第50卷第4期 数学学报中文版 Vol.50, No.4
2007年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Jul., 2007

文章编号: 0583-1431(2007)04-0721-08 **文献标识码: A**

最大 Abel 商群为局部循环群的可解群

刘合国

湖北大学数学系 武汉 430062
E-mail: ghliu@hubu.edu.cn

马玉杰

中国科学院数学机械化重点实验室 北京 100080
E-mail: yjma@mmrc.iss.ac.cn

摘 要 从自同构群的角度出发, 给出了一些具有有限性条件的、最大 Abel 商群为局部循环群的可解群的结构.

关键词 可解群; 最大 Abel 商群; 局部循环群
MR(2000) 主题分类 20E34, 20F16, 20F18
中图分类 O152

On Soluble Groups Whose Maximal Abelian Quotients are Locally Cyclic

He Guo LIU

Department of Mathematics, Hubei University, Wuhan 430062*, P. R. China*
E-mail: ghliu@hubu.edu.cn

Yu Jie MA

KLMM, Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences,
Beijing 100080*, P. R. China*
E-mail: yjma@mmrc.iss.ac.cn

Abstract By using automorphism groups of locally cyclic groups, some structures of soluble groups with finiteness conditions and locally cyclic maximal abelian quotients are given.

Keywords soluble group; maximal abelian quotient; locally cyclic group
MR(2000) Subject Classification 20E34, 20F16, 20F18
Chinese Library Classification O152

0 引言

设 G 为群, G' 是它的换位子群. 由于 G 的每个 Abel 商群都是 G/G' 的同态象, 因而称 $G_{ab} := G/G'$ 为 G 的最大 Abel 商群. 对于 G 的下中心列

$$G = \gamma_1(G) \geqslant \gamma_2(G) \geqslant \cdots$$

收稿日期: 2006-04-27; 接受日期: 2006-12-30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10371032, 10301032); 国家重点基础研究发展计划 (2004CB318000) 中德中心项目 (GZ310); 教育部博士点基金及留学回国人员科研启动基金资助项目

来说, 存在着自然的满同态

$$\underbrace{G_{ab}\otimes G_{ab}\otimes\cdots\otimes G_{ab}}_{i}\longrightarrow \gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G),$$

于是在幂零群的情形, $G_{ab}=G/G'$ 的许多特征能够在整体上决定 G 的相应特征, 可见文 [1–2]. 特别地, 当幂零群 G 的最大 Abel 商群 $G_{ab}=G/G'$ 是循环群时, G 也一定是循环群. 这是一个基本的事实, 我们可以从幂零类的比较、换位计算、中心子群的循环扩张等不同角度给出证明. 现在从这个基本的事实入手开始讨论. 本文目的是从局部循环群的自同构群出发, 对一些具有有限性条件的、最大 Abel 商群为局部循环群的可解群给出其结构.

1 定理及其证明

定理 1 设 G 为幂零群, $G_{ab}=G/G'$ 为局部循环群, 则 $G'=1$, 即 G 也是局部循环群.

证明 记 $N=\gamma_3(G)=[G,G,G]$, 它是 G 的特征子群. 记 $\overline{G}=G/N$, 此时 $\overline{G'}=G'/N$, $\overline{G}_{ab}=\overline{G}/\overline{G'}\cong G_{ab}=G/G'$ 是局部循环群, 并且 $\overline{G'}$ 是 $\overline{G}$ 的中心子群. 任取 $\overline{G}$ 的两个元素 x 和 y, $\langle x\overline{G'},y\overline{G'}\rangle/\overline{G'}$ 是循环群, 即存在 $z\in\overline{G}$, 使得 $x\in z^m\overline{G'}$, $y\in z^n\overline{G'}$ 对某整数 m 和 n. 注意到 $\overline{G'}$ 是 $\overline{G}$ 的中心子群, $\langle z,\overline{G'}\rangle$ 是 Abel 群. 这样 $xy=yx$, $\overline{G}$ 是 Abel 群, $\overline{G'}=1$, 从而 $\gamma_3(G)=N=G'$. 又 G 是幂零群, 必有 $G'=1$, 这表明 G 是局部幂零群.

下面的群例表明定理 1 对局部幂零群是不成立的.

例 1 取拟循环 2- 群 $A=\mathbb{Z}_{2^\infty}$ 以及 A 的典型自同构 α, α 把 A 的每个元变为其逆元, α 是 2 阶的. 由此构造 $G=\langle\alpha\rangle\ltimes A$, 则 G 是局部幂零 2- 群, $G'=A$, $G_{ab}=G/G'\cong\langle\alpha\rangle$ 是 2 阶群.

证明 对 G 的任意有限生成的子群 $H=\langle g_1,g_2,\ldots,g_n\rangle$, 当 $H\leqslant A$ 时, H 是有限循环 2- 群. 当 H 不是 A 的子群时, 从 $G=HA=AH$ 知

$$H/H\cap A\cong HA/A=G/A\cong\langle\alpha\rangle$$

是 2 阶群, $H\cap A$ 也是有限生成的, $H\cap A$ 是有限循环 2- 群, 从而 H 是有限 2- 群, 由此得到 G 是局部幂零 2- 群.

显然 $G'\leqslant A$, 反之, 对 A 的任意元 x, 换位子

$$[x,\alpha]=x^{-1}x^{\alpha}=x^{-1}x^{-1}=x^{-2}\in G'.$$

注意到 A 是 2- 可除的, $A\leqslant G'$, 从而 $G'=A$, 并且 $G/G'\cong\langle\alpha\rangle$ 是 2 阶群.

定理 2 设群 G 的最大 Abel 商群 $G_{ab}=G/G'$ 为循环 p- 群, 则 G' 的最大 Abel 商群 ${G'}_{ab}=G'/G''$ 是 p- 可除的.

证明 不妨设 $G''=1$, 并且 $G'\neq 1$, 否则可用 G/G'' 代替 G. 记 $N=G'^p=\langle x^p\,|\,x\in G'\rangle$, N 是 G 的特征子群. 如果 N 是 G' 的真子群, G'/N 是初等 Abel p- 群, 这样存在 $M/N<G'/N$, 使得 G'/M 是 p 阶群. 再设 $|G:G'|=p^n$, $G=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant p^n}G'g_i$ 是 G 关于 G' 的陪集分解, 对 G 的任意元素 g, g 可以写为 $g=xg_i$ 对某个 $x\in G'$ 以及某个 $1\leqslant i\leqslant p^n$, 于是

$$M^g=M^{xg_i}=M^{g_i}\leqslant G'^{g_i}=G'\lhd G.$$

因此, M 在 G 里的核

$$M_G=\bigcap_{g\in G}M^g=\bigcap_{1\leqslant i\leqslant p^n}M^{g_i}.$$

注意到每个 M^{g_i} 在 G' 里的指数都是 p, 并且 G' 是 Abel 群, 可知

$$G'/M_G=G'/\bigcap_{1\leqslant i\leqslant p^n}M^{g_i}\leqslant\prod_{1\leqslant i\leqslant p^n}G'/M^{g_i}$$

是有限初等 Abel p- 群, 从而 G/M_G 是有限 p- 群, 并且 G/M_G 的最大 Abel 商群

$$G/M/(G/M_G)'=G/M_G/G'/M_G\cong G/G'$$

是循环 p- 群. 根据定理 1 知, G/M_G 是循环群, 随之 $G'\leqslant M_G$, 这导致矛盾, 所以必有 $G'=N$, 即 G' 是 p- 可除的.

下面给出一类最大 Abel 商群为 p 阶群的局部幂零群, 其换位子群是有限个拟循环 p- 群的直和.

例 2 取拟循环 p- 群 $A_1=A_2=\cdots=A_{p-1}=\mathbb{Z}_{p^\infty}$, $A=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_{p-1}$ 以及 A 的自同构

$$\begin{aligned}\alpha: A=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_{p-1}&\longrightarrow A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_{p-1}=A\\(a_1,a_2,\ldots,a_{p-1})&\longrightarrow\Big(-\sum_{1\le i\le p-1}a_i,a_1,\ldots,a_{p-2}\Big).\end{aligned}$$

由此构造 $G=\langle\alpha\rangle\ltimes A$, 则 $G'=A$ 是 p- 可除的, $G_{ab}=G/G'\cong\langle\alpha\rangle$ 是 p 阶循环群.

证明 根据文 [3] 知 A 的自同态环 $\mathrm{End}\,(A)\cong M_{p-1}(\mathbb{Z}_p)$, 这里 $\mathbb{Z}_p$ 是 p- 进整数环, $M_{p-1}(\mathbb{Z}_p)$ 是 $\mathbb{Z}_p$ 上全部 $p-1$ 阶矩阵作成的环, 显然 α 对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix}-1&1&0&\cdots&0&0\\-1&0&1&\cdots&0&0\\-1&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\-1&0&0&\cdots&0&1\\-1&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},$$

即对 A 的任意元 $(a_1,a_2,\ldots,a_{p-1})$, 有

$$\alpha(a_1,a_2,\ldots,a_{p-1})=(a_1,a_2,\ldots,a_{p-1})\begin{pmatrix}-1&1&0&\cdots&0&0\\-1&0&1&\cdots&0&0\\-1&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\-1&0&0&\cdots&0&1\\-1&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}.$$

容易验证 α 的特征多项式为 $\lambda^{p-1}+\lambda^{p-2}+\cdots+\lambda+1$, 于是由 Cayley–Hamilton 定理知

$$\alpha^{p-1}+\alpha^{p-2}+\cdots+\alpha+1=0,$$

从而 $\alpha^p = 1$, α 是 A 的 p 阶自同构. 对 A 的任意对角元 $(a, a, \dots, a)$, 它与 α 的换位子

$$\begin{aligned}[(a, a, \dots, a), \alpha] &= -(a, a, \dots, a) + (a, a, \dots, a)^{\alpha} \\ &= (-a, -a, \dots, -a) + (-(p-1)a, a, \dots, a) \\ &= (-pa, 0, \dots, 0) \in G'.\end{aligned}$$

注意到 A 的 p- 可除性, 得 $A_1 \leqslant G'$. 同样地, 从

$$\begin{aligned}[(0, 0, \dots, 0, a_{p-1}), \alpha] &= (-a_{p-1}, 0, \dots, 0, -a_{p-1}), \\ [(0, 0, \dots, a_{p-2}, 0), \alpha] &= (-a_{p-2}, 0, \dots, -a_{p-2}, a_{p-2}), \\ &\vdots \\ [(0, a_2, \dots, 0, 0), \alpha] &= (-a_2, -a_2, a_2, \dots, 0, 0), \\ [(a_1, 0, \dots, 0, 0), \alpha] &= (-2a_1, a_1, 0, \dots, 0, 0)\end{aligned}$$

知 $A_{p-1}, A_{p-2}, \dots, A_2 \leqslant G'$, 从而

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_{p-1} \leqslant G'.$$

又 $G/A \cong \langle \alpha \rangle$ 是 p 阶循环群, $G' \leqslant A$, 因此 $G' = A$ 是可除的.

定理 3 设群 G 的最大 Abel 商群 $G_{ab} = G/G'$ 为循环 p- 群, 则 G' 没有有限 p- 商群.

证明 假设 $H \lhd G'$, G'/H 是有限 p- 群, 则对 G 的任意元素 x, 有 $H^x \lhd G'^x = G'$, 并且 G'/H^x 也是有限 p- 群. 记 $H_G = \bigcap_{x \in G} H^x$, $H_G \lhd G$. 又 $|G : H| = |G : G'| \cdot |G' : H| < \infty$, 故 $|G : H_G| < \infty$. 于是由

$$G'/H_G = G'/\bigcap_{x \in G} H^x \leqslant \prod_{x \in G} G/H_x$$

知, G'/H_G 是有限 p- 群, 进而 G/H_G 也是有限 p- 群; 又注意到 G/H_G 的最大 Abel 商群 $G/H_G/(G/H_G)' \cong G/G'$ 是循环 p- 群, 根据定理 1 知, G/H_G 是循环 p- 群, $G' \leqslant H_G$, 矛盾. 因此 G' 没有有限 p- 商群.

推论 1 设 P 为有限秩的可解 p- 群, 它的最大 Abel 商群 $P_{ab} = P/P'$ 是循环群, 则或者 $P' = 1$ (即 P 是循环群), 或者 P' 是有限个拟循环 p- 群的直和.

证明 假设 $P' \neq 1$, 由条件知 P' 是可解的 Cernikov p- 群, 把 P' 的有限剩余记为 R, R char P', 并且 P'/R 是有限 p- 群, 由定理 3 知, 必有 $R = P'$, 因而 P' 是有限个拟循环 p- 群的直和.

定理 4 设 G 为有限秩的可解群, 若 G 的最大 Abel 商群 $G_{ab} = G/G'$ 是拟循环 p- 群, 则 $G' = 1$, 即 G 也是拟循环 p- 群.

证明 不妨设 $G'' = 1$, 即 G' 是 Abel 群. 记 G' 的挠子群为 T, 它是 G 的特征子群, G'/T 是有限秩的无挠 Abel 群, 设 G'/T 的 0- 秩为 r, 则由文 [4] 知

$$\mathrm{Aut}\,(G'/T) \leqslant \mathrm{Aut}\,(G'/T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \cong \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}) \cong GL_r(\mathbb{Q}).$$

考虑 G/G' 在 G'/T 上的共轭作用, 有

$$G/G'/C_{G/G'}(G'/T) \leqslant \mathrm{Aut}\,(G'/T) \leqslant GL_r(\mathbb{Q}).$$

根据 Schur 的著名定理: $GL_r(\mathbb{Q})$ 的挠子群是有限的, 又注意到 G/G' 是拟循环 p- 群, 必有 $C_{G/G'}(G'/T) = G/G'$, 即 G'/T 是 G/T 的中心子群. 从而 G/T 是 Abel 群, $G' \leqslant T$, 即 G' 是挠群.

若 $G' \neq 1$, G' 是其 Sylow 子群的直和, 任取 G' 的非平凡 Sylow r- 子群 R, $G' = R \oplus S$, 这里 S 是 G' 的 Hall r'- 子群, S char G. 现在考虑 G/S, 由 G/G' 和 G'/S 都是 Cernikov 群知, G/S 也是 Cernikov 群, 于是 G/S 的有限剩余 F/S 在 G/S 中具有有限指数, 并且 F/S 是有限个拟循环群的直和, 这样 $G' \leqslant F$, G/S 是 Abel 群, $G' \leqslant S$, 矛盾. 这表明必有 $G' = 1$, 即 G 是拟循环 p- 群.

定理 5 设 G 是有限秩的可解群, 若 G 的最大 Abel 商群 $G_{ab} = G/G'$ 同构于有理数加群 $\mathbb{Q}$, 则 $G' = 1$, 即 G 同构于有理数加群 $\mathbb{Q}$.

证明 不妨设 $G'' = 1$, 即 G' 是 Abel 群. 记 G' 的挠子群为 T, T char G, G'/T 是有限秩的无挠 Abel 群, 设 G'/T 的 0- 秩为 r, 则

$$A := G'/T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}\,(\,r\,\text{项}\,),$$

再由文 [4] 知

$$\mathrm{Aut}\,(G'/T) \leqslant \mathrm{Aut}\,A \cong GL_r(\mathbb{Q}),$$

考虑 G/G' 在 G'/T 上的共轭作用, 容易验证 G/G' 诱导地作用在 $A = G'/T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 上. 因此

$$G/G'/C_{G/G'}(A) \leqslant \mathrm{Aut}\,(A) \cong GL_r(\mathbb{Q}).$$

注意到 G/G' 同构于有理数加群, 以及 $GL_r(\mathbb{Q})$ 的挠子群必须是有限的, 可知或者 $C_{G/G'}(A) = G/G'$, 或者 $C_{G/G'}(A) = 1$. 在第一种情形, G/G' 平凡地作用在 G'/T 上, G/T 是中心子群 G'/T 被局部循环群 G/G' 的扩张, G/T 是 Abel 群, 随之 $G' \leqslant T$ 是 Abel 挠群. 在第二种情形, G/G' 忠实地作用在 A 上, 将 G/G' 看作 $GL_r(\mathbb{Q})$ 的子群, 由于 $G/G' \cong \mathbb{Q}$, 因而由文 [5, 2 章定理 3] 知, G/G' 是 $GL_r(\mathbb{Q})$ 的可以三角化子群, 于是可设 G/G' 是 $GL_r(\mathbb{Q})$ 的上三角子群. 考虑下面自然的群同态

$$\begin{array}{ccccc}
\alpha : G/G' & \longrightarrow & GL_r(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathbb{Q}^* \oplus \mathbb{Q}^* \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}^* \\
\begin{pmatrix} a_1 & * & * & * \\ & a_2 & * & * \\ & & \ddots & * \\ & & & a_r \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_r \end{pmatrix} & \longrightarrow & (a_1, a_2, \ldots, a_r),
\end{array}$$

$\mathrm{Ker}\ \alpha = G/G' \cap Tr_1(\mathbb{Q})$, $Tr_1(\mathbb{Q})$ 是主对角线元素为 1 的全体上三角阵作成的群, 并且

$$G/G'/\mathrm{Ker}\alpha \cong \mathrm{Im}\,\alpha \leqslant \mathbb{Q}^* \oplus \mathbb{Q}^* \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}^*.$$

据文 [6] 知

$$\mathbb{Q}^* \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \left(\bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}\right),$$

其中 $\mathbb{P}$ 表示全体素数, 再由 G/G' 的可除性可知 $G/G' = \mathrm{Ker}\alpha$, 即 $G/G' \leqslant Tr_1(\mathbb{Q})$, 这样 G/G' 幂零地作用在 A 上, 也幂零地作用在 G'/T 上, 因此 G/T 是幂零群, 并且从条件知, G/T 的最大

Abel 商群 $G/T/(G/T)'=G/G'$ 是局部循环群, 根据定理 1 知, G/T 是局部循环群, $G'\leqslant T$ 是 Abel 挠群.

现在已知 G' 是 Abel 挠群, 假设 $G'\neq 1$, 取 G' 的非平凡 Sylow p- 子群 P 和 Hall p'- 子群 R, $G'=P\oplus R$, 并且 R char G. 记 $\overline{G}:=G/R$, 此时 $\overline{G'}=\overline{G'}/R\cong P$ 是 Abel p- 群, $\overline{G}/\overline{G'}\cong G/G'\cong\mathbb{Q}$. 对每个自然数 n, 记 $\Omega_n(\overline{G'})=\{x\in\overline{G'}\,|\,p^nx=0\}$, 它们都是 $\overline{G}$ 的特征子群, 并且 $\overline{G'}$ 是这些 $\Omega_n(\overline{G'})$ 的并集. 容易验证 $\overline{G}/\overline{G'}$ 平凡地作用在有限 Abel p- 群 $\Omega_n(\overline{G'})$ 上, $\overline{G}/\overline{G'}$ 平凡地作用在 $\overline{G'}$ 上, 即 $\overline{G'}$ 是 $\overline{G}$ 的中心子群, $\overline{G}$ 是 $\overline{G'}$ 的局部循环扩张, $\overline{G}=G/R$ 是 Abel 群, $G'\leqslant R$, 矛盾. 这样必有 $G'=1$, 即 $G\cong\mathbb{Q}$.

定理 6 设群 G 的最大 Abel 商群 $G_{ab}=G/G'$ 为循环 p- 群, 则 $G^{(2)}/G^{(3)}$ 不是非平凡的循环 p- 群.

证明 假设 $G^{(2)}/G^{(3)}$ 是非平凡的循环 p- 群, 为方便可令 $G^{(3)}=1$, 即 $G^{(2)}$ 是 p^n 阶循环群, 考虑 G 在 $G^{(2)}$ 上的共轭作用, 可得

$$G'/C_{G'}(G^{(2)})\leqslant \operatorname{Aut}G^{(2)}\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_{p-1}\oplus\mathbb{Z}_{p^{n-1}}, & p\text{为奇素数},\\ 1, & p=2,\quad n=1,\\ \mathbb{Z}_2, & p=2,\quad n=2\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{2^{n-2}}, & p=2,\quad n\geqslant 2,\end{cases}$$

由定理 3 知, G' 没有有限 p- 商群, 故只能有 $G'/C_{G'}(G^{(2)})\leqslant\mathbb{Z}_{p-1}$, 再注意到 G/G' 是有限循环 p- 群, 可以验证 $G/C_{G'}(G^{(2)})$ 是 Abel 群, 即 $G'\leqslant C_{G'}(G^{(2)})$, 这意味着 $G^{(2)}$ 是 G' 的中心子群. 取 G' 的任意非中心元 g, 显然 $g\notin G^{(2)}$, 考虑下面自然的群同态

$$\begin{array}{rccc}\alpha: & G' & \longrightarrow & G^{(2)},\\ & x & \longrightarrow & [g,x].\end{array}$$

据同态定理知, $G'/\mathrm{Ker}\alpha\cong\operatorname{Im}\alpha\leqslant G^{(2)}$ 是循环 p- 群, 再由定理 3 知, 必有 $G'/\mathrm{Ker}\alpha=1$, $G'=\mathrm{Ker}\alpha$, 这样 g 是 G' 的中心元, 矛盾. 因此 $G^{(2)}/G^{(3)}$ 一定不是非平凡的循环 p- 群.

定理 7 设挠群 G 的最大 Abel 商群 $G_{ab}=G/G'$ 为循环 p- 群, 则 $G^{(2)}/G^{(3)}$ 不是拟循环 p- 群.

证明 假设 $G^{(2)}/G^{(3)}$ 是拟循环 p- 群, 不妨设 $G^{(3)}=1$, 此时 $G^{(2)}\cong\mathbb{Z}_{p^\infty}$. 考虑 G 在 $G^{(2)}$ 上的共轭作用, 由文 [7] 可得, 当 p 是奇素数时

$$G'/C_{G'}(G^{(2)})\leqslant\operatorname{Aut}G^{(2)}\cong\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_{p^\infty})\cong\mathbb{Z}_p^*\cong\mathbb{Z}_{p-1}\oplus(1+p\mathbb{Z}_p),$$

其中 $\mathbb{Z}_p^*$ 是 p- 进整数环 $\mathbb{Z}_p$ 的单位乘法群, 因 G 是挠群, $G'/C_{G'}(G^{(2)})\leqslant Z_{p-1}$. 故循环 p- 群 G/G' 通过共轭平凡地作用在 $G'/C_{G'}(G^{(2)})$ 上, $G'/C_{G'}(G^{(2)})$ 是 $G/C_{G'}(G^{(2)})$ 的中心子群, $G/C_{G'}(G^{(2)})$ 是 Abel 群, $G'\leqslant C_{G'}(G^{(2)})$, 即 $G^{(2)}$ 是 G' 的中心子群, 从而 G' 是幂零群, G' 是其 Sylow p- 子群 P 与 Hall p'- 子群 R 的直积, 即 $G'=P\times R$, 并且 $G^{(2)}\leqslant P$.

当 $p=2$ 时, 根据文 [7] 知

$$G'/C_{G'}(G^{(2)})\leqslant\operatorname{Aut}G^{(2)}\cong\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_{2^\infty})\cong\mathbb{Z}_2^*=\mathbb{Z}_2\oplus(1+2^2\mathbb{Z}_2),$$

其中 $\mathbb{Z}_2^*$ 是 2- 进整数环 $\mathbb{Z}_2$ 的单位乘法群. 由条件知 $G'/C_{G'}(G^{(2)})\leqslant Z_2$, 又由定理 3 知 G' 没有有限 2- 商群, 这样必有 $G'=C_{G'}(G^{(2)})$, 即 $G^{(2)}$ 是 G' 的中心子群, G' 是幂零群. 此时 G' 是其 Sylow 2- 子群 P 与 Hall $2'$- 子群 R 的直积, 即 $G'=P\times R$, 且 $G^{(2)}\leqslant P$.

由 $R\cap G^{(2)}=1$ 知, $R\cong R\cdot G^{(2)}/G^{(2)}\leqslant G'/G^{(2)}$ 是 Abel p'- 群. 又由定理 2 知, $G'/G^{(2)}$ 是 p- 可除的, 这样 $G'/G^{(2)}$ 的 p- 准素分支 $P/G^{(2)}$ 也是 p- 可除的, $P/G^{(2)}$ 是拟循环 p- 群的直和. 任取 $x,y\in P$, 存在 $P/G^{(2)}$ 的分解 $P/G^{(2)}=M/G^{(2)}\oplus N/G^{(2)}$, 使得 $M/G^{(2)}$ 是有限个拟循环 p- 群的直和, 并且 $x,y\in M$. 又 M 是有限秩的幂零 p- 群, 其中心在 M 里具有有限指数, 于是 M 必是 Abel 群, 从而 P 也是 Abel 群, $G'=P\times R$ 是 Abel 群, $G^{(2)}=1$, 矛盾, 故 $G^{(2)}/G^{(3)}$ 肯定不是拟循环 p- 群.

前面讨论了某些最大 Abel 商群为局部循环群的可解群的结构, 由此可以自然地引申出这个问题的近似对偶: 换位子群为局部循环群的群具有怎样的结构? 对于幂零群, 我们可以得到如下的结论.

定理 8　设幂零群 G 的换位子群 G' 为局部循环群, 则

(i) 当 G' 是无挠群时, G' 是 G 的中心子群;

(ii) 当 G' 是可除挠群时, G' 是 G 的中心子群.

证明　我们只需证明对 G 的任意元素 x, G' 是 $H=\langle G',x\rangle$ 的中心子群.

(i) 当 xG' 是 G/G' 的无限阶元时, 容易验证 H 是 G 的无挠子群, H 的上中心列的商因子都是无挠的, 注意到 $G'\lhd H$, G' 与 H 的中心 $Z(H)$ 的交 $Z(H)\cap G'\neq 1$. 又 G' 是局部循环群, $G'/Z(H)\cap G'\cong Z(H)\cdot G'/Z(H)\leqslant H/Z(H)$ 是无挠群, 必有 $G'\leqslant Z(H)\cap G'$, G' 是 H 的中心子群. 当 xG' 是 G/G' 的有限阶元时, $H/G'=\langle xG'\rangle$ 是有限循环群. 记 $\pi=\{素数\,p\,|\,G'^p=G'\}$,则

$$\mathrm{Aut}\,(G')=\mathbb{Z}_2\oplus\left(\bigoplus_{p\in\pi}\mathbb{Z}\right),$$

故当 H 共轭地作用在 G' 上时, $H/C_H(G')\leqslant\mathbb{Z}_2$. 假设 $H/C_H(G')=\mathbb{Z}_2$, 则半直积 $H/C_H(G')\ltimes G'=\langle\overline{x},G'\rangle$, 其中 $\overline{x}$ 是 G' 的典型自同构, 即 $\overline{x}$ 把 G' 的每个元变为其逆元, 这时可以验证 $\langle\overline{x},G'\rangle$ 不是幂零的. 再注意到 $H/C_H(G')\ltimes G'=\langle\overline{x},G'\rangle\cong H/C_{\langle\overline{x}\rangle}(G')$, 它是幂零群, 这一矛盾表明 $H=C_H(G')$, G' 必是 H 的中心子群.

(ii) 当 G' 是可除挠群时, G' 是其 Sylow 子群的直和, $G'=\oplus G'_p$, 其中 G'_p 是拟循环 p- 群. 欲证 G' 是 H 的中心子群, 只需证每个 G'_p 是 H 的中心子群, 即证明 $K:=\langle G'_p,x\rangle$ 是 Abel 群即可. 假设 G'_p 不是 K 的中心子群. 考虑 K 在 G'_p 上的共轭作用, 根据文 [7] 知

$$K/C_K(G'_p)\leqslant\mathrm{Aut}\,G'_p\cong\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}_{p^\infty})\cong\mathbb{Z}_p^*=\begin{cases}\mathbb{Z}_2\oplus(1+2^2\mathbb{Z}_2), & p=2,\\ \mathbb{Z}_{p-1}\oplus(1+p\mathbb{Z}_p), & p\,\text{为奇素数},\end{cases}$$

其中 $\mathbb{Z}_p^*$ 为 p- 进整数环 $\mathbb{Z}_p$ 的单位乘法群, $\mathbb{Z}_2$ 为 2- 进整数群. 由于

$$K/C_K(G'_p)\ltimes G'_p=\langle\overline{x},{G'}_p\rangle\cong K/C_{\langle x\rangle}(G'_p)$$

是幂零群, 因而 $\langle\overline{x}\rangle\cong K/C_K(G'_p)$ 一定是无限循环群, 即 $C_{\langle x\rangle}(G')=1$, $K\cong\langle x\rangle\ltimes G'_p$, 其中 $\langle x\rangle$ 是无限循环群. 若 x^ia 是 K 的中心元, i 为整数, $a\in G'_p$, 则 x^ia 和 a 都属于 $C_K(G'_p)$, 从而 $x^i\in C_K(G'_p)$, 必须 $i=0$, 这表明 K 的中心 $Z(K)\leqslant G'_p$. 如果 $Z(K)=G'_p$, 则 $K/Z(K)\cong\langle x\rangle$, K 是其中心的循环扩张, K 必是 Abel 群, 矛盾. 由此得到 $Z(K)<G'_p$, 即 $Z(K)$ 是 G'_p 的有限子群. 记 $|Z(K)|=p^n$, K 的幂零类为 c, 则 K 的幂指数 $\exp(K)$ 整除 p^{cn}, 这是不可能的, 因此 G'_p 必是 K 的中心子群.

例 3 对 $n \geqslant 2$, 取 2^{n+1} 阶二面体群

$$D_{2^n} = \langle x,\, y \,|\, x^2 = y^{2^n} = 1,\, y^x = y^{-1} \rangle,$$

它的换位子群 $D'_{2^n} = \langle\, y^2 \,\rangle$ 不是 D_{2^n} 的中心子群. 这个群例表明当幂零群 G 的换位子群 G' 为有限循环群时, G' 不一定是 G 的中心子群.

定理 9 设局部幂零群 G 的换位子群 G' 是无挠的局部循环群, 则 G' 是 G 的中心子群, G 是幂零类为 2 的幂零群.

证明 显然只需证明 G' 是 G 的中心子群. 任取 $g \in G'$, $x \in G$, 我们要证 $H := \langle g,\, x \rangle$ 是 Abel 群. 事实上, 从 G 的局部幂零性知 H 是 2- 元生成的幂零群, H 的每个子群都是有限生成的, 从而 $G' \cap H$ 是 G' 的有限生成子群, 从条件知 $G' \cap H$ 是无限循环群, 又从

$$H/G' \cap H \cong HG'/G' = \langle g,\, x \rangle G'/G' = \langle x \rangle G'/G'$$

知 $H/G' \cap H$ 是循环群, 根据定理 8 的类似推理可得, $G' \cap H$ 是 H 的中心子群, 从而 H是 Abel 群.

定理 10 设 G 为局部幂零群, 其换位子群 G' 是可除的 2- 自由的局部循环群, 则 G' 是 G 的中心子群, G 是幂零类为 2 的幂零群.

证明 由条件知, G' 是其 Sylow p- 子群 P 的直和, $G' = \oplus P$, 其中 P 是拟循环 p- 群, p 为奇素数. 由文 [7] 知, 当 G 共轭地作用在 P 上时

$$G/C_G(P) \leqslant \mathrm{Aut}\, P \cong \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}_{p^\infty}) \cong \mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_{p-1} \oplus (1 + p\mathbb{Z}_p).$$

这里 $\mathbb{Z}_p^*$ 为 p- 进整数环 $\mathbb{Z}_p$ 的单位乘法群, 于是由 G 是局部幂零挠群知, $G/C_G(P) = 1$, $G = C_G(P)$, P 是 G 的中心子群, 进而 G' 是 G 的中心子群, G 是幂零类为 2 的幂零群.

下面的群例表明, 当局部幂零群 G 的换位子群 G' 为拟循环 2 - 群时, G' 不一定是 G 的中心子群.

例 4 取拟循环 2 - 群 $A = \mathbb{Z}_{2^\infty}$ 及其典型自同构 α, α 把 A 的每个元变成其逆元, α 是 A 的 2 阶自同构, 由此构造 $G = \langle \alpha \rangle \ltimes A$, 可以验证 G 是局部幂零的, 而 $G' = A$ 不是 G的中心子群.

参 考 文 献

[1] Robinson D. J. S., A course in the theory of groups, New York: Springer-Verlag, 1996.
[2] Khukhro E. I., Nilpotent groups and their automorphisms, Berlin, New York: Water de Gruyter, 1993.
[3] Fan Y., Weakly supersolvable groups, *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 1988, **9**(6): 713–723 (in Chinese).
[4] Liu H. G., Solvable groups of finite rank, *Adv. Math. China*, 2000, **29**(1): 55–60 (in Chinese).
[5] Segel D., Polycyclic groups, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983.
[6] Liu H. G., Solvable groups with breadth ≤ 2, *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 1998, **19**(3): 399–404 (in Chinese).
[7] Serre J. P., A course in arithmetic, New York: Springer-Verlag, 1973.