第50卷第3期 数学学报中文版 Vol.50, No.3
2007年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series May, 2007

文章编号: 0583-1431(2007)03-0693-08 **文献标识码:** A

三分 Sierpinski 垫上的 Cauchy 变换所涉及的辅助函数的一些性质

王松然 董新汉

湖南师范大学数学与计算机科学学院 长沙 410081
E-mail: srwang168@163.com; xhdong@hunnu.edu.cn

摘 要 三分 Sierpinski 垫上的 $\alpha(=1+\frac{\log 2}{\log 3})$ 维 Hausdorff 测度的 Cauchy 变换 $F(z)$ 和二分的情形一样, 表现出一些不平常的几何性质. 本文考虑联系到 $F(z)$ 的几个辅助函数, 利用 Laplace 变换和 Dong X. H. 和 Lau K. S. (2003) 中的结果, 得到了它们的一些重要性质. 这些性质对研究 $F(z)$ 的几何性质和渐近性质起关键作用.

关键词 三分 Sierpinski 垫; Hausdorff 测度; Cauchy 变换
MR(2000) 主题分类 28A80, 30C55, 30E20
中图分类 O174.56

Some Properties of Auxiliary Functions Related to the Cauchy Transform on the 3-level Sierpinski Gasket

Song Ran WANG Xin Han DONG

School of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410081, P. R. China
E-mail: srwang168@163.com; xhdong@hunnu.edu.cn

Abstract The Cauchy transform $F(z)$ of α-Hausdorff measure restricted on 3-level Sierpinski gasket with $\alpha=1+\frac{\log 2}{\log 3}$, similarly to the case on Sierpinski gasket, presents some unusual geometric behavior. In this paper, we consider some auxiliary functions related to $F(z)$ and get some their of important properties by making use of Laplace transform and the results in Dong X. H. and Lau K. S. (2003). These properties play a key role in the study of the geometric and asymptotic behavior of $F(z)$.

Keywords 3-level Sierpinski gasket; Hausdorff measure; Cauchy transform
MR(2000) Subject Classification 28A80, 30C55, 30E20
Chinese Library Classification O174.56

1 引言及命题

分形几何是数学领域的一个崭新分支, 非线性科学三大理论前沿之一 [1]. 它是由 Mandelbrot 在 1975 年提出的, 随即便引起了学者们的广泛关注与研究. 至今分形几何已渗透到了自然科学与社会科学的各个领域, 并得到了广泛的应用. 分形集上的调和分析早在十多年前就开始兴起,

收稿日期: 2005-09-29; 接受日期: 2006-09-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10571049); 湖南省自然科学基金资助项目 (05JJ30011)

并业已取得丰硕成果 [2–6], 而分形集上的复分析在 1998 年才由美国康乃尔大学的著名数学家 Strichartz 等人开始探讨 [7]. 他们主要是通过计算机模拟发现了 Sierpinski 垫上的 Cauchy 变换的一些怪现象, 提出了几个猜想 (见文 [7]). 最近几年, Dong 与 Lau 对分形集上的复分析进行了系统的研究并取得了一些有趣的结果 (见文 [8–9]). 最近, 我们考察了三分 Sierpinski 垫 (如图 1)

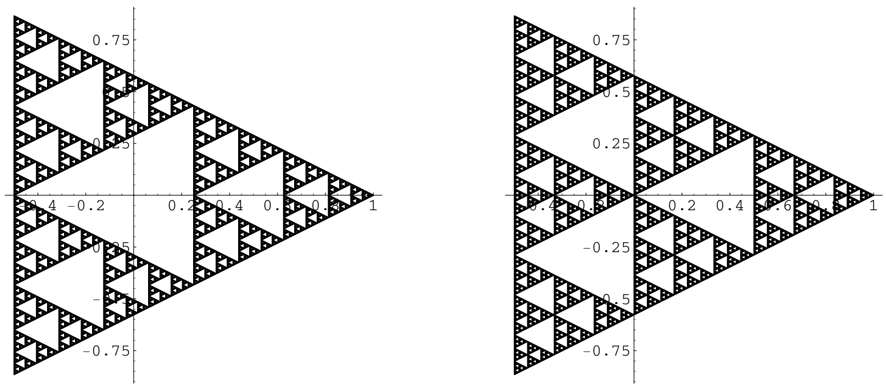

图 1 Sierpinski 垫与三分 Sierpinski 垫

上的 $\alpha(=1+\frac{\log 2}{\log 3})$ 维 Hausdorff 测度的 Cauchy 变换 F, 发现和二分的情形一样, 表现出许多奇怪的几何性质. 本文就是为讨论这样的变换 F 作准备, 考虑有关辅助函数的某些性质. 借助于 Laplace 变换和文 [9] 中的结果, 得到了这些辅助函数的一些重要性质, 这些性质对研究 F 起关键作用. 我们研究的主要思想来自于文 [8–10].

令 K 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的三分 Sierpinski 垫, 三个顶点分别为 1, $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$, $\mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}/3}$. K 是迭代函数系 $\{S_k\}_{k=0}^5$ 的吸引子, 其中

$$S_k z=\varepsilon_k+(z-\varepsilon_k)/3, \quad \varepsilon_k=\left(\frac{3}{4}+\frac{(-1)^k}{4}\right)\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/6}, \quad k=0,1,\ldots,5.$$

由文 [11, 定理 9.3] 可知 K 的 Hausdorff 维数为 $\alpha=1+\frac{\log 2}{\log 3}\approx 1.6309$. 假设 $\mathscr{H}^\alpha$ 是 K 上正规化的 α 维 Hausdorff 测度, 即满足 $\mathscr{H}^\alpha(K)=1$. 定义 K 上 $\mathscr{H}^\alpha$ 的 Cauchy 变换 $F(z)=\int_K\frac{d\mathscr{H}^\alpha(\omega)}{z-\omega}$. 设 $T=1-K$, $T_j=1-K_j$, 其中 $K_j=S_jK$, $j=0,1,\ldots,5$, 则 T 的顶点为 $0,\sqrt{3}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/6},\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/6}$. 令 $A_0=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\left(3^n\bigcup_{i=1}^5 T_i\right)$. 它是由 T 生成的三分 Sierpinski 角 (如图 2). 易知 $T=\{z: z\in A_0$ 且 $\operatorname{Re} z\le 3/2\}$.

我们把测度 $\mathscr{H}^\alpha$ 扩展到 $\mathbb{C}$ 上, 然后用 μ 表示扩展后的测度, 则易知 μ 是 α 维 Hausdorff 测度的一常数倍, 并且有 $\mu|K=\mathscr{H}^\alpha$ 与 $\mu(T)=1$. 由文 [11] 中 Hausdorff 测度的基本性质知 μ 具有旋转不变性和性质 $\mu(3^nE)=3^{\alpha n}\mu(E)$, $n\in\mathbb{Z}$. 为了研究 F 的渐近性质, 需要辅助函数 $H_k^\alpha(z)=\int_{A_k}\frac{d\mu(\omega)}{(z-\omega)^2}$, $0\le k\le 5$, 其中 $A_k=\mathrm{e}^{k\pi\mathrm{i}/3}A_0$.

本文主要研究了 $H_k^\alpha(z)$ 的一些性质, 得到了如下定理:

定理 1.1 (i) $H_0^\alpha(z)$ 在 $\pi/6<\arg z<11\pi/6$ 上解析, 并且有

$$H_0^\alpha(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}3^{(\alpha-2)n}\int_{\bigcup_{i=1}^5 T_i}\frac{d\mu(\omega)}{(3^{-n}z-\omega)^2}.$$

(ii) 设 $D_k=\{z:\pi/6+k\pi/3<\arg z<11\pi/6+k\pi/3\}$, 则有 $H_k^\alpha(z)=\mathrm{e}^{-2k\pi\mathrm{i}/3}H_0^\alpha(\mathrm{e}^{-k\pi\mathrm{i}/3}z)$ 和 $H_k^\alpha(3z)=3^{\alpha-2}H_k^\alpha(z)$, $z\in D_k$, $0\le k\le 5$.

为了研究 F 在 K 附近的分析性质和几何性质, 需要辅助函数

$$H_{1,5}^{\alpha}(z)=H_1^{\alpha}(z)+H_5^{\alpha}(z)=\int_{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3}A_0\cup\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/3}A_0}\frac{d\mu(\omega)}{(z-\omega)^2}$$

在负实轴上的保号性, 其中积分区域如图 3.

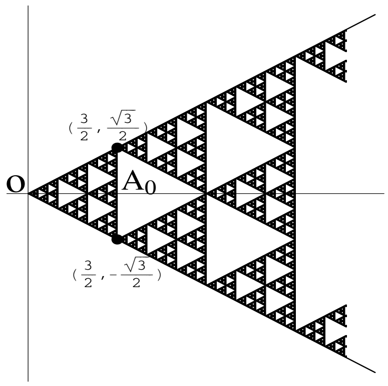

图 2 三分 Sierpinski 角 A_0

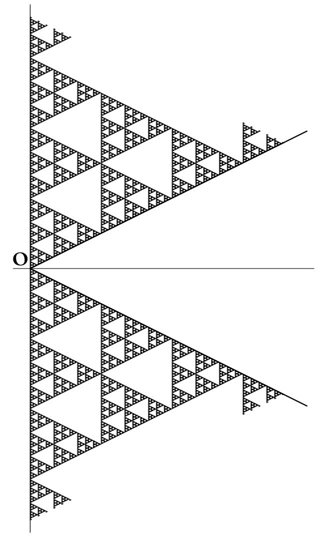

图 3 $H_{1,5}^{\alpha}$ 的积分区域 $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3}A_0\cup\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/3}A_0$

定理 1.2 当 $x<0$ 时, $H_{1,5}^{\alpha}(x)$ 连续且 $H_{1,5}^{\alpha}(x)<0$.

令 $T_3^+=\{\omega:\omega\in T_3$ 且 $\operatorname{Im}\omega\geq 0\}$, 得到了函数 $H_k^{\alpha}(z)$ 的一个有趣的性质.

定理 1.3 若取 $z^{1-\alpha}$ 为主值分支, 即当 $z\in\mathbb{R}^+$ 时, $z^{1-\alpha}$ 取正实数, 则对 $\forall z_0\in D_k$, 有 $\int_{z_0}^{3z_0}z^{1-\alpha}H_k^{\alpha}(z)dz=C\mathrm{e}^{-\frac{\alpha k\pi\mathrm{i}}{3}+\alpha\pi\mathrm{i}}$, 其中积分路径是落在 D_k 中的连接 z_0 与 $3z_0$ 的光滑曲线,

$$C=\frac{2\pi(1-\alpha)}{\sin(\alpha\pi)}\int_{T_3^+\cup T_4\cup T_5}\frac{\cos(\alpha\arg\omega)}{|\omega|^{\alpha}}d\mu(\omega)\in(1.29085,1.29175).$$

关于 C 的估计, 在证明 $F(z)$ 在 $|z|<1$ 内的单叶性时要用到.

2 预备知识

令 $\Psi(t)=\int_{A_0}\mathrm{e}^{-t\omega}d\mu(\omega)$, $t>0$ 是 μ 在 A_0 上的 Laplace 变换. 由 $\mu(3E)=6\mu(E)$ 及 A_0 的表达式易知

$$\Psi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{6^n}\int_{\bigcup_{i=1}^{5}T_i}\mathrm{e}^{-t3^{-n}\omega}d\mu(\omega),\quad t>0. \tag{1}$$

设 $\Phi_0(t)$ 由文 [9, (3.5) 式] 定义. 取文 [9] 中 (3.5) 式的 $j=0$, K 是三分 Sierpinski 垫 K, 通过一变量替换得到 $\Phi_0(t)=t^{\alpha}\Psi(t)$. 由文 [9] 中的推论 3.5 和命题 3.4, 可以得到

$$\Psi(t)=\prod_{k=1}^{\infty}q(3^kt)\prod_{k=0}^{\infty}\frac{q(3^{-k}t)}{6}, \tag{2}$$

其中

$$q(t)=1+2\mathrm{e}^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{6}\right)+2\mathrm{e}^{-t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right)+\mathrm{e}^{-t}. \tag{3}$$

再由文 [9] 中的引理 3.3 可知, $\Phi_0(t)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上连续且 $\Phi_0(3t)=\Phi_0(t)$, 从而易知 $\Phi_0(t)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上有界. 记

$$M=\max_{1/3\le t\le 1}\Phi_0(t)=\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\Phi_0(t),\quad m=\min_{1/3\le t\le 1}\Phi_0(t)=\inf_{t\in\mathbb{R}^+}\Phi_0(t). \tag{4}$$

引理 2.1 设 $C=2(2\pi/\sqrt{3})^{2-\alpha}$, 则当 $x<0$ 时, 有

$$(-x)^{2-\alpha}H^{\alpha}_{1,5}(x)=-C\int_0^{+\infty}\Phi_0\Big(-\frac{2\pi t}{\sqrt{3}x}\Big)t^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-\pi t/\sqrt{3}}\sin\Big(\frac{\pi}{6}-\pi t\Big)dt:=-C\psi(x).$$

证明 固定 $x<0$, 由 μ 的旋转不变性和 A_0 关于实轴的对称性, 可知

$$H^{\alpha}_{1,5}(x)=2\mathrm{Re}\int_{A_0}\frac{d\mu(\omega)}{(x-\omega\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3})^2}=2\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}\int_{A_0}\frac{d\mu(\omega)}{(\omega-x\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/3})^2}\Big). \tag{5}$$

利用分部积分法, 有

$$\begin{aligned}&\int_{A_0}\Big(\int_0^{+\infty}|t\mathrm{e}^{-t(\omega-xe^{-\pi\mathrm{i}/3})}|dt\Big)d\mu(\omega)\\ &\quad=\int_{A_0}\Big(\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{t(x/2-\mathrm{Re}\,\omega)}dt\Big)d\mu(\omega)=\int_{A_0}\Big(\frac{1}{x/2-\mathrm{Re}\,\omega}\int_0^{+\infty}td\mathrm{e}^{t(x/2-\mathrm{Re}\omega)}\Big)d\mu(\omega)\\ &\quad=\int_{A_0}\frac{1}{(\mathrm{Re}\,\omega-x/2)^2}d\mu(\omega)<+\infty.\end{aligned}$$

因此由 Fubini 定理, 可得

$$\int_0^{+\infty}\Psi(t)t\mathrm{e}^{txe^{-\pi\mathrm{i}/3}}dt=\int_{A_0}\Big(\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{t(xe^{-\pi\mathrm{i}/3}-\omega)}dt\Big)d\mu(\omega)=\int_{A_0}\frac{d\mu(\omega)}{(\omega-x\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/3})^2},$$

从而由 (5) 式, 可知

$$\begin{aligned}H^{\alpha}_{1,5}(x)&=-2\mathrm{Re}\int_0^{+\infty}\Psi(t)t\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3+txe^{-\pi\mathrm{i}/3}}dt=-2\int_0^{+\infty}\Psi(t)t\mathrm{e}^{tx/2}\cos\Big(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}tx}{2}\Big)dt\\ &=-C(-x)^{\alpha-2}\int_0^{+\infty}\Phi_0\Big(-\frac{2\pi t}{\sqrt{3}x}\Big)t^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-\pi t/\sqrt{3}}\sin\Big(\frac{\pi}{6}-\pi t\Big)dt,\end{aligned}$$

其中 $C=2(2\pi/\sqrt{3})^{2-\alpha}$. 引理得证.

引理 2.2 设 m 与 M 由 (4) 式定义, 则 $0.4858<m<M<0.4890$.

证明 设 $q(t)$ 由 (3) 式定义, 令

$$f(t)=t^{\alpha}\prod_{k=1}^{3}q(3^kt)\prod_{k=0}^{4}\frac{q(3^{-k}t)}{6}. \tag{6}$$

$f(t)$ 是一初等函数, 它在区间 [1/3,1] 上的函数图像如图 4 (见第 3 节). 利用 Matlab 的 "fminbnd" 命令可以得到函数 $f(t)$ 在区间 [1/3,1] 上的取值范围为

$$0.4880<f(t)<0.4905. \tag{7}$$

首先估计 $\prod_{k=4}^{\infty}q(3^kt)$. 由 (3) 式易知 $1-3\mathrm{e}^{-t/2}\le q(t)\le 1+5\mathrm{e}^{-t/2}$, 因此 $1-3\mathrm{e}^{-3^k/6}\le q(3^kt)\le 1+5\mathrm{e}^{-3^k/6}$, $1/3\le t\le 1$. 令 $g(x)=\log(1-3\mathrm{e}^{-x/6})+d_1x^{-5}$, $d_1>0$. 当 $x\ge 81$ 时, 有

$$g'(x)=\frac{1}{2(\mathrm{e}^{x/6}-3)}\Big(1-\frac{10d_1(\mathrm{e}^{x/6}-3)}{x^6}\Big)\le\frac{1}{2(\mathrm{e}^{x/6}-3)}\Big(1-\frac{10d_1(\mathrm{e}^{27/2}-3)}{81^6}\Big).$$

取 $d_1=81^6/(10\cdot(\mathrm{e}^{27/2}-3))$, 则 $g'(x)\le 0$, $x\ge 81$. 再由 $g(\infty)=0$, 可得

$$-d_1x^{-5}\le\log(1-3\mathrm{e}^{-x/6}),\quad x\ge 81.$$

同理可找到 $d_2=81^6/(6\cdot(\mathrm{e}^{27/2}+5))$, 使得 $\log(1+5\mathrm{e}^{-x/6})\le d_2x^{-5}$, $x\ge 81$. 由以上讨论, 可得

$$\mathrm{e}^{-d_1'}=\mathrm{e}^{-d_1\sum_{k=4}^{\infty}3^{-5k}}\le\prod_{k=4}^{\infty}q(3^kt)\le\mathrm{e}^{d_2\sum_{k=4}^{\infty}3^{-5k}}=\mathrm{e}^{d_2'}, \tag{8}$$

其中 $d_i' = d_i/(3^{15}\cdot(3^5-1)),\ i=1,2.$

下面估计 $\prod_{k=5}^{\infty}(q(3^{-k}t)/6)$. 注意到当 $0\le x\le 1/243$ 时, 有

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)+\frac{2\mathrm{e}^{x/2}}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)\ge 3,$$

所以取 $c=\mathrm{e}^{-1/243}/3$, 可得

$$\begin{aligned}(6\mathrm{e}^{-2cx}-q(x))' &= \mathrm{e}^{-x}\left(1-12c\mathrm{e}^{(1-2c)x}+\frac{4}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)+\frac{2\mathrm{e}^{x/2}}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)\right)\\ &\ge 4\mathrm{e}^{-x}(1-3c\mathrm{e}^{(1-2c)x})\ge 4\mathrm{e}^{-x}(1-3c\mathrm{e}^{(1-2c)/243})\\ &> 4\mathrm{e}^{-x}(1-3c\mathrm{e}^{1/243})=0.\end{aligned}$$

又因为 $6-q(0)=0$, 所以有 $q(x)\le 6\mathrm{e}^{-2cx},\ 0\le x\le 1/243$, 从而有

$$q(3^{-k}t)\le 6\mathrm{e}^{-2c/3^{k+1}},\quad k\ge 5,\quad 1/3\le t\le 1.$$

由文 [9, (5.10) 式], 有 $q(3^{-k}t)\ge 6\mathrm{e}^{-2/3^{k+1}}$. 于是

$$6\mathrm{e}^{-2/3^{k+1}}\le q(3^{-k}t)\le 6\mathrm{e}^{-2c/3^{k+1}},\quad k\ge 5,\quad 1/3\le t\le 1,$$

从而

$$\mathrm{e}^{-1/3^5}\le\prod_{k=5}^{\infty}\frac{q(3^{-k}t)}{6}\le \mathrm{e}^{-c/3^5}. \tag{9}$$

结合 (2) 和 (6)–(9) 式, 通过 Matlab 计算可得

$$0.4858<0.4880\mathrm{e}^{-d_1'-1/3^5}<\Phi_0(t)<0.4905\mathrm{e}^{d_2'-c/3^5}<0.4890.$$

证毕.

引理 2.3 设 $\psi(x)$ 如引理 2.1 所示, m 和 M 由 (4) 式定义. 令

$$\beta=\int_0^{1/6}t^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-\pi t/\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\pi t\right)dt,\quad \gamma=\int_{1/6}^{7/6}t^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-\pi t/\sqrt{3}}\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{6}\right)dt,$$

则 $\psi(x)>m\beta-M\gamma,\ x<0$.

证明 令 $t_n=t+n+1/6$, $\lambda_n=\int_0^1 t_n^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-\pi t/\sqrt{3}}\sin(\pi t)dt$. 易知 $\lambda_n>\lambda_{n+1}>0$. 当 $x<0$ 时, 对 $\psi(x)$ 做一简单变量替换后, 有

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left(\int_0^{1/6}+\int_{1/6}^{7/6}\right)\Psi_0\left(-\frac{2\pi t}{\sqrt{3}x}\right)t^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-\pi t/\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\pi t\right)dt\\ &\quad+\mathrm{e}^{-\pi/(6\sqrt{3})}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-n\pi/\sqrt{3}}\int_0^1\Psi_0\left(-\frac{2\pi t_n}{\sqrt{3}x}\right){t_n}^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-\pi t/\sqrt{3}}\sin(\pi t)dt\\ &> m\beta-M\gamma+(m-M\mathrm{e}^{-\pi/\sqrt{3}})\mathrm{e}^{-\pi/(6\sqrt{3})}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(2k-1)\pi/\sqrt{3}}\lambda_{2k-1}.\end{aligned} \tag{10}$$

由引理 2.2 可知 $m-M\mathrm{e}^{-\pi/\sqrt{3}}>0$. 又因为正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(2k-1)\pi/\sqrt{3}}\lambda_{2k-1}$ 收敛, 所以由 (10) 式有 $\psi(x)>m\beta-M\gamma$. 这正是要证明的.

3 定理的证明

定理 1.1 的证明 由变量替换及 μ 的性质, 有

$$H_0^{\alpha}(z)=\int_{A_0}\frac{d\mu(\omega)}{(z-\omega)^2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{3^n\bigcup_{i=1}^5 T_i}\frac{d\mu(\omega)}{(z-\omega)^2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}3^{(\alpha-2)n}\int_{\bigcup_{i=1}^5 T_i}\frac{d\mu(\omega)}{(3^{-n}z-\omega)^2}.$$

令 E 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的任一紧集, 并且 $E \subset D_0 = \{\pi/6 < \arg z < 11\pi/6\}$. 易知存在自然数 N, 当 $n > N$ 时, 对 $\forall z \in E$, 有 $\mathrm{dist}(3^{-n}z, \bigcup_{i=1}^5 T_i) > \frac{1}{2}\mathrm{dist}(0, \bigcup_{i=1}^5 T_i) = \frac{\sqrt{3}}{6}$. 令 $d = \mathrm{dist}(E, A_0) > 0$, 则对 $\forall z \in E$, 有

$$\begin{aligned}
|H_0^\alpha(z)| &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} 3^{(\alpha-2)n} \int_{\bigcup_{i=1}^5 T_i} \frac{d\mu(\omega)}{|3^{-n}z-\omega|^2} \\
&= \int_{\bigcup_{i=1}^5 T_i} \frac{d\mu(\omega)}{|z-\omega|^2} + \sum_{n=1}^{N} 3^{(\alpha-2)n} \int_{\bigcup_{i=1}^5 T_i} \frac{d\mu(\omega)}{|3^{-n}z-\omega|^2} \\
&\quad + \sum_{n=N+1}^{\infty} 3^{(\alpha-2)n} \int_{\bigcup_{i=1}^5 T_i} \frac{d\mu(\omega)}{|3^{-n}z-\omega|^2} + \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\alpha n} \int_{\bigcup_{i=1}^5 T_i} \frac{d\mu(\omega)}{|z-3^{-n}\omega|^2} \\
&< \frac{5}{6d^2}\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\alpha n}\Big) + \sum_{n=1}^{N} 3^{(\alpha-2)n} \int_{\bigcup_{i=1}^5 T_i} \frac{d\mu(\omega)}{|3^{-n}z-\omega|^2} + 10 \sum_{n=N+1}^{\infty} 3^{(\alpha-2)n} \\
&< C(E) < +\infty,
\end{aligned}$$

其中 $C(E)$ 是依赖于 E 的常数. 上面的不等式说明 $H_0^\alpha(z)$ 在 D_0 的任一紧集上绝对一致收敛. 又因为 $H_0^\alpha(z)$ 的级数表示中的每一项都在 D_0 上解析, 所以 $H_0^\alpha(z)$ 在 D_0 上解析.

(ii) 由 $A_k = \mathrm{e}^{k\pi\mathrm{i}/3}A_0$, 利用变量替换及 μ 的性质易证得定理结论.

至此, 完成了整个定理的证明.

定理 1.2 的证明 由定理 1.1, 易知 $H_{1,5}^\alpha(z)$ 在左半平面解析, 从而 $H_{1,5}^\alpha(x)$ 当 $x<0$ 时是连续的. 通过 Mathematica 计算得 $\beta > 0.4930$, $\gamma < 0.3115$. 结合引理 2.2 可知 $\psi(x) > m\beta - M\gamma > 0.0870$, 进而由引理 2.1 可知, 当 $x<0$ 时, $H_{1,5}^\alpha(x) < 0$. 证毕.

定理 1.3 的证明 对 $\forall z_0 \in D_k$, 由柯西定理不妨设积分路径是连接 z_0 与 $3z_0$ 的直线段. 令 $z_0 = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $z = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则

$$\int_{z_0}^{3z_0} z^{1-\alpha} H_k^\alpha(z)dz = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(2-\alpha)} \int_a^{3a} t^{1-\alpha} H_k^\alpha(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})dt. \tag{11}$$

由定理 1.1, 有

$$\begin{aligned}
\int_a^{3a} t^{1-\alpha} H_k^\alpha(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})dt &= \mathrm{e}^{-\frac{2k\pi\mathrm{i}}{3}} \int_a^{3a} t^{1-\alpha} H_0^\alpha(\mathrm{e}^{-\frac{k\pi\mathrm{i}}{3}} t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})dt \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{2k\pi\mathrm{i}}{3}} \int_a^{3a} t^{1-\alpha} \Bigg(\sum_{n\in\mathbb{Z}} 3^{(\alpha-2)n} \int_{\bigcup_{i=1}^5 T_i} \frac{d\mu(\omega)}{(3^{-n}t\mathrm{e}^{(\theta-\frac{k\pi}{3})\mathrm{i}}-\omega)^2}\Bigg)dt \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{2k\pi\mathrm{i}}{3}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\bigcup_{i=1}^5 T_i} \Bigg(\int_{3^{-n}a}^{3^{-n+1}a} \frac{y^{1-\alpha}dy}{(y\mathrm{e}^{(\theta-\frac{k\pi}{3})\mathrm{i}}-\omega)^2}\Bigg)d\mu(\omega) \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{2k\pi\mathrm{i}}{3}} \int_{\bigcup_{i=1}^5 T_i} \Bigg(\int_0^{+\infty} \frac{y^{1-\alpha}dy}{(y\mathrm{e}^{(\theta-\frac{k\pi}{3})\mathrm{i}}-\omega)^2}\Bigg)d\mu(\omega) \\
&= \mathrm{e}^{-2\theta\mathrm{i}} \int_{\bigcup_{i=1}^5 T_i} \Bigg(\int_0^{+\infty} \frac{y^{1-\alpha}dy}{(y-\omega\mathrm{e}^{(\frac{k\pi}{3}-\theta)\mathrm{i}})^2}\Bigg)d\mu(\omega).
\end{aligned} \tag{12}$$

由文 [12, 159 页] 的留数定理, 有

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{y^{1-\alpha}dy}{(y-\omega\mathrm{e}^{(\frac{k\pi}{3}-\theta)\mathrm{i}})^2} &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{-2\alpha\pi\mathrm{i}}} \operatorname*{Res}_{z=\omega\mathrm{e}^{(\frac{k\pi}{3}-\theta)\mathrm{i}}} \frac{z^{1-\alpha}}{(z-\omega\mathrm{e}^{(\frac{k\pi}{3}-\theta)\mathrm{i}})^2} \\
&= \frac{\pi\mathrm{i}(1-\alpha)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha k\pi\mathrm{i}}{3}+\alpha\theta i}}{\omega^\alpha \sin(\alpha\pi)\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\alpha)\pi\mathrm{i}}} = \frac{\pi(1-\alpha)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha k\pi\mathrm{i}}{3}+\alpha\theta\mathrm{i}+\alpha\pi\mathrm{i}}}{\omega^\alpha\sin(\alpha\pi)},
\end{aligned}$$

代入 (12) 式, 得

$$\int_a^{3a} t^{1-\alpha} H_k^{\alpha}(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})dt = \frac{\pi(1-\alpha)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha k\pi\mathrm{i}}{3}+(\alpha-2)\theta\mathrm{i}+\alpha\pi\mathrm{i}}}{\sin(\alpha\pi)} \int_{\bigcup_{i=1}^5 T_i} \omega^{-\alpha} d\mu(\omega). \tag{13}$$

又因为 $\bigcup_{i=1}^5 T_i$ 自身关于实轴对称, 所以

$$\int_{\bigcup_{i=1}^5 T_i} \omega^{-\alpha} d\mu(\omega) = 2\mathrm{Re}\int_{T_3^+\cup T_4\cup T_5} \omega^{-\alpha} d\mu(\omega) = 2\int_{T_3^+\cup T_4\cup T_5} \frac{\cos(\alpha\arg\omega)}{|\omega|^{\alpha}} d\mu(\omega). \tag{14}$$

结合 (11), (13) 和 (14) 式, 得

$$\int_a^{3a} t^{1-\alpha} H_k^{\alpha}(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})dt = C\mathrm{e}^{-\frac{\alpha k\pi\mathrm{i}}{3}+\alpha\pi\mathrm{i}},$$

这里

$$C = \frac{2\pi(1-\alpha)}{\sin(\alpha\pi)} \int_{T_3^+\cup T_4\cup T_5} \frac{\cos(\alpha\arg\omega)}{|\omega|^{\alpha}} d\mu(\omega). \tag{15}$$

下面估计常数 C 的大小. 首先估计 $\int_{T_5} |\omega|^{-\alpha}\cos(\alpha\arg\omega)d\mu(\omega)$. 取迭代函数系 $\sigma_j z = z_j + (z-z_j)/3,\ j=1,\ldots,6$, 其中 $z_1=1,\ z_2=1+i\sqrt{3}/6,\ z_3=1+i\sqrt{3}/3,\ z_4=3/4+i\sqrt{3}/4,\ z_5=1/2+i\sqrt{3}/6,\ z_6=3/4+i\sqrt{3}/12$. 易知 T_5 是迭代函数系 $\{\sigma_j\}_{j=1}^6$ 的吸引子, 且 $T_5=\bigcup_{j=1}^6 \sigma_j(T_5)$.

令 $\Lambda=\{J=(j_1,\ldots,j_k): j_s\in\{1,\ldots,6\},\ s=1,\ldots,k\}$, $\sigma_J=\sigma_{j_1}\circ\cdots\circ\sigma_{j_k}$, $|J|=k$ 表示 J 的长度, $k\in\mathbb{N}^+$. 由简单的迭代关系易有 $T_5=\bigcup_{j=1}^6\sigma_j(T_5)=\bigcup_{|J|=k}\sigma_J(T_5)$. 对任一 $J\in\Lambda$, 令 τ_J 是包含 $\sigma_J(T_5)$ 的最小正三角形区域的重心 (如图 5).

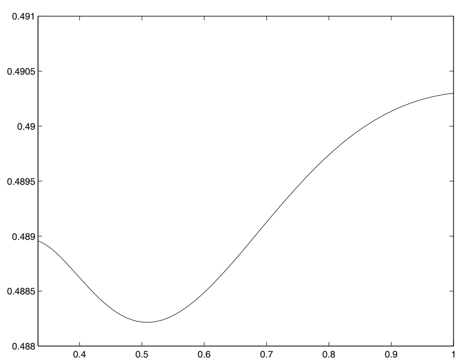

图 4 $f(t)$ 在区间 $[1/3,1]$ 上的函数图像

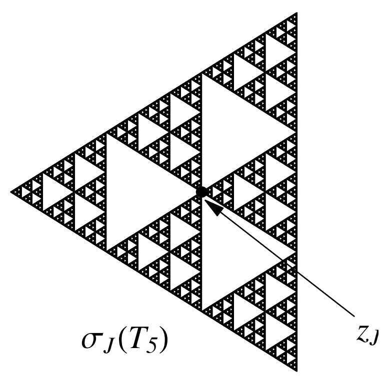

图 5 正三角形区域 $\sigma_J(T_5)$

易知 $\tau_J=\sigma_J(\sigma_2 z_5)$, 并且当 $\omega\in\sigma_J(T_5)$ 时, $|\omega-\tau_J|\le 3^{-k-1}$. 记 $z_n=a_n+\mathrm{i}b_n,\ n=1,2,\ldots,6$. 由 z_n 的定义, 易知 $a_1=a_2=a_3=1,\ a_4=a_6=3/4,\ a_5=1/2,\ b_1=0,\ b_2=b_5=\sqrt{3}/6,\ b_3=\sqrt{3}/3,\ b_4=\sqrt{3}/4,\ b_6=\sqrt{3}/12$. 注意到 $J\in\Lambda$, 由 σ_j 的定义可得

$$\begin{aligned}\tau_J=\sigma_J(\sigma_2 z_5)=\sigma_J\Big(\frac{2}{3}z_2+\frac{1}{3}z_5\Big)&=2\sum_{s=1}^k\Big(\frac{1}{3}\Big)^s z_{j_s}+\Big(\frac{1}{3}\Big)^k\Big(\frac{2}{3}z_2+\frac{1}{3}z_5\Big)\\&=2\sum_{s=1}^k\Big(\frac{1}{3}\Big)^s a_{j_s}+\frac{5}{6}\Big(\frac{1}{3}\Big)^k+\Big(2\sum_{s=1}^k\Big(\frac{1}{3}\Big)^s b_{j_s}+\frac{\sqrt{3}}{6}\Big(\frac{1}{3}\Big)^k\Big)i.\end{aligned} \tag{16}$$

设积分 $\int_{T_5}|\omega|^{-\alpha}\cos(\alpha\arg\omega)d\mu(\omega)$ 的 k 阶逼近为

$$\sum_{|J|=k}\int_{\sigma_J T_5}\frac{\cos(\alpha\arg\tau_J)}{|\tau_J|^{\alpha}}d\mu(\omega)=6^{-k-1}\sum_{|J|=k}\frac{\cos(\alpha\arg\tau_J)}{|\tau_J|^{\alpha}}:=c_1^{(k)}. \tag{17}$$

误差为

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{T_5}\frac{\cos(\alpha\arg\omega)}{|\omega|^{\alpha}}d\mu(\omega)-\sum_{|J|=k}\int_{\sigma_J T_5}\frac{\cos(\alpha\arg\tau_J)}{|\tau_J|^{\alpha}}d\mu(\omega)\right|\\
&\quad=\left|\sum_{|J|=k}\mathrm{Re}\int_{\sigma_J T_5}\omega^{-\alpha}d\mu(\omega)-\sum_{|J|=k}\mathrm{Re}\int_{\sigma_J T_5}{\tau_J}^{-\alpha}d\mu(\omega)\right|\\
&\quad\le\alpha\sum_{|J|=k}\int_{\sigma_J T_5}\left|\int_{\tau_J}^{\omega}\xi^{-\alpha-1}d\xi\right|d\mu(\omega)\\
&\quad\le 18^{-k-1}\alpha\sum_{|J|=k}|\sigma_J z_5|^{-\alpha-1}:=\delta_1^{(k)}.
\end{aligned}\tag{18}$$

类似于 (17) 与 (18) 式, 设积分 $\int_{T_4}|\omega|^{-\alpha}\cos(\alpha\arg\omega)d\mu(\omega)$ 和 $\int_{T_3}|\omega|^{-\alpha}\cos(\alpha\arg\omega)d\mu(\omega)$ 的 k 阶逼近与误差分别为 $c_2^{(k)}$, $c_3^{(k)}$ 与 $\delta_2^{(k)}$, $\delta_3^{(k)}$. 令

$$c^{(k)}=\frac{2\pi(1-\alpha)}{\sin(\alpha\pi)}(c_1^{(k)}+c_2^{(k)}+c_3^{(k)}/2),\quad \delta^{(k)}=\frac{2\pi(1-\alpha)}{\sin(\alpha\pi)}(\delta_1^{(k)}+\delta_2^{(k)}+\delta_3^{(k)}/2),$$

取 $k=7$, 通过 Mathematics 计算得 $c^{(7)}=1.291298\ldots$, $\delta^{(7)}=0.00043107\cdots$. 由 (15), (17) 与 (18) 式易知 $c^{(7)}-\delta^{(7)}<C<c^{(7)}+\delta^{(7)}$, 因此有

$$1.29085<C<1.29175.$$

证毕.

参 考 文 献

[1] Lin X. S., Philosophically wandering through fractal, Beijing: Capital Normal University Press, 1999 (in Chinese).
[2] Strichartz R. S., Fourier asymptotics of fractal measures, *J. Funct. Anal.,* 1990, **89**: 154–187.
[3] Strichartz R. S., Self-similar measures and their Fourier transforms I, II, III, *Indiana Univ. Math. J.,* 1990, **39**: 797–817; *Trans. Amer. Math. Soc.,* 1993, **336**: 335–361; *Indiana Univ. Math. J.,* 1993, **42**: 367–411.
[4] Strichartz R. S., Self-similarity in harmonic analysis, *J. Fourier Anal. Appl.,* 1994, **1**: 1–37.
[5] Lau K. S., Wang J. R., Mean quadratic variations and Fourier asymptotics of self-similar measures, *Monatsh. Math.,* 1993, **115**: 99–123.
[6] Lau K. S., Fractal measures and the mean p-variations, *J. Funct. Anal.,* 1992, **108**: 427–457.
[7] Lund J. P., Strichartz R. S., Vinson J. P., Cauchy transforms of self-similar measures, *Exper. Math.,* 1998, **7**(3): 177–190.
[8] Dong X. H., Lau K. S., An integral related to the Cauchy transform on the Sierpinski gasket, *Exp. Math.,* 2004, **13**(4): 415–419.
[9] Dong X. H., Lau K. S., Cauchy transforms of self-similar measures: the Laurent coefficients, *J. Funct. Anal.,* 2003, **202**: 67–97.
[10] Dong X. H., Cauchy transforms of self-similar measures, Ph.D Thesis, Department of Mathematics, The Chinese University of Hong Kong, 2002.
[11] Falconer K. J., Fractal geometry-mathematical foundations and applications, New York: John Wiley & Sons, 1990.
[12] Ahlfors L., Complex analysis, 3rd ed, New York: McGraw-Hill. 1979.