第50卷第2期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.50, No.2
2007年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Mar., 2007

文章编号: 0583-1431(2007)02-0473-08 **文献标识码: A**

Hilbert 空间线性二次最优控制问题中的一个算子的可逆性

侯国林 阿拉坦仓 黄俊杰

内蒙古大学理工学院数学系 呼和浩特 010021
E-mail: houguolin@163.com

摘 要 对于如下出现在 Hilbert 空间线性二次最优控制问题中的线性算子

$$\begin{pmatrix} F_1 & 0 & F_2 \\ F_3 & -F_1^* & F_4 \\ -F_4^* & F_2^* & -F_5 \end{pmatrix},$$

其中 F_3, F_5 是自伴算子. 本文得到了它具有有界逆的充分必要条件, 并举例验证了结果的有效性.

关键词 线性二次最优控制问题; 可逆性; 非负性
MR(2000) 主题分类 47A10, 47A55
中图分类 O175.3

Invertibility of an Operator Appearing in the Linear-Quadratic Optimal Control Problems in a Hilbert Space

Guo Lin HOU Alatancang Jun Jie HUANG

Department of Mathematics, College of Science and Technology, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, *P. R. China*
E-mail: houguolin@163.com

Abstract In this paper, the sufficient and necessary conditions are obtained for the existence of a bounded inverse operator for a linear operator appearing in the linear-quadratic optimal control problems in a Hilbert space and having a matrix representation of the following form

$$\begin{pmatrix} F_1 & 0 & F_2 \\ F_3 & -F_1^* & F_4 \\ -F_4^* & F_2^* & -F_5 \end{pmatrix},$$

where F_3, F_5 are self-adjoint operators, the effectiveness of this result has been shown on several test examples.

Keywords linear-quadratic optimal control problems; invertibility; nonnegativity
MR(2000) Subject Classification 47A10, 47A55
Chinese Library Classification O175.3

收稿日期: 2006-03-03; 接受日期: 2006-09-21
基金项目: 国家自然科学基金 (10562002); 内蒙古自然科学基金 (200508010103); 内蒙古大学青年基金 (ND0407)

0 引言

对于给定的 Hilbert 空间 X, Y, $\mathscr{B}(X)$ 和 $\mathscr{B}(X,Y)$ 分别表示 X 上和从 X 到 Y 的所有有界线性算子构成的 Banach 空间. 对于算子 A, 我们分别用 $\mathscr{D}(A)$, $\operatorname{Ker} A$, $R(A)$ 和 A^* 表示 A 的定义域、核空间、值域和共轭算子. 一个线性算子 A 称为是正规可解的, 如果 $R(A)$ 是闭的.

我们用 I_X 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ 分别表示 Hilbert 空间 X 上的单位算子和内积, 在不至于引起混淆的情况下, 分别简写为 I 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 称 $A\in\mathscr{B}(X)$ 是非负的, 如果对于任意的 $x\in X$, 都有 $\langle Ax,x\rangle\geq 0$.

设 X_1, X_2, X_3 都是 Hilbert 空间, $F_1:\mathscr{D}(F_1)\subset X_1\to X_2$ 是稠定闭线性算子, $F_2\in\mathscr{B}(X_3,X_2)$, $F_3\in\mathscr{B}(X_1)$, $F_4\in\mathscr{B}(X_3,X_1)$, $F_5\in\mathscr{B}(X_3)$, F_3 和 F_5 都是自伴线性算子 (即 $F_3^*=F_3, F_5^*=F_5$), 我们用 F 表示如下的算子矩阵

$$F=\begin{pmatrix} F_1 & 0 & F_2\\ F_3 & -F_1^* & F_4\\ -F_4^* & F_2^* & -F_5\end{pmatrix}:\mathscr{D}(F_1)\dotplus\mathscr{D}(F_1^*)\dotplus X_3\to X_2\dotplus X_1\dotplus X_3. \tag{1}$$

形如 F 的线性算子在 Hilbert 空间的最优控制问题中有着重要的应用. Kurina 在文 [1] 和文 [2] 中分别对 Hilbert 空间中的连续和离散的二次最优控制问题的可解性进行了研究, 其中形如 F 的线性算子的可逆性起着至关重要的作用.

Kurina 在线性算子 $\left(\begin{smallmatrix} F_3 & F_4\\ F_4^* & F_5\end{smallmatrix}\right)$ 非负的假设下, 得到了算子 F 可逆的充分条件 [1−3]. 但是那些条件并不是必要的, 见本文的的例 1 .

本文首先在 $\left(\begin{smallmatrix} F_3 & F_4\\ F_4^* & F_5\end{smallmatrix}\right)$ 非负的假设下, 得到了算子 F 可逆的充分必要条件 (即定理 4), 并且证明了文 [3] (或 [1]) 中关于算子 F 可逆性的所有结果都是我们结论的推论; 其次去掉 $\left(\begin{smallmatrix} F_3 & F_4\\ F_4^* & F_5\end{smallmatrix}\right)$ 非负的限制, 我们也得到了 F 可逆的充分必要条件, 因此完全地解决了 F 的可逆性; 最后, 举例验证了结果的有效性.

1 主要结果及证明

为了证明我们的主要结果, 先介绍几个引理.

引理 1 设 X 是 Hilbert 空间, $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to X$ 是闭线性算子, 则下列条件相互等价:

(a1) 不存在序列 $x_n\in\mathscr{D}(T)$, $\|x_n\|=1$, 使得对所有的 $n\in\mathbb{N}$, 有 $Tx_n\to 0$;

(b1) $\operatorname{Ker} T=\{0\}$ 且 $R(T)$ 是闭的;

(c1) 算子 T 是下有界的, 即存在一个常数 $\delta>0$, 满足

$$\|Tx\|\geq\delta\|x\|,\ 对于任意的\ x\in\mathscr{D}(T).$$

证明 参见文 [4].

注 2 一个线性算子是下有界的并不能保证它具有有界逆.

引理 3 假设 $\left(\begin{smallmatrix} F_3 & F_4\\ F_4^* & F_5\end{smallmatrix}\right)$ 是非负的, 则算子 F 是下有界的当且仅当下面两个条件都成立:

(a2) 算子 $\left(\begin{smallmatrix} F_1 & F_2\\ F_3 & F_4\\ F_4^* & F_5\end{smallmatrix}\right)$ 是下有界的;

(b2) 算子 $\left(\begin{smallmatrix} F_1^*\\ F_2^*\end{smallmatrix}\right)$ 是下有界的.

证明 必要性. 假设 F 是下有界的, 由于

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & -I\end{pmatrix}F=\begin{pmatrix} F_1 & 0 & F_2\\ F_3 & -F_1^* & F_4\\ F_4^* & -F_2^* & F_5\end{pmatrix}$$

且算子

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{pmatrix}$$

具有有界逆, 故算子

$$\begin{pmatrix} F_1 & 0 & F_2 \\ F_3 & -F_1^* & F_4 \\ F_4^* & -F_2^* & F_5 \end{pmatrix}$$

是下有界的. 因此, 算子

$$\begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \\ F_4^* & F_5 \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} F_1^* \\ F_2^* \end{pmatrix}$$

必须是下有界的, 即 (a2) 和 (b2) 成立.

充分性. 假设 (a2) 和 (b2) 成立, 如果 F 不是下有界的, 据引理 1 知存在一个序列 $\{x_n\}$满足

$$x_n \in \mathscr{D}(F_1) \dotplus \mathscr{D}(F_1^*) \dotplus X_3, \quad \|x_n\| = 1 \tag{2}$$

并对所有的 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$Fx_n \to 0. \tag{3}$$

记

$$x_n = \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ x_n^3 \end{pmatrix}, \quad \text{其中} \quad x_n^1 \in \mathscr{D}(F_1), \quad x_n^2 \in \mathscr{D}(F_1^*), \quad x_n^3 \in X_3,$$

由 (3) 式可以得到

$$F_1x_n^1 + F_2x_n^3 \to 0, \quad F_3x_n^1 - F_1^*x_n^2 + F_4x_n^3 \to 0, \quad -F_4^*x_n^1 + F_2^*x_n^2 - F_5x_n^3 \to 0. \tag{4}$$

据 (2) 知序列 $\{x_n^1\}, \{x_n^2\}, \{x_n^3\}$ 都是有界的, 接着在 (4) 中第一式的左边用 x_n^2, 在第二式右边用 x_n^1, 在第三式右边用 $(-x_n^3)$ 做内积, 并将所得结果相加得到

$$\left\langle \begin{pmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4^* & F_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^3 \end{pmatrix} \right\rangle \to 0. \tag{5}$$

因为算子 $\left(\begin{smallmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4^* & F_5 \end{smallmatrix}\right)$ 是非负的, 从 (5) 式得

$$\sqrt{\begin{pmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4^* & F_5 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^3 \end{pmatrix} \to 0,$$

其中 $\sqrt{T}$ 表示非负算子 T 的算术平方根算子. 进一步有

$$\begin{pmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4^* & F_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^3 \end{pmatrix} \to 0.$$

根据 (4) 式, 得到

$$\begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \\ F_4^* & F_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^3 \end{pmatrix} \to 0, \quad \begin{pmatrix} F_1^* \\ F_2^* \end{pmatrix} x_n^2 \to 0.$$

由 (a2), (b2) 和引理 1, 可知

$$x_n^1 \to 0, \quad x_n^2 \to 0, \quad x_n^3 \to 0,$$

故 $x_n \to 0$, 这与 (2) 式相矛盾. 证毕.

定理 4 假设 $\begin{pmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4^* & F_5 \end{pmatrix}$ 是非负的, 则 F 具有有界逆当且仅当引理 3 中的 (a2) 和 (b2) 成立.

证明 假设 F 具有有界逆, 则 F 一定是下有界的, 据引理 3 的必要性知 (a2) 和 (b2) 成立. 反之, 若引理 3 中的 (a2) 和 (b2) 成立, 据引理 3 的充分性知 F 是下有界的, 再由引理 1 知 $\operatorname{Ker} F = \{0\}$ 且 $R(F)$ 闭. 类似于引理 3 的证明, 可以得到 F^* 是下有界的当且仅当引理 3 中的 (a2) 和 (b2) 成立, 故在 (a2) 和 (b2) 成立的条件下还有 $\operatorname{Ker} F^* = \{0\}$, 于是

$$R(F) = (\operatorname{Ker} F^*)^{\perp} = X_2 \dot{+} X_1 \dot{+} X_3$$

(参见文 [4, 47 页]). 因此, F 具有有界逆. 证毕.

定理 5 假设自伴算子 F_3 和 F_5 是非负的, 则算子

$$F_0 = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & F_2 \\ F_3 & -F_1^* & 0 \\ 0 & F_2^* & -F_5 \end{pmatrix}$$

具有有界逆当且仅当以下两个条件都成立:

(a3) 算子 $\begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & 0 \\ 0 & F_5 \end{pmatrix}$ 是下有界的;

(b3) 算子 $\begin{pmatrix} F_1^* \\ F_2^* \end{pmatrix}$ 是下有界的.

证明 容易看出 F_0 是算子 F 当 $F_4 = 0$ 的特殊情形, 由于 F_3 和 F_5 是非负的, 故 $\begin{pmatrix} F_3 & 0 \\ 0 & F_5 \end{pmatrix}$ 也是非负的, 根据定理 4 得 F_0 具有有界逆当且仅当 (a3) 和 (b3) 成立. 证毕.

推论 6 假设自伴算子 F_3 和 F_5 是非负的, 若算子 F_0 满足下面两条件之一, 则 F_0 具有有界逆.

(a4) 算子 F_1 和 F_5 具有有界逆;

(b4) 算子 F_1 有界且 F_2 和 F_3 具有有界逆.

证明 由定理 5, 只需证明 (a4) 和 (b4) 分别蕴含 (a3) 和 (b3) 即可.

事实上, 若 (a4) 成立, 易知算子

$$\begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & 0 \\ 0 & F_5 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} F_1^* \\ F_2^* \end{pmatrix}$$

都是下有界的, 故 (a3) 和 (b3) 成立.

若 (b4) 成立, 则 (b3) 显然成立, 故只需证明 (a3) 也成立. 如果 (a3) 不成立, 则存在序列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_n \in \mathscr{D}(F_1) \dot{+} X_3, \quad \|x_n\| = 1 \tag{6}$$

且对所有的 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & 0 \\ 0 & F_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^3 \end{pmatrix} \to 0, \tag{7}$$

其中

$$x_n = \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^3 \end{pmatrix}, \quad x_n^1 \in \mathscr{D}(F_1), \quad x_n^3 \in X_3.$$

根据 (7) 式, 我们得到

$$F_1 x_n^1 + F_2 x_n^3 \to 0, \quad F_3 x_n^1 \to 0, \quad F_5 x_n^3 \to 0. \tag{8}$$

由于算子 F_3 具有有界逆, 据 (8) 式有 $x_n^1 \to 0$. 进一步, 据 (8) 的第一式和 F_1 的有界性, 可得 $F_2 x_n^3 \to 0$. 再由 F_2 的可逆性, 可得 $x_n^3 \to 0$. 因此从上面的证明知 $x_n \to 0$, 这与 (6) 式相矛盾. 证毕.

注 7 推论 6 是文 [3] 中的定理 1.

从定理 4 和引理 1, 还可以容易地得到下面两个推论.

推论 8 如果算子 $\begin{pmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4^* & F_5 \end{pmatrix}$ 可逆且非负, 并且算子 $(F_1\ F_2)^*$ 是单射且正规可解的, 则算子 F 具有有界逆.

推论 9 如果算子 $\begin{pmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4^* & F_5 \end{pmatrix}$ 是非负的, 且算子

$$(F_1\,F_2)^*, \quad \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \\ F_4^* & F_5 \end{pmatrix}$$

都是单射且正规可解的, 则算子 F 具有有界逆.

注 10 推论 8 和推论 9 分别为文 [3] 中的定理 2 和定理 3.

下面将去掉 $\begin{pmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4^* & F_5 \end{pmatrix}$ 非负的限制, 给出 F 可逆的充分必要条件, 为此先证明一个重要引理.

引理 11 设 X 和 Y 都是 Hilbert 空间,

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & -A^* \end{pmatrix} : \mathscr{D}(A) \dotplus \mathscr{D}(A^*) \subset X \dotplus Y \to Y \dotplus X$$

是稠定闭线性算子, 其中 A 为稠定闭算子, C 为有界自伴算子, 则 H 具有有界逆当且仅当下面两个条件都成立:

(a5) $R(A) = Y$;

(b5) 算子 C 相应于空间分解 $X = \operatorname{Ker} A \dotplus (\operatorname{Ker} A)^\perp \to X = R(A^*)^\perp \dotplus \overline{R(A^*)}$ 的表示 $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2^* & C_4 \end{pmatrix}$ 中, C_1 是满射, 即 $R(C_1) = R(A^*)^\perp$.

证明 假设 H 具有有界逆, 则 $R(H) = Y \dotplus X$, 故 $R(A) = Y$. 若 (b5) 不成立, 即 C_1 不是满射, 于是存在 $z \in R(A^*)^\perp, z \neq 0$ 使得对于所有的 $x \in \operatorname{Ker} A$, 有 $Cx = C_1 x \neq z$, 因此对于所有的 $x \in \mathscr{D}(A)$, $y \in \mathscr{D}(A^*)$ 有:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix},$$

这表明 H 不是满射, 这与 H 可逆相矛盾. 必要性证完.

充分性. 假设 (a5) 和 (b5) 成立, 则 $R(A^*)$ 是闭的. 在空间分解

$$X \dotplus Y = \operatorname{Ker} A \dotplus (\operatorname{Ker} A)^\perp \dotplus Y \to Y \dotplus X = Y \dotplus R(A^*)^\perp \dotplus R(A^*)$$

下, 算子 H 可以表示为

$$H = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 \\ C_1 & C_2 & 0 \\ C_2^* & C_4 & -A_1^* \end{pmatrix},$$

其中 A_1 是 A 在 $(\operatorname{Ker} A)^\perp \cap \mathscr{D}(A)$ 上的限制, C_1, C_4 都是有界自伴算子.

注意到 $\operatorname{Ker}(A_1) = \{0\}$ 且 $R(A_1) = R(A) = Y$, 我们得到 A_1 具有有界逆. 因为 C_1 是有界自伴算子且 $R(C_1) = R(A^*)^\perp$, 故

$$\operatorname{Ker}(C_1) \cap \operatorname{Ker}(A) = R(C_1)^\perp \cap R(A^*)^\perp = \{0\}.$$

因此 C_1 具有有界逆. 由于

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -C_2A_1^{-1} & I & 0 \\ (C_2^*C_1^{-1}C_2 - C_4)A_1^{-1} & -C_2^*C_1^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 \\ C_1 & C_2 & 0 \\ C_2^* & C_4 & -A_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_1^* \end{pmatrix}$$

且算子

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -C_2A_1^{-1} & I & 0 \\ (C_2^*C_1^{-1}C_2 - C_4)A_1^{-1} & -C_2^*C_1^{-1} & I \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_1^* \end{pmatrix}$$

都具有有界逆, 则 H 具有有界逆. 证毕.

注 12 在引理 11 的证明过程中, 我们充分地利用了算子 H 的结构特性, 即 H 的主对角元之间的关系和算子 C 的自伴性.

注 13 文 [5–8] 分别对算子矩阵的可逆性和谱问题进行了研究, 得到了很好的结果. 在引理 11 中, 如果 $X = Y$, 则称 H 为下三角型 Hamilton 算子. 对于 Hamilton 算子, 国内外有一些学者进行了研究, 得到了一些有趣的结果 [9–12].

定理 14 算子 F 具有有界逆当且仅当

(a6) $R(F_{11}) = X_2$;

(b6) F_{00} 是满射, 即 $R(F_{00}) = R(F_{11}^*)^{\perp}$,

其中

$$F_{11} = (F_1\ F_2), \quad F_{21} = \begin{pmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4^* & F_5 \end{pmatrix},$$

且 F_{00} 表示 F_{21} 在 $\operatorname{Ker} F_{11}$ 上的限制且映 $\operatorname{Ker} F_{11}$ 于 $R(F_{11}^*)^{\perp}$.

证明 由于

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 & 0 & F_2 \\ F_3 & -F_1^* & F_4 \\ -F_4^* & F_2^* & -F_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & -F_{11}^* \end{pmatrix},$$

据引理 11 知算子 F 具有有界逆当且仅当 (a6) 和 (b6) 成立.

由定理 14 的证明容易得到下面的推论:

推论 15 如果 F_{11} 具有有界逆, 则算子 F 具有有界逆.

下面的定理表明定理 4 和定理 14 在一定条件下是等价的, 这进一步说明了结论的正确性.

定理 16 若算子 $\left(\begin{smallmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4^* & F_5 \end{smallmatrix}\right)$ 非负, 则定理 4 和定理 14 是等价的.

证明 假设 $\left(\begin{smallmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4^* & F_5 \end{smallmatrix}\right)$ 是非负的. 首先证明定理 4 蕴含定理 14.

由 (b2) 知算子 F_{11}^* 是下有界的, 据引理 1 有 $\operatorname{Ker}(F_{11}^*) = \{0\}$ 且 $R(F_{11}^*)$ 是闭的, 故 $R(F_{11})$ 也是闭的且

$$R(F_{11}) = (\operatorname{Ker}(F_{11}^*))^{\perp} = X_2,$$

于是 (a6) 成立. 再由 (a2) 知算子 $\left(\begin{smallmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{smallmatrix}\right)$ 是下有界的, 于是存在常数 $\delta > 0$, 使得对于任意的 $x \in \operatorname{Ker} F_{11}$, 有

$$\left\| \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{pmatrix} x \right\| = \|F_{21}x\| \geq \delta\|x\|,$$

因此 $F_{21}|_{\operatorname{Ker} F_{11}}$ 是单射且 $R(F_{21}|_{\operatorname{Ker} F_{11}})$ 是闭的. 进一步, 由定理 5.8 (见文 [4, 216 页]), 我们得到算子 $F_{21}|_{\operatorname{Ker} F_{11}}$ 具有有界逆. 因此, 算子 F_{00} 具有有界逆, 即 (b6) 成立.

其次证明定理 14 蕴含定理 4. (a6) 表明 $R(F_{11}) = X_2$, 于是 $R(F_{11}^*)$ 闭且 $\operatorname{Ker}(F_{11}^*) = \{0\}$. 由引理 1 知 F_{11}^* 是下有界的, 即 (b2) 成立. 假设 (a2) 不成立, 则存在一个序列

$$\{x_n\} \subseteq \mathscr{D}(F_1) \dotplus X_3, \quad \|x_n\| = 1$$

满足

$$\begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{pmatrix} x_n \to 0, \quad n \to \infty. \tag{9}$$

记 $x_n = x_n^1 + x_n^2$, 其中

$$x_n^1 \in \operatorname{Ker} F_{11}, \quad x_n^2 \in (\operatorname{Ker} F_{11})^{\perp} \cap (\mathscr{D}(F_1) \dotplus X_3).$$

由 (9) 式, 得到

$$\begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} F_{11}x_n^2 \\ F_{21}x_n^1 + F_{21}x_n^2 \end{pmatrix} \to 0,$$

即

$$F_{11}x_n^2 \to 0, \quad F_{21}x_n^1 + F_{21}x_n^2 \to 0. \tag{10}$$

据 (a6) 和定理 5.8 (见文 [4, 216 页]), 我们得到算子 F_{11} 作为从 $(\operatorname{Ker} F_{11})^{\perp} \cap (\mathscr{D}(F_1) \dotplus X_3)$ 到 $R(F_{11})$ 的映射是可逆的. 进一步, 据 (10) 的第一式得 $x_n^2 \to 0$. 再由 F_{21} 的有界性, 从 (10) 的第二式得:

$$F_{21}x_n^1 \to 0,$$

即

$$F_{00}x_n^1 \to 0.$$

结合 (b6) 知算子 F_{00} 具有有界逆, 于是 $x_n^1 \to 0$. 因此 $x_n \to 0$, 这与等式 $\|x_n\| = 1$ 相矛盾.

注 17 定理 16 表明, $\left(\begin{smallmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4^* & F_5 \end{smallmatrix}\right)$ 的非负性对于 F 的可逆性来说是不必要的. 我们之所以给出定理 4, 原因有两点: 一是定理 4 在最优控制理论中有着重要的应用; 二是在定理 4 的证明过程中我们充分地利用了算子 F 的结构特性.

2 例子

在这一部分, 我们举两个例子来说明我们结果的有效性.

例 1 设 $X_1 = X_2 = X_3 = \ell_2$ 为 Hilbert 空间, 对于任意的 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots) \in \ell_2$, 我们定义算子 F_1, F_2, F_3 为

$$\begin{aligned} F_1x &= (x_1, x_2, 0, 0, \ldots), \\ F_2x &= (0, 0, x_3, x_4, \ldots), \\ F_3x &= (0, x_2, -x_3, x_4, x_5, \ldots). \end{aligned}$$

取 $F_5 = F_1$, 显然 F_3, F_5 都是有界自伴算子且

$$F_0 = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & F_2 \\ F_3 & -F_1 & 0 \\ 0 & F_2 & -F_1 \end{pmatrix}.$$

对于任意的 $x \in \ell_2, y \in \ell_2$, 由于

$$\left\| \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & 0 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2 = \|F_1x + F_2y\|^2 + \|F_3x\|^2 + \|F_1y\|^2 \geq \|x\|^2 + \|y\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2,$$

$$\left\| \begin{pmatrix} F_1^* \\ F_2^* \end{pmatrix} x \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} x \right\|^2 = \|F_1x\|^2 + \|F_2x\|^2 = \|x\|^2,$$

故算子

$$\begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & 0 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix} \text{ 且 } \begin{pmatrix} F_1^* \\ F_2^* \end{pmatrix}$$

都是下有界的. 进一步可以得到

$$\operatorname{Ker} F_0 = \{0\} \text{ 且 } R(F_0) = \ell_2 \dot{+} \ell_2 \dot{+} \ell_2,$$

这意味着算子 F_0 是可逆的, 但是这里的 F_3 不是非负的.

例 1 表明文 [3] 中定理 3 的必要性不成立.

例 2 假设 X_1, X_2 和 X_3 都是有限维空间,

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

显然 F 是可逆的, 可是 $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ 不是非负的, 但 F 满足定理 14 的条件, 故由定理 14 也可知它是可逆的.

例 2 中的 F 在文 [1] 中被提及但没有解决, 这里我们利用定理 14 解决了它的可逆性问题.

致谢 作者感谢审稿人提出的宝贵修改意见.

参 考 文 献

[1] Kurina G. A., Roswitha März, On linear-quadratic optimal control problems for time-varying descriptor systems, *SIAM J. Control Optim.*, 2004, **42**(6): 2062–2077.
[2] Kurina G. A., Linear-quadratic discrete optimal control problems for descriptor systems in Hilbert space, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2004, **10(3)**: 365–375.
[3] Kurina G. A., Invertibility of an operator appearing in the control theory for linear systems, *Mathematical Notes*, 2001, **70**(2): 206–212.
[4] Taylor A. E., Lay D. C., Introduction to functional analysis, second edition, New York: Wiley, 1958.
[5] Halmos P. R., Hilbert space problem book, London: Spring-Verlag, 1967.
[6] Han J. K., Lee H. Y., Lee W. Y., Invertible completions of 2 × 2 upper triangular operator matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2000, **128**: 119–123.
[7] Li Y., Sun X. H., Du H. K., The intersection of left (right) Weyl spectrum of 2 × 2 upper triangular operator matrices, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2005, **48**(4): 653–660.
[8] Cao X. H., Weyl theorem for 3 × 3 upper triangular operator matrices, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2006, **49**(3): 529–538.
[9] Kurina G. A., Invertibility of nonnegatively Hamiltonian operators in a Hilbert space, *Differential Equations*, 2001, **37**(6): 880–882.
[10] Tomas Ya. A., Aad Dijksma, Irina V. G., On the boundedness of Hamiltonian operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2002, **131**: 563–576.
[11] Alatancang, Huang J. J., Spectral distribution for a class of infinite dimensional Hamiltonian operators, *Journal of Dalian University of Technology*, 2004, **44**(3): 326–329 (in Chinese).
[12] Huang J. J., Alatancang, Continuous spectrum on upper-triangular-type infinite dimensional Hamiltonian operators, *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 2005, **39**(2): 240–243 (in Chinese).