第50卷第3期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.50, No.3
2007年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series May, 2007

文章编号: 0583-1431(2007)03-0661-08 **文献标识码:** **A**

具有位数3 和4 的双随机循环矩阵中的素元

周积团

厦门大学数学科学学院 厦门 361005
嘉应学院数学系 梅州 514015
E-mail: zjt@jyu.edu.cn

卢琳璋

厦门大学数学科学学院 厦门 361005
E-mail: lzlu@xmu.edu.cn

摘 要 本文研究了双随机循环矩阵中素元的分类问题. 由于任一 n 阶双随机循环矩阵都可以唯一地表示为移位的 $n-1$ 次一元多项式, 从而可把双随机循环矩阵中素元的分类问题简化为解双随机循环矩阵上的一个方程. 应用此原理, 本文完全解决了判别具有位数 3 的 n 阶双随机循环矩阵是否为素元的问题, 并给出了 n 阶双随机循环矩阵中一类具有位数 4 的素元.

关键词 双随机循环矩阵; 移位; 素元

MR(2000) 主题分类 15A48, 15A23, 15A51

中图分类 O211.1, O241.6

Primes in the Doubly Stochastic Circulant Matrices of Order 3 or 4

Ji Tuan ZHOU

School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, *P. R. China*
Department of Mathematics, Jiaying University, Meizhou 514015, *P. R. China*
E-mail: zjt@jyu.edu.cn

Lin Zhang LU

School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, *P. R. China*
E-mail: lzlu@xmu.edu.cn

Abstract The classification of primes in the doubly stochastic circulant matrices is now explored. Since any $n\times n$ doubly stochastic circulant matrix has a unique representation as a polynomial of degree $n-1$ in the shift operator ω_n, the classification problem of primes in the doubly stochastic circulant matrices can be reduced to the solution of an equation over a doubly stochastic circulant matrix. By this means, the problem of deciding whether an $n\times n$ doubly stochastic circulant matrix A of order 3 is a prime is completely solved. A class of primes in the $n\times n$ doubly stochastic circulant matrices of order 4 is also presented.

Keywords doubly stochastic circulant matrix; shift; prime matrix

MR(2000) Subject Classification 15A48, 15A23, 15A51

Chinese Library Classification O211.1, O241.6

收稿日期: 2005-12-30; 接受日期: 2006-09-08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10531080)

1 记号与定义

本文采用如下一些记号 : $N=\{0,1,2,\ldots\}$ 表示自然数集合, $N_n=\{0,1,\ldots,n\}$, $R_+^n=\{x\,|\,x=(x_1,\ldots,x_n)^t,\, x_i\geq 0,\, i=1,2,\ldots,n\}$, $S_+^n=\{x\in R_+^n\,|\,\sum_{i=1}^n x_i=1\}$. 若向量 $a\in R_+^n$ 有 k 个元素是正的, 则称 a 有位数 k, 记为 $n(a)=k$. 向量 $a\in R_+^n$ 的正元素的下标记为 $i(a)=\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$. 循环矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_n & \cdots & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

记为 $\mathrm{circ}(a)$, 其中 $a=(a_1,\ldots,a_n)^t$ 是 A 的第一列. 循环矩阵 $A=\mathrm{circ}(a)$ 的位数定义为 $n(a)$. 若 $a\in S_+^n$, 则 $A=\mathrm{circ}(a)\in DSC_+^{n\times n}, DSC_+^{n\times n}$ 表示 n 阶双随机循环矩阵. 对任意的正整数 n, 定义移位为如下矩阵

$$\omega_n^k=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}^k, \quad k\in N_{n-1}=\{0,1,\ldots,n-1\}$$

下面给出双随机循环矩阵中素元的定义.

定义 1.1 设矩阵 $A\in DSC_+^{n\times n}$, 若有

(1) A 不是一个移位;

(2) 若 $A=BC,\ B,C\in DSC_+^{n\times n}$, 则 B 或 C 是一移位, 那么称 A 是双随机循环矩阵中的素元.

2 主要结果

在控制论与系统论中, 有限值过程的随机实现问题, 隐藏 Markov 模型的实现问题和一个有限随机系统的实现问题等在信号处理中有着重要的作用. 一个正线性系统 (投入、状态和产出都取正值) 是一个动力系统, 这类系统的实现问题在间隔分析和经济学中有重要的应用 [1]. 上述应用的主要问题是刻画这些系统的极小性, 最后把问题归结为正线性代数中的一类问题, 即正矩阵中的素元分类问题 [1]. 文 [2–3] 给出了正矩阵中的素元概念, 也给出了正矩阵中素元的几个例子和几个特殊类. 但进一步研究遇到了困难, 直到文 [4] 才有所突破. 文 [5–6] 研究了布尔矩阵中的素元. 对双随机循环矩阵中素元的分类, 文 [4] 给出了下面一些结果:

(1) 设 $A\in DSC_+^{n\times n}$ 是一个具有位数 n 的双随机循环矩阵, 则 A 不是双随机循环矩阵中的素元.

(2) 设 $A\in DSC_+^{n\times n}(n\geq 3)$ 是一个具有位数 2 的双随机循环矩阵, 则 A 是双随机循环矩阵中的素元.

(3) 设 $A=\mathrm{circ}(a)\in DSC_+^{n\times n}$ 是一个具有位数 $3\leq n(a)\leq 4$, $n(a)<n$ 的双随机循环矩阵, 这里 $a=\omega_n^k\mathrm{circ}(a_1,\ldots,a_{n(a)},0,\ldots,0)^t\in S_+^n$, $k\in N_{n-1}$ (即 a 的正元素相邻), 则

(a) A 是双随机循环矩阵中的素元当且仅当

(i) 当 $n(a)=3$ 时, $a_2^2<4a_1a_3$; (ii) 当 $n(a)=4$, $n\geq 6$ 时, $a_1a_4>a_2a_3$.

(b) 当 $n(a)=4,\ n=5$ 时, A 不是双随机循环矩阵中的素元.

现在我们自然提出这样的问题：若向量 $a\in S_+^n$ 的正元素不是相邻的, 如何判定双随机循环矩阵 $A=\mathrm{circ}(a)$ 是否是素元? 得到了如下结果.

定理 2.1　设向量 $a=\omega_n^l(a_1,a_2,0,\dots,0,a_k,0,\dots,0)^t\in S_+^n,\ n(a)=3,\ l\in N_{n-1},\ n\geq 5$ (因 a 的正元素不相邻, 因此 $n\geq 5$), 则

(1) 若 $k\neq\frac{n+3}{2}$, 则 $A=\mathrm{circ}(a)$ 是双随机循环矩阵中的素元;

(2) 若 $k=\frac{n+3}{2}$ (此时 n 为奇数), 则 $A=\mathrm{circ}(a)$ 是双随机循环矩阵中的素元当且仅当 $a_k^2<4a_1a_2$.

定理 2.2　设向量 $a=\omega_n^k(a_1,0,\dots,0,a_i,0,\dots,0,a_j,0,\dots,0)^t\in S_+^n$, $n(a)=3$, $k\in N_{n-1}$, $n\geq 6$ (因 a 的任两个正元素都不相邻, 因此 $n\geq 6$), 则

(1) 若 $j\neq 2i-1$, $i+j\neq n+2$, $2j-i\neq n+1$, 则 $A=\mathrm{circ}(a)$ 是双随机循环矩阵中的素元.

(2) 若 $j=2i-1$, $i+j=n+2$, $2j-i=n+1$ 三式中有二个成立 (即 $i=\frac{n}{3}+1$, $j=\frac{2n}{3}+1$, $3\mid n$), 则第三式必成立, $A=\mathrm{circ}(a)$ 是双随机循环矩阵中的素元当且仅当 $a_i^2<4a_1a_j$, $a_1^2<4a_ia_j$, $a_j^2<4a_1a_i$.

(3) 若 $j=2i-1$, $i+j\neq n+2$, $2j-i\neq n+1$, 则 $A=\mathrm{circ}(a)$ 是双随机循环矩阵中的素元当且仅当 $a_i^2<4a_1a_j$.

(4) 若 $i+j=n+2$, $j\neq 2i-1$, $2j-i\neq n+1$, 则 $A=\mathrm{circ}(a)$ 是双随机循环矩阵中的素元当且仅当 $a_1^2<4a_ia_j$.

(5) 若 $2j-i=n+1$, $i+j\neq n+2$, $j\neq 2i-1$, 则 $A=\mathrm{circ}(a)$ 是双随机循环矩阵中的素元当且仅当 $a_j^2<4a_1a_i$.

文 [4] 举了一个例: $A=\mathrm{circ}(a)\in DSC_+^{9\times 9}$, 其中 $a=(a_1,0,a_3,0,0,a_6,0,0,0)^t\in S_+^9, n(a)=3$, 是双随机循环矩阵中的素元 (无论 a_1,a_3,a_6 取何非 0 正数). 现在由定理 2.2 即可判定这个例子是正确的.

设向量 $a\in S_+^n, n(a)=3$, 且 a 的正元素不相邻, 则 a 只有定理 2.1 和 2.2 中的两种情形, 因此由文 [4] 中的相应结果和定理 2.1 和 2.2, 我们已完全解决了判别具有位数 3 的 n 阶双随机循环矩阵是否是素元的问题. 若向量 $a\in S_+^n$, $n(a)=4$, 且 a 的正元素不相邻, 则有如下 4 种情形:

(1) $a=\omega_n^k(a_1,a_2,a_3,0,\dots,0,a_i,0,\dots,0)$, $k\in N_{n-1}$, $n\geq 6$;

(2) $a=\omega_n^k(a_1,a_2,0,\dots,0,a_i,a_{i+1},0,\dots,0)$, $k\in N_{n-1}$, $n\geq 6$;

(3) $a=\omega_n^k(a_1,a_2,0,\dots,0,a_i,0,\dots,0,a_j,0,\dots,0)$, $k\in N_{n-1}$, $n\geq 7$;

(4) $a=\omega_n^l(a_1,0,\dots,0,a_i,0,\dots,0,a_j,0,\dots,0,a_k,0,\dots,0)$, $l\in N_{n-1}$, $n\geq 8$.

设 $A=\mathrm{circ}(a)\in DSC_+^{n\times n}, a\in S_+^n, n(a)=4$, 且 a 的正元素不相邻, 若向量 a 有如上第 2 至第 4 种的形式, 那么难以判定 A 是否是素元. 若向量 a 有如上第 1 种的形式, 得到如下结果:

定理 2.3　设向量 $a=\omega_n^k(a_1,a_2,a_3,0,\dots,0,a_i,0,\dots,0)^t\in S_+^n, n(a)=4, k\in N_{n-1}, n\geq 6$, 则 $A=\mathrm{circ}(a)$ 是双随机循环矩阵中的素元.

3　主要结果的证明

引理 3.1 (文 [4, 引理 B.6])　设 $A\in DSC_+^{n\times n}, A=\sum_{i=1}^n a_i\omega_n^{i-1}$, $a=(a_1,\dots,a_n)^t\in S_+^n$, $n(a)\geq 2$, 则以下两款等价:

(1) 矩阵 A 是双随机循环矩阵中的素元;

(2) 不存在向量 $b, c \in S_+^n, n(b),\ n(c) \geq 2$, 使 $a = \mathrm{circ}(b)c$ 成立.

引理 3.2 (文 [4, 引理 B.8.]) 设向量 $a \in S_+^n, n(a) \geq 2$. 若存在向量 $b, c \in S_+^n, n(b), n(c) \geq 2$, 使 $a = \mathrm{circ}(b)c$ 成立, 则 $i(a) = \bigcup_{j=1, c_j>0}^n i(\omega_n^{j-1} b)$.

下面证明定理 2.1, 先证如下引理.

引理 3.3 设向量 $a = \omega_n^l (a_1, a_2, 0, \ldots, 0, a_k, 0, \ldots, 0)^t \in S_+^n$, $n(a) = 3, l \in N_{n-1}$, $n \geq 5$, 则

(1) 若 $k = \frac{n+3}{2}$, 则存在向量 $b, c \in S_+^n, n(b), n(c) \geq 2$, 使 $a = \mathrm{circ}(b)c$ 成立当且仅当 $a_k^2 \geq 4a_1a_2$.

(2) 若 $k \neq \frac{n+3}{2}$, 则不存在向量 $b, c \in S_+^n, n(b), n(c) \geq 2$, 使 $a = \mathrm{circ}(b)c$ 成立.

证明 设存在向量 $b, c \in S_+^n, n(b), n(c) \geq 2$, 使 $a = \mathrm{circ}(b)c$ 成立. 由引理 3.2 及 $a = \mathrm{circ}(b)c$ 关于 b 与 c 的对称性, 仅需考虑 $(n(b), (c))$ 的如下值: $(2, 2)$. 不失一般性, 假设 $c_1 > 0$.由引理 3.2, 则 $i(b) \subset i(a) = \{1, 2, k\}$, 从而 $i(b)$ 的可能选择有: $\{1, 2\}, \{1, k\}, \{2, k\}$.

情况 I 若 $i(b) = \{1, 2\}$, 则

$$\mathrm{circ}(b) = \begin{pmatrix} b_1 & & & & b_2 \\ b_2 & b_1 & & & \\ & b_2 & b_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & b_2 & b_1 \end{pmatrix}$$

易知不存在向量 c, 使 $a = \mathrm{circ}(b)c$ 成立.

情况 II 若 $i(b) = \{1, k\}$, 则可能的

$$\mathrm{circ}(b) = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & & b_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_1 & \cdots & & 0 & b_k & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & & & & & \\ 0 & & & & b_1 & & & b_k \\ b_k & 0 & & & & b_1 & \cdots & 0 \\ 0 & b_k & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & b_k & 0 & 0 & \cdots & b_1 \end{pmatrix}$$

向量 c 的非零坐标的可能位置是: $i(c) = \{1, k\}$, 且 $k = (n-k)+3$, 即 $k = \frac{n+3}{2}$. 则 $a = \mathrm{circ}(b)c$, 等价于 $a_1 = b_1c_1, a_2 = b_kc_k, a_k = b_kc_1 + b_1c_k$, 等价于 $a_1 = b_1c_1, a_2 = b_kc_k = (1-b_1)(1-c_1)$ (因由它们可得 $b_kc_1 + b_1c_k = (1-b_1)c_1 + b_1(1-c_1) = 1 - b_1c_1 - (1-b_1)(1-c_1) = 1 - a_1 - a_2 = a_k$), 等价于

$$b_1c_1 = a_1, b_1 + c_1 = 1 + a_1 - a_2. \tag{1.1}$$

考虑方程

$$z^2 - (1 + a_1 - a_2)z + a_1 = 0 \tag{1.2}$$

$\triangle = (1 + a_1 - a_2)^2 - 4a_1 = (2a_1 + a_k)^2 - 4a_1 = 4a_1^2 + 4a_1a_k + a_k^2 - 4a_1 = a_k^2 + 4a_1(a_1 + a_k - 1) = a_k^2 - 4a_1a_2$, 因此, 若存在向量 $b, c \in S_+^n$, $n(b), n(c) \geq 2$, 使 $a = \mathrm{circ}(b)c$ 成立, 则 $a_k^2 \geq 4a_1a_2$. 反之, 设 $a_k^2 \geq 4a_1a_2$, 则 $\Delta \geq 0$, 方程 (1.2) 仅有实根, 即存在实数 b_1, c_1 使 (1.1) 成立. 因 $b_1c_1 = a_1 > 0$, $b_1 + c_1 = 1 + a_1 - a_2 = 2a_1 + a_k > 0$, 则 $b_1, c_1 > 0$. 又因 $b_1c_1 = a_1 < 1$, 则可不妨设 $b_1 < 1$, $1 - c_1 = \frac{a_2}{1-b_1} > 0$, $c_1 < 1$. 即存在向量 $b, c \in S_+^n$, $n(b), n(c) \geq 2$, 使 $a = \mathrm{circ}(b)c$成立.

情况 III　若 $i(b)=\{2,k\}$, 则可能的

$$\operatorname{circ}(b)=\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & & b_k & \cdots & & b_2\\
b_2 & 0 & & & 0 & \ddots & & \vdots\\
0 & b_2 & & & \vdots & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & \\
0 & & & & & & & b_k\\
b_k & & & & b_2 & \cdots & & 0\\
0 & b_k & & & \vdots & \ddots & & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & b_k & 0 & \cdots & b_2 & 0
\end{pmatrix}$$

向量 c 的非零坐标的可能位置是: $i(c)=\{1,k-1\}$, 且 $k-1=(n-k)+2$, 即 $k=\frac{n+3}{2}$. 写出 $a=\operatorname{circ}(b)c$, 得 $a_1=b_kc_{k-1}$, $a_2=b_2c_1$, $a_k=b_kc_1+b_2c_{k-1}$, 同情况 II 一样可以证明 : 存在向量 $b,c\in S_+^n$, $n(b),n(c)\geq 2$, 使 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 成立, 当且仅当 $a_k^2\geq 4a_1a_2$.

定理 2.1 的证明　由引理 3.1 和引理 3.3 立即可得.

下面证明定理 2.2, 先证如下引理.

引理 3.4　设向量 $a=\omega_n^k(a_1,0,\dots,0,a_i,0,\dots,0,a_j,0,\dots,0)^t\in S_+^n$, $n(a)=3$, $k\in N_{n-1}$, $n\geq 6$, 则

(1) 若 $j=2i-1$, $i+j=n+2$, $2j-i=n+1$ 三式中有二个成立 (即 $i=\frac{n}{3}+1$, $j=\frac{2n}{3}+1$, $3\mid n$), 则第三式必成立, 存在向量 $b,c\in S_+^n$, $n(b),n(c)\geq 2$, 使 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 成立, 当且仅当 $a_1^2\geq 4a_ia_j$, 或 $a_i^2\geq 4a_1a_j$, 或 $a_j^2\geq 4a_1a_i$.

(2) 若 $j=2i-1$, $i+j\neq n+2$, $2j-i\neq n+1$, 则存在向量 $b,c\in S_+^n$, $n(b),n(c)\geq 2$, 使 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 成立, 当且仅当 $a_i^2\geq 4a_1a_j$.

(3) 若 $i+j=n+2$, $j\neq 2i-1$, $2j-i\neq n+1$, 则存在向量 $b,c\in S_+^n$, $n(b),n(c)\geq 2$, 使 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 成立, 当且仅当 $a_1^2\geq 4a_ia_j$.

(4) 若 $2j-i=n+1$, $i+j\neq n+2$, $j\neq 2i-1$, 则存在向量 $b,c\in S_+^n$, $n(b),n(c)\geq 2$, 使 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 成立, 当且仅当 $a_j^2\geq 4a_1a_i$.

证明　设存在向量 $b,c\in S_+^n, n(b)$, $n(c)\geq 2$, 使 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 成立. 由引理 3.2 及 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 关于 b 与 c 的对称性, 仅需考虑 $(n(b),n(c))$ 的如下值:(2, 2). 不失一般性, 假设 $c_1>0$. 由引理 3.2, 则 $i(b)\subset i(a)=\{1,i,j\}$, 从而 $i(b)$ 的可能选择有: $\{1,i\},\{1,j\},\{i,j\}$.

情况 I　若 $i(b)=\{1,i\}$, 则

(1) 若 $j=i+(i-1)$, 即 $j=2i-1$, 则

$$\operatorname{circ}(b)=\begin{pmatrix}
b_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots\\
0 & b_1 & \cdots & \vdots & \cdots\\
\vdots & & \ddots & & \\
0 & & & & \\
b_i & \cdots & & b_1 & \cdots\\
0 & b_i & & \vdots & \\
\vdots & & \ddots & & \\
0 & & & & \\
0 & \cdots & & b_i & \cdots\\
0 & \cdots & & 0 & \cdots\\
\vdots & & & \vdots & \\
0 & \cdots & & 0 & \cdots
\end{pmatrix}$$

令 $i(c)=\{1,i\}$, $a=\operatorname{circ}(b)c$ 等价于

$$a_1=b_1c_1,\quad a_i=b_ic_1+b_1c_i,\quad a_j=b_ic_i.$$

同引理 3.3 情况 II 的证明一样可证: 存在向量 $b,c\in S_+^n$, $n(b),n(c)\geq 2$, 使 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 成立, 当且仅当 $a_i^2\geq 4a_1a_j$.

(2) 若 $j=(n-i)+2$, 即 $i+j=n+2$, 则

$$\operatorname{circ}(b)=\left(\begin{array}{cccccccc}
b_1 & \cdots & & & & b_i & \cdots & 0\\
0 & \ddots & & & & \vdots & & \vdots\\
\vdots & & & & & & & \\
0 & \cdots & & & & 0 & \cdots & b_i\\
b_i & \cdots & & & & 0 & \cdots & 0\\
0 & & & & & \vdots & & \vdots\\
\vdots & & \ddots & & & & & \\
0 & & & \ddots & & & & \\
0 & \cdots & & & & b_1 & \cdots & 0\\
0 & & & & & \vdots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & & & & & \\
0 & \cdots & & & b_i & 0 & \cdots & b_1
\end{array}\right)$$

令 $i(c)=\{1,j\}$, $a=\operatorname{circ}(b)c$ 等价于

$$a_1=b_1c_1+b_ic_j,\quad a_i=b_ic_1,\quad a_j=b_ic_j.$$

同引理 3.3 情况 II 的证明一样可证: 存在向量 $b,c\in S_+^n$, $n(b),n(c)\geq 2$, 使 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 成立, 当且仅当 $a_1^2\geq 4a_ia_j$.

情况 II 若 $i(b)=\{1,j\}$, 则 (1) 若 $i=(n-j)+2$, 即 $i+j=n+2$, 则

$$\operatorname{circ}(b)=\left(\begin{array}{ccccc}
b_1 & \cdots & & b_j & \cdots\\
0 & \ddots & & \vdots & \cdots\\
\vdots & & & & \\
0 & & & & \\
0 & \cdots & & b_1 & \cdots\\
0 & & & \vdots & \\
\vdots & & & & \\
0 & & & & \\
b_j & \cdots & & & \\
0 & \ddots & & 0 & \cdots\\
\vdots & & & \vdots & \\
0 & \cdots & b_j & 0 & \cdots
\end{array}\right)$$

取 $i(c)=\{1,i\}$, $a=\operatorname{circ}(b)c$ 等价于

$$a_1=b_1c_1+b_jc_i,\quad a_i=b_1c_i,\quad a_j=b_ic_1.$$

同引理 3.3 情况 II 的证明一样可证: 存在向量 $b,c\in S_+^n$, $n(b)$, $n(c)\geq 2$, 使 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 成立, 当且仅当 $a_1^2\geq 4a_ia_j$.

(2) 若 $j=(n-j+1)+i$, 即 $2j-i=n+1$, 则

$$\operatorname{circ}(b)=\begin{pmatrix}
b_1 & \cdots & & 0 & b_j & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
0 & \ddots & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots\\
\vdots & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & & \\
0 & \cdots & \cdots & & & & b_j & & \\
0 & & & & & & \vdots & & \\
\vdots & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & & b_j\\
b_j & \cdots & \cdots & & & & b_1 & \cdots & 0\\
0 & \ddots & & & & & \vdots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & & & & & & \\
0 & \cdots & & b_j & & \cdots & 0 & \cdots & b_1
\end{pmatrix}$$

取 $i(c)=\{1,j\}$, $a=\operatorname{circ}(b)c$ 等价于

$$a_1=b_1c_1,\quad a_i=b_jc_j,\quad a_j=b_jc_1+b_1c_j.$$

同引理 3.3 情况 II 的证明一样可证: 存在向量 $b,c\in S_+^n$, $n(b),n(c)\geq 2$, 使 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 成立, 当且仅当 $a_j^2\geq 4a_1a_i$.

情况 III 若 $i(b)=\{i,j\}$, 则

(1) 若 $n-j+2=j-i+1$, 即 $2j-i=n+1$, 则

$$\operatorname{circ}(b)=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & & & b_j & \cdots\\
0 & & & & \vdots & \\
\vdots & & & & & \\
0 & & & & & \\
b_i & \cdots & & & 0 & \cdots\\
0 & \ddots & & & \vdots & \\
\vdots & & \ddots & & & \\
0 & & & & & \\
b_j & \cdots & & & b_i & \cdots\\
0 & \ddots & & & \vdots & \\
\vdots & & & & & \\
0 & \cdots & & b_j & 0 & \cdots
\end{pmatrix}$$

取 $i(c)=\{1,n-j+2\}$, $a=\operatorname{circ}(b)c$ 等价于

$$a_1=b_jc_{n-j+2},\quad a_i=b_ic_1,\quad a_j=b_jc_1+b_ic_{n-j+2}.$$

同引理 3.3 情况 II 的证明一样可证: 存在向量 $b,c\in S_+^n$, $n(b),n(c)\geq 2$, 使 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 成立, 当且仅当 $a_j^2\geq 4a_1a_i$.

(2) 若 $n-i+2=(n-j+1)+i$, 即 $j=2i-1$, 则

$$\operatorname{circ}(b)=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & & & b_j & \cdots & & b_i & \cdots & 0\\
0 & & & & \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & & \vdots & & & & & \\
0 & & & & & & & & & b_i\\
b_i & \cdots & \cdots & & & & & b_j & \cdots & 0\\
0 & \ddots & & & & & & \vdots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & \ddots & & & & & & & \\
0 & & & & & & & & & b_j\\
b_j & \cdots & & & & & & & & 0\\
0 & \ddots & & & & & & & & \vdots\\
\vdots & & & & & & & & & \\
0 & \cdots & & b_j & 0 & \cdots & b_i & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

取 $i(c)=\{1,n-i+2\}$, $a=\operatorname{circ}(b)c$ 等价于

$$a_1=b_ic_{n-i+2},\quad a_i=b_ic_1+b_jc_{n-i+2},\quad a_j=b_jc_1.$$

同引理 3.3 情况 II 的证明一样可证: 存在向量 $b,c\in S_+^n$, $n(b)$, $n(c)\geq 2$, 使 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 成立, 当且仅当 $a_i^2\geq 4a_1a_j$.

定理 2.2 的证明 由引理 3.1 和引理 3.4 立即可得.

定理 2.3 的证明 设存在向量 $b,c\in S_+^n$, $n(b),n(c)\geq 2$, 使 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 成立. 由引理 3.2 及 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 关于 b 与 c 的对称性, 数对 $(n(b),n(c))$ 的可能值是 $(3,2)$ 和 $(2,2)$. 不失一般性, 假设 $c_1>0$. 由引理 3.2, 则 $i(b)\subset i(a)=\{1,2,3,i\}$.

情况 I 若 $(n(b),n(c))=(3,2)$, 则 $i(b)$ 的可能选择有 $\{1,2,3\},\{1,2,i\},\{1,3,i\},\{2,3,i\}$. 写出 $\operatorname{circ}(b)$, 易知不存在向量 $b,c\in S_+^n, n(b)$, $n(c)\geq 2$, 使 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 成立.

情况 II 若 $(n(b),n(c))=(2,2)$, 则 $i(b)$ 的可能选择有 $\{1,2\},\{1,3\},\{1,i\},\{2,3\},\{2,i\},\{3,i\}$. 写出 $\operatorname{circ}(b)$, 也易知不存在向量 $b,c\in S_+^n$, $n(b)$, $n(c)\geq 2$, 使 $a=\operatorname{circ}(b)c$ 成立.

由引理 3.1 知, $A=\operatorname{circ}(a)$ 是双随机循环矩阵中的素元.

参 考 文 献

[1] Picci G., Van Schuppen J. H., Stochastic realization of finite-valued processes and primes in the positive matrices, in: Kimura H., Kodama S. (Eds.), Recent advances in mathematical theory of systems, control, networks, and signal processing II, Proceedings of the international Symposium MTNS-91, Tokyo: Mita Press, 1992, 227–232.

[2] Richman D. J., Schneider H., Primes in the semigroup of nonnegative matrices, *Linear and Multi Linear Algebra*, 1974, **2**: 135–140.

[3] Berman A., Plemmons R. J., Nonnegative matrices in mathematical sciences, New York: Academic Press, 1979.

[4] Picci G., Van den Hof J. M., Van Schuppen J. H., Primes in several classes of the positive matrices, *Linear Algebra and Its Appl.*, 1998, **277**: 149–185.

[5] De Caen D., Gregory D. A., Primes in the semigroup of Boolean matrices, *Linear Algebra and Its Appl.*, 1981, **37**: 119–134.

[6] Cho H. H., Prime Boolean matrices and factorizations, *Linear Algebra and Its Appl.*, 1993, **190**: 87–98.

[7] Davis P. J., Circulant matrices, New York: Wiley, 1979.

[8] Zhang M. C., Li W., Theory of nonnegative matrices, Guangzhou: Guangdong Higher Education Press, 1995 (in Chinese).