)!,\ \ \mathbf{s}(n,2)=(n-1)!H_{n-1}$, 以及

$$\mathbf{s}(n,3)=\frac{(n-1)!}{2}[H_{n-1}^2-\zeta_{n-1}(2)],$$
$$\mathbf{s}(n,4)=\frac{(n-1)!}{6}[H_{n-1}^3-3H_{n-1}\zeta_{n-1}(2)+2\zeta_{n-1}(3)],\ldots,$$

$\mathbf{s}(n,k)$ 的发生函数 (GF) 见文献 [11]:

$$\sum_{n\geq k}\mathbf{s}(n,k)\frac{t^n}{n!}=\ln^k\Big(\frac{1}{1-t}\Big)/k!,\ \ k\geq 0, \tag{2.3}$$

即 $\mathbf{s}(n,k)$ 的发生函数就是 $1-V_{k+1}$ 的概率密度函数, 表明 Riemann zeta 函数 $\zeta(k)$, $k\geq 2$ 可以

通过均匀分布的乘积与 Stirling 数来研究. 例如

$$\begin{aligned}\zeta(k)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}V_k^{n-1}=\mathbf{E}\frac{1}{1-V_k}\\&=\mathbf{E}\frac{\ln^{k-1}(\frac{1}{1-u})/(k-1)!}{u}=\sum_{n\ge k-1}\frac{\mathbf{s}(n,k-1)}{n\,n!},\end{aligned}\tag{2.4}$$

这里 $u\sim U(0,1)$, $\mathbf{E}$ 是数学期望符号.

文献 [7] 给出了更一般的 Riemann zeta 函数的 Stirling 展开公式

$$\binom{k+r}{r}\zeta(k+r+1)=\sum_{n\ge k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n!}\frac{Y_r(n)/r!}{n},\quad k\ge 1,\quad r\ge 0,\tag{2.5}$$

$Y_0(n)=1$, $Y_r(n)=Y_r(\zeta_n(1),1!\zeta_n(2),\ldots,(m-1)!\zeta_n(m),\ldots)$, $Y_r(\cdot)$ 是指数型完全 Bell 多项式

$$\exp\left(\sum_{j\ge1}x_j\frac{t^j}{j!}\right)=1+\sum_{r\ge1}Y_r(x_1,x_2,\ldots)\frac{t^r}{r!}.$$

此外, 我们在文献 [8] 中推广了 [7] 的概率方法, 得到了 Stirling 级数的两个对称恒等式: 对任意正整数 $p\ge1$, $q\ge1$, $0\le r\le\min(p,q)-1$,

$$\sum_{n\ge p-r}\frac{\mathbf{s}(n+r,p)}{n^q\,n!}=\sum_{n\ge q-r}\frac{\mathbf{s}(n+r,q)}{n^p\,n!},\tag{2.6}$$

$$\sum_{n\ge p}\frac{\mathbf{s}(n,p)}{n\,n!}\zeta_n(q+1)=\sum_{n\ge q}\frac{\mathbf{s}(n,q)}{n\,n!}\zeta_n(p+1),\tag{2.7}$$

利用这两个对称恒等式可以给出 Euler 如下结果 [2] 的一个概率证明

$$2\sum_{n\ge1}\frac{H_n}{n^{k-1}}=(k+1)\zeta(k)-\sum_{i=2}^{k-2}\zeta(i)\zeta(k-i),\quad k\ge3.\tag{2.8}$$

文献 [9] 得到了 Riemann zeta 函数的卷积公式

$$\begin{aligned}&\sum_{n\ge k-1}\frac{\mathbf{s}(n,k-1)}{n!}\frac{H_n}{n^2}-\sum_{n\ge1}\frac{\zeta_n(2)}{n^k}\\&=\frac{(k+2)(k-1)}{2}\zeta(k+2)-\frac{k}{2}\sum_{i=2}^{k}\zeta(i)\zeta(k+2-i),\quad k\ge2.\end{aligned}\tag{2.9}$$

最后, 本文还将使用到 $H_n,\zeta_n(2)$ 的如下概率表示:

引理 4 设 u,u_1,u_2 i.i.d $\sim U(0,1)$, $V_2=u_1u_2$, 则对任意的 $n\ge1$, 有

$$n\mathbf{E}(1-V_2)^{n-1}=H_n,\tag{2.10}$$

$$n\mathbf{E}[1-u(1-V_2)]^{n-1}=\zeta_n(2).\tag{2.11}$$

证明 (2.10) 式的证明见文献 [8]. 为证 (2.11) 式, 根据随机变量的独立性 $\mathbf{E}[f(u)g(V_2)]=\mathbf{E}[f(u)]\mathbf{E}[g(V_2)]$ 以及 $\mathbf{E}V_2^k=\frac{1}{(k+1)^2}$, 有

$$n\mathbf{E}[1-u(1-V_2)]^{n-1}=n\mathbf{E}[(1-u)+uV_2)]^{n-1}=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\mathbf{E}[(1-u)^{n-k-1}u^k]\mathbf{E}V_2^k,$$

而 Beta 积分

$$\mathbf{E}[(1-u)^{n-k-1}u^k]=\int_0^1x^k(1-x)^{n-k-1}dx=\frac{k!(n-k-1)!}{n!},$$

因此 (2.11) 式得证.

3 两个必要的定理

定理 5 对任意正整数 $k \geq 1$,

$$\sum_{n\geq 1}\frac{H_n^2-\zeta_n(2)}{n^{k+1}}=\frac{(k+2)(k+4)}{3}\zeta(k+3)+\zeta(2)\zeta(k+1)$$
$$+\frac{1}{3}\sum_{k_i\,\geq\,2\,\sum k_i\,=\,k+3}\zeta(k_1)\zeta(k_2)\zeta(k_3)-\frac{k+3}{2}\sum_{i=2}^{k+1}\zeta(i)\zeta(k-i+3). \quad (3.1)$$

定理 6 对任意正整数 $k \geq 2$,

$$\sum_{j=2}^{k-1}(k-j+1)\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n(j)}{n^{k-j+2}}=\sum_{j=2}^{k}\Big(\frac{3}{2}k-j+1\Big)\zeta(j)\zeta(k-j+2)-\frac{k(k+3)}{2}\zeta(k+2). \quad (3.2)$$

4 定理的证明

定理 5 的证明 利用 Zagier 的多重 zeta 函数的方法 [12] 可以给出 (3.1) 式一个简单的证明, 但是不能处理如 (3.2) 式的更复杂情形. 为了说明概率方法如何应用到 Riemann zeta 函数的研究, 本文给出定理 5 的一个概率证明.

首先注意到一个简单的事实: 对任意变量 x, y, z 和正整数 $k \geq 3$,

$$\sum_{k_i\geq 1,\ \sum k_i=k}\binom{k}{k_1\ k_2\ k_3}x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3}$$
$$=(x+y+z)^k-(x+y)^k-(x+z)^k-(y+z)^k+x^k+y^k+z^k, \quad (4.1)$$

原因在于 (4.1) 式右边 x^k, y^k, z^k 肯定不会出现, 而 $x^{i_1}y^{i_2}$ ($i_1 \geq 1$, $i_2 \geq 1$) 只和 $[(x+y)+z]^k-(x+y)^k$ 的展开有关, 因此 $x^{i_1}y^{i_2}$ ($i_1 \geq 1$, $i_2 \geq 1$) 的系数必然等于零, 同理当 $i_1 \geq 1$, $i_2 \geq 1$ 时, $x^{i_1}z^{i_2}$ 和 $y^{i_1}z^{i_2}$ 的系数也等于零.

当 $k=1$ 和 $k=2$ 时, 定理 5 可由文献 [7] 中的结果导出, 因此只证明 $k \geq 3$ 时定理 5 成立, 由 (2.4) 式, 设随机变量 u_1, u_2, u_3 i.i.d $\sim U(0,1)$, 从而有

$$k!\sum_{k_i\geq 2,\ \sum k_i=k+3}\zeta(k_1)\zeta(k_2)\zeta(k_3)$$
$$=\mathbf{E}\Big[\frac{1}{u_1u_2u_3}\sum_{i_j\geq 1,\ \sum i_j=k}\binom{k}{i_1\ i_2\ i_3}\ln^{i_1}\Big(\frac{1}{1-u_1}\Big)\ln^{i_2}\Big(\frac{1}{1-u_2}\Big)\ln^{i_3}\Big(\frac{1}{1-u_3}\Big)\Big]$$
$$=\mathbf{E}\Big\{\frac{1}{u_1u_2u_3}\Big[\ln^k\Big(\frac{1}{(1-u_1)(1-u_2)(1-u_3)}\Big)+\ln^k\Big(\frac{1}{1-u_1}\Big)$$
$$+\ln^k\Big(\frac{1}{1-u_2}\Big)+\ln^k\Big(\frac{1}{1-u_3}\Big)-\ln^k\frac{1}{(1-u_1)(1-u_2)}$$
$$-\ln^k\frac{1}{(1-u_1)(1-u_3)}-\ln^k\frac{1}{(1-u_2)(1-u_3)}\Big]\Big\},$$

利用 $\mathbf{s}(n,k)$ 的发生函数以及

$(1-u_1)(1-u_2)(1-u_3)=\{1-[u_1+(1-u_1)u_2]\}(1-u_3)=1-\{u_3+(1-u_3)[u_1+(1-u_1)u_2]\}$,

我们得到如下的表示

$$\sum_{\substack{k_i\,\geq\,2\\ \sum k_i\,=\,k+3}}\zeta(k_1)\zeta(k_2)\zeta(k_3)=\mathbf{E}\sum_{n\geq k}\Big[\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n!}\frac{U_n}{u_1u_2u_3}\Big],$$

这里随机变量 U_n 为

$$U_n=\{u_3+(1-u_3)[u_1+(1-u_1)u_2]\}^n+u_1^n+u_2^n+u_3^n$$
$$-[u_1+(1-u_1)u_2]^n-[u_3+(1-u_3)u_1]^n-[u_3+(1-u_3)u_2]^n.$$

概率论中的单调收敛定理 [13] 保证了上面推导过程中期望符号 $\mathbf{E}$ 总是可以与求和符号 $\sum$ 交换 (本文多次使用了单调收敛定理), 因此

$$\sum_{\substack{k_i\ \geq 2\\ \sum k_i\ =\ k+3}}\zeta(k_1)\zeta(k_2)\zeta(k_3)=\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n!}\mathbf{E}\Big[\frac{U_n}{u_1u_2u_3}\Big]. \tag{4.2}$$

进一步

$$\begin{aligned}U_n&=(1-u_3)^n[u_1+(1-u_1)u_2]^n+\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}u_3^{n-r}(1-u_3)^r[u_1+(1-u_1)u_2]^r\\&\quad+u_3^n+u_1^n+u_2^n+u_3^n-[u_1+(1-u_1)u_2]^n-u_3^n-\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}u_3^{n-r}(1-u_3)^ru_1^r\\&\quad-(1-u_3)^nu_1^n-u_3^n-\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}u_3^{n-r}(1-u_3)^ru_2^r-(1-u_3)^nu_2^n\\&=\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}u_3^{n-r}(1-u_3)^r\{[u_1+(1-u_1)u_2]^r-u_1^r-u_2^r\}\\&\quad-[1-(1-u_3)^n]\{[u_1+(1-u_1)u_2]^n-u_1^n-u_2^n\},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[\frac{U_n}{u_1u_2u_3}\Big]&=\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}\mathbf{E}[u_3^{n-r-1}(1-u_3)^r]\mathbf{E}\Big\{\frac{[u_1+(1-u_1)u_2]^r-u_1^r-u_2^r}{u_1u_2}\Big\}\\&\quad-\mathbf{E}\Big[\frac{[1-(1-u_3)^n]}{u_3}\Big]\mathbf{E}\Big\{\frac{[u_1+(1-u_1)u_2]^n-u_1^n-u_2^n}{u_1u_2}\Big\}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

根据 Beta 积分 $\int_0^1x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$, (4.3) 右边第一个数学期望等于

$$\mathbf{E}[u_3^{n-r-1}(1-u_3)^r]=\frac{(n-r-1)!r!}{n!},$$

而 $u\sim U(0,1)$ 时有 $1-u\sim U(0,1)$, 所以 (4.3) 式右边第三个数学期望为

$$\mathbf{E}\Big[\frac{1-(1-u_3)^n}{u_3}\Big]=\mathbf{E}\frac{1-u_3^n}{1-u_3}=\mathbf{E}(1+u_3+\cdots+u_3^{n-1})=H_n,$$

最后, (4.3) 式右边第二个数学期望是

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\Big[\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m}u_1^{m-1}(1-u_1)^{n-m}u_2^{n-m-1}-u_2^{n-1}\Big(\frac{1-(1-u_1)^n}{u_1}\Big)\Big],\\&=\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m(n-m)}-\frac{H_n}{n}=\frac{H_n}{n}-\frac{2}{n^2},\end{aligned}$$

因此等式 (4.3) 简化成

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[\frac{U_n}{u_1u_2u_3}\Big]&=\sum_{r=1}^{n-1}\Big[\frac{1}{n-r}\Big(\frac{H_r}{r}-\frac{2}{r^2}\Big)\Big]-H_n\Big(\frac{H_n}{n}-\frac{2}{n^2}\Big)\\&=\sum_{r=1}^{n-1}\frac{H_r}{r(n-r)}-2\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r^2(n-r)}-\frac{H_n^2}{n}+2\frac{H_n}{n^2}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

通过交换求和顺序, 显然有

$$\sum_{r=1}^{n-1}\frac{H_r}{r}=\frac{1}{2}\Big[H_n^2-2\frac{H_n}{n}+\zeta_n(2)\Big].$$

同时, 注意到 H_n 的发生函数为 $\sum_{n\geq 1}H_nx^n=\frac{\ln\frac{1}{1-x}}{1-x}$. 因此, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{H_r}{n-r}&=[x^n]\Big(\sum_{i\geq 1}H_ix^i\Big)\Big(\sum_{j\geq 1}\frac{x^j}{j}\Big)=[x^n]\frac{\ln\frac{1}{1-x}}{1-x}\ln\frac{1}{1-x}\\&=2[x^n]\frac{1}{1-x}\sum_{m\geq 2}\frac{\mathbf{s}(m,2)}{m!}x^m=2[x^n](1+x+x^2+\cdots)\Big(\sum_{m\geq 2}\frac{H_{m-1}}{m}x^m\Big)\\&=2\sum_{m=2}^{n}\frac{H_{m-1}}{m}=2\sum_{m=1}^{n}\frac{H_m}{m}-2\zeta_n(2)=H_n^2-\zeta_n(2),\end{aligned}$$

符号 $[x^n]$ 表示发生函数展开式中 x^n 的系数, 从而得到

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{H_r}{r(n-r)}&=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n-1}H_r\Big(\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r}\Big)=\frac{1}{n}\Big[\sum_{r=1}^{n-1}\frac{H_r}{r}+\sum_{r=1}^{n-1}\frac{H_r}{n-r}\Big]\\&=\frac{3}{2}\frac{H_n^2}{n}-\frac{H_n}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{\zeta_n(2)}{n},\end{aligned}$$

以及

$$\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r^2(n-r)}=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r}\Big(\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r}\Big)=2\frac{H_n}{n^2}+\frac{\zeta_n(2)}{n}-3\frac{1}{n^3},$$

利用 (4.4) 式, 我们得出 (4.2) 式中的数学期望

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[\frac{U_n}{u_1u_2u_3}\Big]&=6\frac{1}{n^3}-3\frac{H_n}{n^2}+\frac{1}{2}\frac{H_n^2}{n}-\frac{5}{2}\frac{\zeta_n(2)}{n}\\&=6\frac{1}{n^3}-3\times\frac{1}{n}\Big[\frac{H_n}{n}+\zeta_n(2)\Big]+\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}[H_n^2+\zeta_n(2)],\end{aligned}$$

即 Riemann zeta 函数的三重卷积具有如下的 Stirling 展开

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{k_i\geq 2\\ \sum k_i=k+3}}\zeta(k_1)\zeta(k_2)\zeta(k_3)\\&=6\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n^3n!}-3\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n\,n!}\Big(\frac{H_n}{n}+\zeta_n(2)\Big)+\frac{1}{2}\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n\,n!}(H_n^2+\zeta_n(2)).\end{aligned}\tag{4.5}$$

根据 Euler 的结果 (2.8), 对称恒等式 (2.6) 蕴涵了

$$\begin{aligned}6\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n^3n!}&=6\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,3)}{n^kn!}=3\sum_{n\geq 1}\frac{H_{n-1}^2-\zeta_{n-1}(2)}{n^{k+1}}\\&=3\sum_{n\geq 1}\frac{H_n^2-\zeta_n(2)}{n^{k+1}}-6\sum_{n\geq 1}\frac{H_n}{n^{k+2}}+6\zeta(k+3)\\&=3\sum_{n\geq 1}\frac{H_n^2-\zeta_n(2)}{n^{k+1}}+3\sum_{i=2}^{k+1}\zeta(i)\zeta(k-i+3)-3(k+2)\zeta(k+3).\end{aligned}\tag{4.6}$$

在等式 (2.5) 中取 $r=2$, 立刻有

$$\frac{1}{2}\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n\,n!}(H_n^2+\zeta_n(2))=\binom{k+2}{2}\zeta(k+3).\tag{4.7}$$

为处理展开式 (4.5) 中的最后一个级数, 考虑 Riemann zeta 函数的一个特殊的卷积

$$\sum(k-i+2)\zeta(i)\zeta(k-i+3),$$

显然有

$$\sum_{i=2}^{k+1}(k-i+2)\zeta(i)\zeta(k-i+3)=\frac{k+1}{2}\sum_{i=2}^{k+1}\zeta(i)\zeta(k-i+3).$$

而同理于前面三重卷积的处理, 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{k+1}(k-i+2)\zeta(i)\zeta(k-i+3)\\
&=\mathbf{E}\Big[\sum_{i=2}^{k+1}\Big(\frac{\ln^{i-1}(\frac{1}{1-u_1})}{(i-1)!\,u_1}\Big)\Big(\frac{\ln^{k-i+2}(\frac{1}{1-u_2})}{(k-i+1)!\,u_2}\Big)\Big]\\
&=\mathbf{E}\Big\{\frac{\ln\frac{1}{1-u_2}}{k!\,u_1u_2}\sum_{i=2}^{k+1}\Big[\binom{k}{i-1}\ln^{i-1}\frac{1}{1-u_1}\ln^{k-i+1}\frac{1}{1-u_2}\Big]\Big\}\\
&=\mathbf{E}\Big\{\frac{\ln\frac{1}{1-u_2}}{u_1u_2}\Big[\frac{\ln^k\frac{1}{1-(u_1+u_2(1-u_1))}}{k!}-\frac{\ln^k\frac{1}{(1-u_2)}}{k!}\Big]\Big\}\\
&=\mathbf{E}\Big\{\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n!}\frac{\ln\frac{1}{1-u_2}}{u_1u_2}[(u_1+u_2(1-u_1))^n-u_2^n]\Big\}\\
&=\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n!}\Big\{\mathbf{E}u_1^{n-1}\mathbf{E}\frac{\ln\frac{1}{1-u_2}}{u_2}+\mathbf{E}\Big(u_2^{n-1}\ln\frac{1}{1-u_2}\Big)\mathbf{E}\Big[\frac{(1-u_1)^n-1}{u_1}\Big]\\
&\quad+\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}\mathbf{E}\Big(u_2^{r-1}\ln\frac{1}{1-u_2}\Big)\mathbf{E}[u_1^{n-r-1}(1-u_1)^r]\Big\}\\
&=\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n!}\Big[\frac{1}{n}\zeta(2)-\frac{H_n}{n}\times H_n+\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}\frac{H_r}{r}\frac{(n-r-1)!r!}{n!}\Big]\\
&=\zeta(2)\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n\,n!}-\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n\,n!}H_n^2+\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n!}\Big[\sum_{r=1}^{n-1}\frac{H_r}{r(n-r)}\Big]\\
&=\zeta(2)\zeta(k+1)+\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n!}\Big[\frac{1}{2}\frac{H_n^2}{n}-\frac{H_n}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{\zeta_n(2)}{n}\Big]\\
&=\zeta(2)\zeta(k+1)+\frac{1}{2}\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n\,n!}(H_n^2+\zeta_n(2))-\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n\,n!}\Big(\frac{H_n}{n}+\zeta_n(2)\Big)\\
&=\zeta(2)\zeta(k+1)+\binom{k+2}{2}\zeta(k+3)-\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n\,n!}\Big(\frac{H_n}{n}+\zeta_n(2)\Big),
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
&-3\sum_{n\geq k}\frac{\mathbf{s}(n,k)}{n\,n!}\Big(\frac{H_n}{n}+\zeta_n(2)\Big)\\
&\quad=\frac{3k+3}{2}\sum_{i=2}^{k+1}\zeta(i)\zeta(k-i+3)-3\zeta(2)\zeta(k+1)-3\binom{k+2}{2}\zeta(k+3),
\end{aligned}\tag{4.8}$$

故 (4.6)–(4.8) 式蕴涵了定理 5

$$\sum_{\substack{k_i\ \geq\ 2\\ \sum k_i\ =\ k+3}} \zeta(k_1)\zeta(k_2)\zeta(k_3) = 3\sum_{n\geq 1}\frac{H_n^2-\zeta_n(2)}{n^{k+1}} + \frac{3k+9}{2}\sum_{i=2}^{k+1}\zeta(i)\zeta(k-i+3)$$
$$-3\zeta(2)\zeta(k+1)-(k+2)(k+4)\zeta(k+3).$$

定理 6 的证明 考虑对称恒等式 (2.7) 以及 (2.11) 的概率形式, 根据 $\mathbf{s}(n,1)=(n-1)!$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n(k)}{n^2} &= \sum_{n\geq 1}\frac{\mathbf{s}(n,k-1)}{n\,n!}\zeta_n(2) = \sum_{n\geq 1}\frac{\mathbf{s}(n,k-1)}{n!}\mathbf{E}[1-u(1-V_2)]^{n-1}\\
&= \frac{1}{(k-1)!}\mathbf{E}\left[\frac{\ln^{k-1}\frac{1}{u(1-V_2)}}{1-u(1-V_2)}\right]\\
&= \mathbf{E}\left\{\frac{1}{1-u(1-V_2)}\sum_{r=0}^{k-1}\left[\frac{\ln^r\frac{1}{1-V_2}}{r!}\cdot\frac{\ln^{k-1-r}\frac{1}{u}}{(k-1-r)!}\right]\right\}\\
&= \sum_{r=1}^{k-1}\sum_{n\geq 1}\mathbf{E}\left[\frac{(1-V_2)^{n-1}\ln^r\frac{1}{1-V_2}}{r!}\right]\cdot\mathbf{E}\left[\frac{u^{n-1}\ln^{k-1-r}\frac{1}{u}}{(k-1-r)!}\right]\\
&\quad+\mathbf{E}\left[\frac{1}{1-u(1-V_2)}\cdot\frac{\ln^{k-1}\frac{1}{u}}{(k-1)!}\right]\triangleq A_1+A_2,\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}A_2 &= \sum_{n\geq 1}\mathbf{E}(1-V_2)^{n-1}\mathbf{E}\left[u^{n-1}\frac{\ln^{k-1}\frac{1}{u}}{(k-1)!}\right] = \sum_{n\geq 1}\left[\frac{H_n}{n}\int_0^1 x^{n-1}\frac{\ln^{k-1}\frac{1}{x}}{(k-1)!}dx\right]\\
&= \sum_{n\geq 1}\left[\frac{H_n}{n}\times\mathbf{E}V_k^{n-1}\right] = \sum_{n\geq 1}\left[\frac{H_n}{n}\times\frac{1}{n^k}\right] = \sum_{n\geq 1}\frac{H_n}{n^{k+1}}.\end{aligned}\tag{4.9}$$

A_1 中的第二个数学期望显然是 $\frac{1}{n^{k-r}}$, 利用 $\mathbf{s}(n,k)$ 的发生函数与 V_2 的概率密度函数, A_1 中的第一个数学期望是

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\frac{(1-V_2)^{n-1}\ln^r\frac{1}{1-V_2}}{r!}\right] &= \sum_{m\geq r}\frac{\mathbf{s}(m,r)}{m!}\mathbf{E}[V_2^m(1-V_2)^{n-1}]\\
&= \sum_{m\geq r}\frac{\mathbf{s}(m,r)}{m!}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-1}\ln\frac{1}{x}dx\\
&= \sum_{m\geq r}\frac{\mathbf{s}(m,r)}{m!}\int_0^1 (1-x)^m x^{n-1}\ln\frac{1}{1-x}dx\\
&= \sum_{m\geq r}\frac{\mathbf{s}(m,r)}{m!}\mathbf{E}\left[(1-u)^m u^{n-1}\ln\frac{1}{1-u}\right]\\
&= \mathbf{E}\left[u^{n-1}\ln\frac{1}{1-u}\frac{\ln^r\frac{1}{u}}{r!}\right] = \sum_{m\geq 1}\mathbf{E}\left[\frac{u^{m+n-1}}{m}\frac{\ln^r\frac{1}{u}}{r!}\right]\\
&= \sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}\mathbf{E}V_{r+1}^{m+n-1} = \sum_{m\geq 1}\frac{1}{m(m+n)^{r+1}}.\end{aligned}$$

利用数学归纳法容易验证

$$\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m(m+n)^{r+1}} = \frac{H_n}{n^{r+1}} - \sum_{j=2}^{r+1}\frac{\zeta(j)-\zeta_n(j)}{n^{r-j+2}},\tag{4.10}$$

因此

$$\begin{aligned}A_1&=\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{n\geq 1}\left[\frac{H_n}{n^{k+1}}-\sum_{j=2}^{r+1}\frac{\zeta(j)-\zeta_n(j)}{n^{k-j+2}}\right]\\&=(k-1)\sum_{n\geq 1}\frac{H_n}{n^{k+1}}-\sum_{j=2}^{k}(k-j+1)\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta(j)-\zeta_n(j)}{n^{k-j+2}}\\&=(k-1)\sum_{n\geq 1}\frac{H_n}{n^{k+1}}-\sum_{j=2}^{k}(k-j+1)\zeta(j)\zeta(k-j+2)\\&\quad+\sum_{j=2}^{k-1}(k-j+1)\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n(j)}{n^{k-j+2}}+\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n(k)}{n^2}.\end{aligned}$$

从而对任意的 $k\geq 2$, 我们有

$$\sum_{j=2}^{k-1}(k-j+1)\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n(j)}{n^{k-j+2}}=k\sum_{n\geq 1}\frac{H_n}{n^{k+1}}-\sum_{j=2}^{k}(k-j+1)\zeta(j)\zeta(k-j+2).$$

再根据 (2.8) 式, 定理 6 得证.

5 主要结果: S_6 的 11 个级数

从 Euler 的结果 (1.1) 我们知道

$$\zeta(2)\zeta(4)=\frac{7}{4}\zeta(6),\ \ \zeta^3(2)=\frac{35}{8}\zeta(6).$$

容易推出 S_6 一共包含了 11 个级数

$$\sum_{n\geq 1}\frac{H_n}{n^5},\ \ \sum_{n\geq 1}\frac{H_n^2}{n^4},\ \ \sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n(2)}{n^4},\ \ \sum_{n\geq 1}\frac{H_n^3}{n^3},\ \ \sum_{n\geq 1}\frac{H_n\zeta_n(2)}{n^3},\ \ \sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n(3)}{n^3},$$
$$\sum_{n\geq 1}\frac{H_n^4}{n^2},\ \ \sum_{n\geq 1}\frac{H_n^2\zeta_n(2)}{n^2},\ \ \sum_{n\geq 1}\frac{H_n\zeta_n(3)}{n^2},\ \ \sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n^2(2)}{n^2},\ \ \sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n(4)}{n^2},$$

其中第一个级数的值能够从 (2.8) 式直接得出, 而根据如下关系式

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n(q)}{n^p}+\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n(p)}{n^q}=\zeta(p+q)+\zeta(p)\zeta(q),\ \ p,q\geq 2,$$

第六个级数也容易得到, 即

$$\sum_{n\geq 1}\frac{H_n}{n^5}=\frac{7}{4}\zeta(6)-\frac{1}{2}\zeta^2(3),\ \ \ \sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n(3)}{n^3}=\frac{1}{2}\zeta(6)+\frac{1}{2}\zeta^2(3).\tag{5.1}$$

在定理 6 中取 $k=4$, 则有

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n(2)}{n^4}=-\frac{1}{3}\zeta(6)+\zeta^2(3),\ \ \sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n(4)}{n^2}=\frac{37}{12}\zeta(6)-\zeta^2(3),\tag{5.2}$$

在定理 5 中取 $k=3$, 所以

$$\sum_{n\geq 1}\frac{H_n^2}{n^4}=\frac{97}{24}\zeta(6)-2\zeta^2(3).\tag{5.3}$$

第八个级数的值蕴涵在等式 (2.5) 中, 实际上, 当 $k=3$, $r=2$ 以及 $k=1$, $r=4$ 时, 我们得到如下两个方程

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{H_n^4}{n^2}+3\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{H_n^2\zeta_n(2)}{n^2}+2\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{H_n\zeta_n(3)}{n^2}=\frac{121}{2}\zeta(6)+6\zeta^2(3),$$
$$\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{H_n^4}{n^2}-3\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{H_n^2\zeta_n(2)}{n^2}+2\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{H_n\zeta_n(3)}{n^2}=40\zeta(6)-6\zeta^2(3),$$

因此导出

$$\sum_{n\geq 1}\frac{H_n^2\zeta_n(2)}{n^2}=\frac{41}{12}\zeta(6)+2\zeta^2(3), \tag{5.4}$$

以及等式

$$\sum_{n\geq 1}\frac{H_n^4}{n^2}+2\sum_{n\geq 1}\frac{H_n\zeta_n(3)}{n^2}=\frac{201}{4}\zeta(6). \tag{5.5}$$

另一方面, 在 (2.9) 式中取 $k=4$, 又有

$$\sum_{n\geq 1}\frac{H_n^3}{n^3}-\sum_{n\geq 1}\frac{H_n\zeta_n(2)}{n^3}=\frac{95}{12}\zeta(6)-5\zeta^2(3), \tag{5.6}$$

令对称恒等式 (2.6) 中的 $p=4$, $q=3$, $r=1$, 有

$$\sum_{n\geq 1}\frac{H_n^3}{n^3}-3\sum_{n\geq 1}\frac{H_n\zeta_n(2)}{n^3}=\frac{97}{8}\zeta(6)-10\zeta^2(3), \tag{5.7}$$

因此得到

$$\sum_{n\geq 1}\frac{H_n^3}{n^3}=\frac{93}{16}\zeta(6)-\frac{5}{2}\zeta^2(3),\quad \sum_{n\geq 1}\frac{H_n\zeta_n(2)}{n^3}=-\frac{101}{48}\zeta(6)+\frac{5}{2}\zeta^2(3). \tag{5.8}$$

同时, 取 (2.7) 式中 $p=1$, $q=3$, 有

$$2\sum_{n\geq 1}\frac{H_n\zeta_n(2)}{n^3}+\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n^2(2)}{n^2}=-\frac{41}{12}\zeta(6)+6\zeta^2(3),$$

所以

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n^2(2)}{n^2}=\frac{19}{24}\zeta(6)+\zeta^2(3). \tag{5.9}$$

最后, 等式 (2.5) 中 $k=2$, $r=3$ 给出

$$2\sum_{n\geq 1}\frac{H_n^2}{n^4}+2\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n(2)}{n^4}-2\sum_{n\geq 1}\frac{H_n^3}{n^3}-2\sum_{n\geq 1}\frac{H_n\zeta_n(2)}{n^3}+\sum_{n\geq 1}\frac{H_n^4}{n^2}-\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta_n^2(2)}{n^2}=40\zeta(6).$$

因此, 我们得到

$$\sum_{n\geq 1}\frac{H_n^4}{n^2}=\frac{979}{24}\zeta(6)+3\zeta^2(3), \tag{5.10}$$

并且根据 (5.5) 式, S_6 的第九个级数等于

$$\sum_{n\geq 1}\frac{H_n\zeta_n(3)}{n^2}=\frac{227}{48}\zeta(6)-\frac{3}{2}\zeta^2(3), \tag{5.11}$$

从而计算出了 S_6 的全部 11 个级数.

问题 7 如下的 11 个级数是否具有一种非平凡的线性关系? 如果这种关系存在, 则意味着 $\zeta(3)=\sqrt{c}\pi^3$, c 是一个有理数.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^5}=\frac{7}{4}\zeta(6)-\frac{1}{2}\zeta^2(3);\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^4}=\frac{97}{24}\zeta(6)-2\zeta^2(3);\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_n(2)}{n^4}=-\frac{1}{3}\zeta(6)+\zeta^2(3);\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3}{n^3}=\frac{93}{16}\zeta(6)-\frac{5}{2}\zeta^2(3);\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n\zeta_n(2)}{n^3}=-\frac{101}{48}\zeta(6)+\frac{5}{2}\zeta^2(3);\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_n(3)}{n^3}=\frac{1}{2}\zeta(6)+\frac{1}{2}\zeta^2(3);\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^4}{n^2}=\frac{979}{24}\zeta(6)+3\zeta^2(3);\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2\zeta_n(2)}{n^2}=\frac{41}{12}\zeta(6)+2\zeta^2(3);\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n\zeta_n(3)}{n^2}=\frac{227}{48}\zeta(6)-\frac{3}{2}\zeta^2(3);\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_n^2(2)}{n^2}=\frac{19}{24}\zeta(6)+\zeta^2(3);\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_n(4)}{n^2}=\frac{37}{12}\zeta(6)-\zeta^2(3).
\end{aligned}\tag{5.12}$$

参 考 文 献

[1] Magnus W., Oberhettinger F., Soni R. P., Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics, Berlin: Springer-Verlag, 1966.

[2] Berndt B. C., Ramanujan's Notebooks, Part I, New York: Springer-Verlag, 1985.

[3] Van Der Poorten A., A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$, *New Math. Intelli.*, 1979, **1**: 195–203.

[4] Zudilin W., One of the numbers $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ is Irrational, *Uspekhi Math. Nauk.*, 2001, **4**: 149–150.

[5] Borwein D., Borwein J. M., On an integral and some series related to $\zeta(4)$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1995, **4**: 1191–1198.

[6] Shen L. C., Remarks on some integrals and series involving the Stirling numbers and $\zeta(n)$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1995, **4**: 1391–1399.

[7] Sun P., Computing the 5-order sums of $\zeta(k)$, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2003, **46**(2): 297–302.

[8] Sun P., Product of uniform distribution and Stirling numbers of the first kind, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2005, **21**(6): 1435–1442.

[9] Sun P., A new convolution formula of $\zeta(i)$, *Adv. Math.*, accepted, to appear.

[10] Feller W., An introduction to probability theory and its application, Vol.II, New York: John Wiley & Sons, Inc, 1971.

[11] Comtet L., Advanced combinatorics, Boston: D Reidel Publishing Company, 1974.

[12] Borwein J. M., Bradley D. M., Evaluation of k-fold Euler/Zagier sums: a compendium of results for arbitrary k, *Elec. J. Combin.* 1997, **4**(2): # R5.

[13] Chow Y. S., Teicher H., Probability theory, Second Edition, New York: Springer-Verlag, 1988.