第50卷第4期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.50, No.4
2007年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Jul., 2007

文章编号: 0583-1431(2007)04-0781-08 **文献标识码:** A

一类不可分解 Banach 空间上线性算子的谱性质

苏维钢 钟怀杰

福建师范大学数学与计算机科学学院 福州 350007
E-mail: wgsu@fjnu.edu.cn

摘 要 给出一类不可分解的 Σ_e^1 型 Banach 空间上线性算子 (不一定有界) 的谱结构, 并讨论这种空间上生成 C_0 群或 C_0 半群的线性算子的有界性、特殊的谱性质和谱结构, 还给出这种空间上闭算子是有界算子的一个充分条件.

关键词 Σ_e^1 型 Banach 空间; 线性算子; 谱
MR(2000) 主题分类 46B26, 47A10
中图分类 O177.2

The Spectral Properties of Linear Operators on a Class of Indecomposable Banach Spaces

Wei Gang SU Huai Jie ZHONG

School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007*, P. R. China*
E-mail: wgsu@fjnu.edu.cn

Abstract We give the spectral structure of linear operators (not necessarily bounded) on a class of indecomposable Σ_e^1-type Banach spaces, discuss the boundedness, the special spectral properties and the special spectral structure of the linear operators which generate C_0-groups or C_0-semigroups on such spaces, and give a sufficient condition for a closed linear operator to be a bounded linear operator on such spaces.

Keywords Σ_e^1-type Banach space; linear operator; spectrum
MR(2000) Subject Classification 46B26, 47A10
Chinese Library Classification O177.2

1 引言及定义

自从 Gowers 和 Maurey 构造出第一例遗传不可分解的 Banach 空间 X_{GM} 以来, 随着一类所谓 G–M 型空间的问世, 许多 Banach 空间结构理论中的遗留问题得到了解决 [1–5]. G–M 系列成果的深入研讨, 已成为泛函分析空间理论中引人注目的前沿专题 [2–3]. 不仅如此, Banach 空间结构理论的新格局, 还极大地丰富了 Banach 空间上算子理论和算子代数 K 理论的研究内容 (见文献 [5–8]).

收稿日期: 2006-01-05; 接受日期: 2006-09-21
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10471025); 福建省自然科学基金资助项目 (Z0511019)

本文中, $B(X)$ 表示复数域 $\mathbf{C}$ 上无限维 Banach 空间 X 上的全体有界线性算子组成的 Banach 代数, X^* 表示 X 的对偶空间, $K(X)$ 表示 $B(X)$ 中所有紧算子组成的算子理想. X 上的恒等算子记为 I. $\mathbf{R}$ 表示实数域, $\mathbf{Z}$ 表示整数全体, $\mathbf{N}$ 表示正整数全体.

我们知道, 对于一般 Banach 空间上的线性算子 (不一定有界), 谱性质的研究已经有许多结果, 但关于谱结构问题, 至今仍然没有完全解决. 既然 Σ_e^1 型 Banach 空间是一类特殊的不可分解空间 (见文献 [6]), 自然就有必要探究其上的线性算子 (特别是有界线性算子) 的谱性质和谱结构有什么特殊性. 本文首先获得如下结果

主要结果一 设 X 是一个 Σ_e^1 型 Banach 空间, $T \in B(X)$, 那么

(1) T 的谱 $\sigma(T)$ 中存在唯一点 λ_T, 使 $T - \lambda_T I$ 是非本性算子, 且 $\sigma_e(T) = \{\lambda_T\}$.

(2) 若 λ_T 如 (1) 中的情况, 则 $T - \lambda_T I$ 是黎斯算子, 而且 λ_T 是 $\mathbf{C}$ 中使 $T - \lambda_T I$ 为黎斯算子的唯一的点. 特别地, $\sigma(T)$ 或是有限集或是由一个收敛到 λ_T 的特征值序列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 构成. 而且, $\sigma(T)\backslash\{\lambda_T\}$ 中的每一点都是 $\sigma(T)$ 中的孤立点, 且相应的谱投影 $E(\lambda, T)$ 都是有限秩的.

(3) T 是可分解算子.

主要结果一说明了 Σ_e^1 型 Banach 空间上有界线性算子具有特殊的谱性质和谱结构, 其中结果 (1) 和 (2) 是本文展开研究的基础.

主要结果二 设 X 是一个 Σ_e^1 型 Banach 空间, $(T, D(T))$ 是 X 中一个具有非空的预解集 $\rho(T) = \mathbf{C}\backslash\sigma(T)$ 的线性算子. 那么

(1) $\sigma(T)$ 或是一个有限集 (可能是空集), 或是由扩充复平面 $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ 中的一个收敛点列构成.

(2) 若 $\sigma(T)$ 是 $\mathbf{C}$ 的一个有界无限子集, 则 $T \in B(X)$,

其中结果 (1) 给出 Σ_e^1 型 Banach 空间上线性算子 (不一定有界) 的谱结构, 结果 (2) 给出这种空间上闭算子是有界算子的一个充分条件.

其次, 本文探究 Σ_e^1 型 Banach 空间上生成 C_0 群和 C_0 半群的线性算子有什么特殊性. 本文证明了 Σ_e^1 型 Banach 空间上 C_0 群的生成元 T 总是有界线性算子, 而且, 如果 C_0 群是多项式增长的, 那么对某个 $k \in \mathbf{N}$, $(T - \lambda_T I)^k$ 是紧算子, 并且 $(T - \lambda_T I)^k$ 是有限秩算子当且仅当 $\sigma(T)$ 是有限集.

但对 Σ_e^1 型 Banach 空间上 C_0 半群, 结果有些不同. 本文举例说明 Σ_e^1 型 Banach 空间上 C_0 半群的生成元不必是有界的, 并且给出这种空间上任何 C_0 半群的生成元的谱结构.

定义 1.1[1] Banach 空间 X 称为是不可分解的, 如果 X 不能表示成两个无限维闭子空间 M 和 N 的拓扑直和. 不可分解空间类记为 I.

定义 1.2[1] Banach 空间 X 称为是遗传不可分解的, 如果 X 的每个无限维闭子空间都是不可分解的. 遗传不可分解空间类记为 $H.I$.

定义 1.3[9] Banach 空间 X 称为是商遗传不可分解的, 如果 X 的每个 QS- 空间都是不可分解的, 这里 X 的 QS- 空间是指 Y/Z, 其中 $Z \subset Y \subset X$, 且 $\dim(Y/Z) = \infty$. 商遗传不可分解空间类记为 $Q.H.I$.

定义 1.4[7] Banach 空间 X 称为是商不可分解的, 如果 X 的每个无限维商空间都是不可分解的. 商不可分解空间类记为 $Q.I$.

由文献 [7–8] 知

$$I. \supset \left\{ \begin{array}{c} H.I. \\ Q.I. \end{array} \right\} \supset Q.H.I.$$

而且其中各包含关系都是真包含. 我们把 $H.I.$, $Q.I.$ 和 $Q.H.I.$ 称为是具有某种不可分解性质的 G–M 型空间. 在文献 [9] 中 Ferenczi 证明了文献 [1] 中所构造的 $H.I.$ 空间 X_{GM} 和它的共轭空间 X_{GM}^* 两者都是自反的 $Q.H.I.$ 空间. 在文献 [7] 中有例子说明 $H.I.$ 和 $Q.I.$ 彼此互不包含.

定义 1.5[6] Banach 空间 X 称为是一个 Σ_e^1 型空间, 如果对每一个 $T \in B(X)$, T 的本性谱 $\sigma_e(T)$ 是单点集, 其中 $\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} : \lambda I - T \notin \Phi(X)\}$, $\Phi(X)$ 为 X 上的 Fredholm 算子类. Σ_e^1 型 Banach 空间类记为 Σ_e^1.

由文献 [6] 知

$$I. \supset \Sigma_e^1 \supset \left\{ \begin{array}{c} H.I. \\ Q.I. \end{array} \right\} \supset Q.H.I.$$

而且其中各包含关系都是真包含. Σ_e^1 型空间是不可分解空间, 它有许多性质和若干特征, 详见文献 [6].

定义 1.6[10] 设 X 为 Banach 空间, $T(t) \in B(X)$, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ 称为是一个 C_0 半群 (即强连续半群), 如果 $T(0) = I$, 对任意 $t, s \geq 0$, 有 $T(t+s) = T(t)T(s)$, 且对任意 $x \in X$, 有 $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$. 记

$$D(A) = \Big\{x \in X : \lim_{t\to 0^+} (T(t)x - x)/t \text{ 存在}\Big\},$$

定义 $Ax = \lim_{t\to 0^+}(T(t)x - x)/t$, 这时定义在 $D(A)$ 上的线性算子 A 称为 C_0 半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ 的生成元. 这时 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ 常记为 $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$. 称 C_0 半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ 是一致有界的, 如果存在常数 $M > 0$, 使得对任意 $t \geq 0$, 有 $\|T(t)\| \leq M$. 如果对每个 $t_0 \geq 0$, 都有 $\lim_{t\to t_0} \|T(t) - T(t_0)\| = 0$, 则称 C_0 半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ 是一致连续的.

定义 1.7[10] 设 X 为 Banach 空间, $T(t) \in B(X)$, $\{T(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ 称为是一个 C_0 群, 如果 $T(0) = I$, 对任意 $t, s \in \mathbf{R}$, 有 $T(t+s) = T(t)T(s)$, 且对任意 $x \in X$, 有 $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$. 记

$$D(A) = \Big\{x \in X : \lim_{t\to 0}(T(t)x - x)/t \text{ 存在}\Big\},$$

定义 $Ax = \lim_{t\to 0}(T(t)x - x)/t$, 这时定义在 $D(A)$ 上的线性算子 A 称为 C_0 群 $\{T(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ 的生成元. 这时 $\{T(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ 常记为 $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbf{R}}$.

定义 1.8[10] 设 X, Y 是两个复赋范线性空间, T 为 X 中到 Y 中的一个线性算子, $D(T) \subset X$. 如果 $R(T) = Y$, 且 T 的逆算子 T^{-1} 存在而且是一个有界线性算子, 则称 T 为正则算子, 其中 $D(T)$ 表示 T 的定义域, $R(T)$ 表示 T 的值域.

定义 1.9[10] 设 X 是一个复赋范线性空间, T 是 $D(T) \subset X$ 到 X 中的一个线性算子, $\lambda \in \mathbf{C}$, 如果 $\lambda I - T$ 是正则算子, 则称 λ 是 T 的一个正则点, 并称 $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$ 为 T 的预解算子. 如果复数 λ 不是 T 的正则点, 则称 λ 为 T 的谱点. 复平面上 T 的正则点全体记为 $\rho(T)$, 把 $\rho(T)$ 称为 T 的正则点集 (或预解集). 复平面上 T 的谱点全体记为 $\sigma(T)$, 把 $\sigma(T)$ 称为 T 的谱.

定义 1.10[11] 设 $\Omega \subset \mathbf{C}$, $e_n : z \longrightarrow z^n$, $z \in \Omega$, $n \geq 0$, $\mathcal{F}$ 是一个由定义在 Ω 上的某些复值函数构成的 Banach 代数, 且使 $e_n \in \mathcal{F}$ $(n \geq 0)$. 设 X 是一个 Banach 空间, $T \in B(X)$ 称为具

有 $\mathcal{F}$ 函数演算, 如果存在一个 Banach 代数同态 $\Phi:\mathcal{F}\longrightarrow B(X)$, 使得 $\Phi(e_0)=I$ 和 $\Phi(e_1)=T$.

定义 1.11[5] 设 X 是一个 Banach 空间, 称 $T\in B(X)$ 为非本性算子, 如果对任意 $A\in B(X)$, $T+A\in\Phi(X)$. X 上非本性算子全体记为 $\mathrm{In}\,(X)$.

定义 1.12[5] 设 X 是一个 Banach 空间, 称 $T\in B(X)$ 为 Riesz 算子 (黎斯算子), 如果对任意 $0\neq\lambda\in\mathbf{C}$, $T-\lambda I\in\Phi(X)$. X 上 Riesz 算子全体记为 $R(X)$.

由文献 [5] 知 Banach 空间 X 上非本性算子全体构成一个算子理想, 而且 $\mathrm{In}\,(X)\subset R(X)$.

2 结果及其证明

引理 2.1[6] 设 X 是一个 Σ_e^1 型 Banach 空间, 则 $B(X)=\{\lambda I+S:\lambda\in\mathbf{C}, S\in\mathrm{In}\,(X)\}$, 这里 $\mathrm{In}\,(X)$ 表示 X 上非本性算子理想.

定理 2.2 设 X 是一个 Σ_e^1 型 Banach 空间, $T\in B(X)$, 那么

(1) T 的谱 $\sigma(T)$ 中存在唯一点 λ_T, 使 $T-\lambda_T I$ 是非本性算子, 且 $\sigma_e(T)=\{\lambda_T\}$. 这时把 λ_T 称为 T 的奇异值.

(2) 若 λ_T 如 (1) 中的情况, 则 $T-\lambda_T I$ 是黎斯算子, 而且 λ_T 是 $\mathbf{C}$ 中使 $T-\lambda_T I$ 为黎斯算子的唯一的点. 特别地, $\sigma(T)$ 或是有限集或是由一个收敛到 λ_T 的特征值序列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 构成. 而且, $\sigma(T)\backslash\{\lambda_T\}$ 中的每一点都是 $\sigma(T)$ 中的孤立点, 且相应的谱投影 $E(\lambda,T)$ 都是有限秩的.

(3) T 是可分解算子.

证明 由引理 2.1, 存在 $\lambda_T\in\sigma(T)$, 使 $S=T-\lambda_T I$ 是非本性算子. 因为非本性算子都是黎斯算子, 所以 $T-\lambda_T I$ 是黎斯算子, 从而 $\sigma_e(T-\lambda_T I)=\{0\}$, 即 $\sigma_e(T)=\{\lambda_T\}$. 若 $\mu\in\mathbf{C}$ 且 $R=T-\mu I$ 也是黎斯算子, 则 $R-S=(\lambda_T-\mu)I$ 是黎斯算子 (见文献 [11, 定理 3.5 和 3.12]). 这就推出 $\mu=\lambda_T$, 从而说明 (1) 和 (2) 中 λ_T 的唯一性. 由黎斯算子的谱理论 [11] 即知 (2) 成立.

由 (2) 知 $\sigma(T)$ 是完全不连通的, 所以由文献 [12, 定理 1.19 和例 1.20] 知 (3) 成立. 证毕.

一般地, 设线性算子 T(不一定有界) 定义在 X 的一个子空间 $D(T)$ 上, 由定理 2.2 可以得到如下关于算子 T 的谱 $\sigma(T)\subset\mathbf{C}$ 的构成.

定理 2.3 设 X 是一个 Σ_e^1 型 Banach 空间, $(T,D(T))$ 是 X 中一个具有非空预解集 $\rho(T)=\mathbf{C}\backslash\sigma(T)$ 的线性算子, 那么 $\sigma(T)$ 或是一个有限集 (可能是空集), 或是由扩充复平面 $\mathbf{C}_\infty=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ 中的一个收敛点列构成.

证明 既然 $\rho(T)\neq\emptyset$, 线性算子 $(T,D(T))$ 就是闭算子. 若 $D(T)=X$, 则由闭图象定理知 T 是有界的, 从而由定理 2.2 知, $\sigma(T)$ 或是一个有限集或是由一个收敛到 λ_T 的特征值序列构成 (这里 λ_T 是 T 的奇异值). 若 $D(T)\neq X$, 则选取 $\mu\in\rho(T)$, 使 $R(\mu,T)=(\mu I-T)^{-1}\in B(X)$. 同样由定理 2.2 知 $R(\mu,T)$ 的谱

$$\sigma(R(\mu,T))=\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\{\lambda_{R(\mu,T)}\},$$

其中 μ_n 是 $R(\mu,T)$ 的特征值, $\lambda_{R(\mu,T)}$ 是 $R(\mu,T)$ 的奇异值. 由谱映射定理 (见文 [13, III. 6.15]) 及上述假定 $D(T)\neq X$, 有

$$\sigma(R(\mu,T))=\{0\}\cup\{(\mu-\lambda)^{-1}:\lambda\in\sigma(T)\}.$$

由定理 2.2 知有界线性算子 $R(\mu,T)$ 的唯一的奇异值 $\lambda_{R(\mu,T)}$ 必须为 0. 否则 0 就是可逆算子 $R(\mu,T)$ 的一个特征值. 这是不可能的. 因为算子 $R(\mu,T)$ 的特征值对应于 $(T,D(T))$ 的特征值,

所以 $\mu_n = (\mu - \lambda_n)^{-1}$, 其中 λ_n 为 T 的特征值. 从而当 $\mu_n \longrightarrow 0 = \lambda_{R(\mu,T)}$ 时, $\lambda_n \longrightarrow \infty$. 证毕.

评注 2.4 因为算子 $R(\mu,T)$ 的特征值对应于 $(T,D(T))$ 的特征值, 所以由定理 2.2 知 $\sigma(T)$ 中除至多一个点外都是 T 的具有有限重数的特征值. 如果 T 是无界算子, 那么 $\sigma(T)$ 中所有点都是 T 的具有有限重数的特征值.

由闭算子的谱映射定理和定理 2.2, 立即得到如下关于闭算子是有界算子的一个充分条件.

定理 2.5 设 X 是一个 Σ_e^1 型 Banach 空间, $(T,D(T))$ 是 X 中的一个线性算子, 且 $\rho(T) \neq \emptyset$. 若 $\sigma(T)$ 是 $\mathbf{C}$ 的一个有界无限子集, 则 $T \in B(X)$.

评注 2.6 存在某个 Σ_e^1 型 Banach 空间中的一个闭稠定算子 T, 使 $\sigma(T) = \mathbf{C}$, 这时 $\sigma(T)$ 就是一个无界无限集. 事实上, 设 X 是一个具有 Schauder 基 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的 $H.I.$ 空间 (例如, 取 X 为文献 [1] 中所构造的空间 X_{GM}). 令 $Y = \overline{\operatorname{span}}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, 即 Y 是 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的闭线性张, 那么 Y 也是一个 $H.I.$ 空间, 当然 Y 为一个 Σ_e^1 型空间. 任取 $\mathbf{C}$ 中的一个稠密数列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. 定义 Y 中的一个线性算子 T 为

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n e_n,$$

其定义域为

$$D(T) = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in Y : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n e_n \in Y\right\}.$$

容易验证算子 $(T,D(T))$ 是闭稠定的, 且 $\sigma(T) = \mathbf{C}$.

进一步地, 若 $(T,D(T))$ 是 Σ_e^1 型 Banach 空间 X 上 C_0 半群 $\{e^{tT}\}_{t\geq 0}$ 的生成元, 则定理 2.2 可以得到改进 (见下面的定理 2.8). 首先需要如下引理. 对实数 $a < b$, 记 $S_{a,b} = \{\lambda \in \mathbf{C} : a \leq \operatorname{Re}\lambda \leq b\}$, 其中 $\operatorname{Re}\lambda$ 表示 $\lambda \in \mathbf{C}$ 的实部, $\operatorname{Im}\lambda$ 表示 $\lambda \in \mathbf{C}$ 的虚部.

引理 2.7 设 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $S_{a,b}$ 中的一个数列, 使 $\lim_{n\to\infty} |\operatorname{Im}\lambda_n| = +\infty$. 那么存在 $t > 0$, 使 $\{e^{t\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 有无限多个聚点.

证明 不妨假设对任意 $n \geq 1$ 有 $o \leq \operatorname{Im}\lambda_n$. 令 $J = [0,1]$, 取 $[0,2\pi]$ 中的一个稠密数列 $\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$. 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 表示整个集族 $B_{m,k} = \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} : s \in q_m + [0,k^{-1}],\, e^a \leq r \leq e^b\}$, $m,k \in \mathbf{N}$. 只要证明存在 $t > 0$ 和一个子列 $\{\lambda_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, 使 $e^{t\lambda_{n(k)}} \in A_k$ $(k \geq 1)$, 那么引理 2.7 就成立.

先取 $n(1) \in \mathbf{N}$, 使得 $A_1 \subset \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} : s \in (\operatorname{Im}\lambda_{n(1)})J,\, e^a \leq r \leq e^b\}$. 设 $J_1 \subset J$ 是一个闭区间, 使 $A_1 = \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} : s \in (\operatorname{Im}\lambda_{n(1)})J_1,\, e^a \leq r \leq e^b\}$. 由归纳法, 可以得到 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子列 $\{\lambda_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 和一个闭区间列 $J \supset J_1 \supset J_2 \supset \cdots$, 使得

$$A_k = \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} : s \in (\operatorname{Im}\lambda_{n(k)})J_k,\, e^a \leq r \leq e^b\}, \quad k \geq 1.$$

任取 $t \in \bigcap_{k\geq 1} J_k$, 那么 $e^{t\lambda_{n(k)}} \in A_k$, $k \geq 1$. 证毕.

定理 2.8 设 X 是一个 Σ_e^1 型 Banach 空间, $(T,D(T))$ 是 X 上 C_0 半群 $\{e^{tT}\}_{t\geq 0}$ 的生成元. 那么 $\sigma(T)$ 或是有限集 (可能是空集), 或是由一个数列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 构成, 其中数列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 或收敛到某个 $\lambda \in \mathbf{C}$, 或满足 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\lambda_n = -\infty$. 特别地, 若算子 $(T,D(T))$ 生成一个 C_0 群, 那么 $\sigma(T)$ 是 $\mathbf{C}$ 中的一个有界子集.

证明 由文献 [10, 1.5.4] 知存在 w$\in \mathbf{R}$, 使 $\{\lambda \in \mathbf{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq w\} \subset \rho(T)$. 由定理 2.3 知, $\sigma(T)$ 或是一个有限集 (可能是空集), 或是由扩充复平面 $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ 中的一个收敛点列构成. 因

此下面只要证明当 $\sigma(T)$ 是由一个无界数列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 构成时, 有 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}\,\lambda_n=-\infty$. 任取 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$. 假设 $M=S_{a,b}\cap\sigma(T)$ 是一个无限集. 由引理 2.7, 存在 $t>0$, 使得 e^{tM} 有无限多个聚点. 由文献 [10, 2.2.3] 的谱包含定理 $e^{t\sigma(T)}\subset\sigma(e^{tT})$ 知, $\sigma(e^{tT})$ 也有无限多个聚点. 但 $e^{tT}\in B(X)$, 这与定理 2.2(2) 矛盾. 因此, $S_{a,b}\cap\sigma(T)$ 总是有限集, 从而 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}\,\lambda_n=-\infty$.

特别地, 如果 $(T,D(T))$ 生成一个 C_0 群, 那么存在 $w>0$, 使 $\sigma(T)\subset S_{-w,w}$ (见文 [10, 1.5.4 和 22 页]). 由上述可知 $\sigma(T)$ 是一个有界集. 证毕.

对于 C_0 群的生成元, 有如下更好的结果.

定理 2.9 设 X 是一个 Σ_e^1 型 Banach 空间, $(T,D(T))$ 是 C_0 群 $\{e^{tT}\}_{t\in\mathbf{R}}$ 的生成元, 则 $T\in B(X)$.

证明 由定理 2.2, 对每个 $t\in\mathbf{R}$, 算子 e^{tT} 是可逆的, 且 $\sigma(e^{tT})$ 是至多可数集. 因此对每个 $t\in\mathbf{R}$, 点 0 在 $\rho(e^{tT})$ 的无界连通分支中. 由文献 [14, 命题 3.1] 知, 算子 T 是有界的当且仅当 $\sigma(T)$ 是有界集. 由定理 2.8 即知 $T\in B(X)$. 证毕.

设 X 是一个 Banach 空间. 称 $T\in B(X)$ 生成一个 (必是一致连续的) $k\in\mathbf{N}$ 阶多项式增长的 C_0 群 $\{e^{tT}\}_{t\in\mathbf{R}}$, 如果当 $|t|\to\infty$ 时, $\|e^{tT}\|=o(|t|^k)$. 称 C_0 群 $\{e^{tT}\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是多项式有界的, 如果有某个 $k\in\mathbf{N}$, 当 $|t|\to\infty$ 时, $\|e^{tT}\|=o(|t|^k)$. 这时, 由文献 [12, 160 页] 知 $\sigma(T)\subset i\mathbf{R}$.

引理 2.10 设 X 是一个 Banach 空间, $T\in B(X)$, 且 $\sigma(T)=\{0\}$. 若 C_0 群 $\{e^{tT}\}_{t\in\mathbf{R}}$ 有增长阶 $k\in\mathbf{N}$, 那么 $T^k=0$.

引理 2.10 是文献 [14, 定理 3.5] 的特殊情况.

设 X 是一个 Banach 空间. 如同文献 [15], $l^{\infty}(X)$ 表示有界 X- 值序列全体赋予上确界范数后而成的 Banach 空间, $pc(X)$ 表示 $l^{\infty}(X)$ 中准紧序列 (即每个子列都存在收敛子列的序列) 全体所组成的闭子空间, X_{pc} 表示商空间 $l^{\infty}(X)/pc(X)$. 对每个 $T\in B(X)$, 诱导出 X_{pc} 上的一个有界线性算子 $T_{pc}\in B(X_{pc})$, 其定义为

$$T_{pc}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}+pc(X))=\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}+pc(X),$$

其中 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^{\infty}(X)$. 那么线性映射 $\phi: B(X)\to B(X_{pc})$, $T\to T_{pc}$ 满足下列性质:

(i) $\|\phi\|\le 1$.

(ii) $\mathrm{Ker}\,\phi=K(X)$, 其中 $K(X)$ 表示 X 上的紧算子空间.

(iii) 当 T 是黎斯算子时, $\sigma(T_{pc})=\{0\}$.

定理 2.11 设 X 是一个 Σ_e^1 型 Banach 空间, $T\in B(X)$. 若 C_0 群 $\{e^{tT}\}_{t\in\mathbf{R}}$ 有增长阶 $k\in\mathbf{N}$, 则 $(T-\lambda_T I)^k$ 是紧算子. 特别地, 如果 C_0 群 $\{e^{tT}\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是一致有界的, 那么 $T-\lambda_T I$ 是紧算子.

证明 设 $S=T-\lambda_T I$. 因为 $\lambda_T\in\sigma(T)\subset i\,\mathbf{R}$, 所以 C_0 群 $\{e^{tS}\}_{t\in\mathbf{R}}$ 也有增长阶 $k\in\mathbf{N}$, 而且 S 是个黎斯算子. 设 X_{pc} 为如上所述的空间, $S_{pc}\in B(X_{pc})$ 为 $S\in B(X)$ 所诱导出的算子. 显然 $e^{tS_{pc}}=(e^{tS})_{pc}$. 因此, 由上述性质 (i) 知 S_{pc} 也生成一个增长阶为 $k\in\mathbf{N}$ 的 C_0 群. 由性质 (iii) 得 $\sigma(S_{pc})=\{0\}$. 由引理 2.10 得 $S_{pc}^k=0$, 从而由性质 (ii) 得 $S^k=(T-\lambda_T I)^k$ 是紧算子. 因为一致有界的 C_0 群必是增长阶为 1 的 C_0 群. 所以, 特别地, 当 C_0 群 $\{e^{tT}\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是一致有界时, $T-\lambda_T I$ 是紧算子. 证毕.

定理 2.12 设 X 是一个 Σ_e^1 型 Banach 空间, $T\in B(X)$. 若 C_0 群 $\{e^{tT}\}_{t\in\mathbf{R}}$ 有增长阶 $k\in\mathbf{N}$, 则下列命题是等价的.

(1) $\sigma(T)$ 是有限集.

(2) $(T-\lambda_T I)^k$ 是有限秩算子.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $\sigma(T)=\{\lambda_T\}\cup\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$. 设 P 是 T 的孤立谱点 $\{\lambda_T\}$ 所对应的谱投影, 那么 $T(PX)\subset PX$, 且 $\sigma(T|_{PX})=\{\lambda_T\}$. 因为由 $T|_{PX}$ 生成的 C_0 群有增长阶 k, 所以由引理 2.10 知 $(T-\lambda_T I)^k|_{PX}=0$. 又因为 $\dim(\operatorname{Ker}P)<\infty$ 且 $T(\operatorname{Ker}P)\subset\operatorname{Ker}P$, 所以 $T|_{\operatorname{Ker}P}$ 是有限秩算子. 在 $X=PX\oplus\operatorname{Ker}P$ 上 $(T-\lambda_T I)^k$ 可表示成算子矩阵形式

$$(T-\lambda_T I)^k=\begin{pmatrix}(T-\lambda_T I)^k|_{PX} & 0\\ 0 & (T-\lambda_T I)^k|_{\operatorname{Ker}P}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & (T-\lambda_T I)^k|_{\operatorname{Ker}P}\end{pmatrix},$$

从而 $(T-\lambda_T I)^k$ 是有限秩算子. 故 (1) $\Rightarrow$ (2) 成立.

(2) $\Rightarrow$ (1) 显然成立. 证毕.

设 X 是一个 Banach 空间. 由文献 [12] 知, 一个可逆算子 $T\in B(X)$ 称为是 $k\in\mathbf{N}$ 阶多项式有界的, 如果当 $n\in\mathbf{Z}$, $|n|\longrightarrow\infty$ 时, $\|T^n\|=o(|n|^k)$. 特别当 X 是一个 Σ_e^1 型 Banach 空间时, 对一个可逆算子 $T\in B(X)$, 因为 $\sigma(T)$ 是可数的, 所以利用通常的 Dunford 解析演算, 可以定义算子 $A=\log_e T$, 从而离散群 $\{T^n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 总可以嵌入到 C_0 群 $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbf{R}}$. 而且可逆算子 T 是 k 阶多项式有界的当且仅当 C_0 群 $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是 k 阶多项式有界的. 由文献 [12] 知, 如果一个算子 $T\in B(X)$ 生成一个 $k\in\mathbf{N}$ 阶多项式增长的 C_0 群 $\{e^{tT}\}_{t\in\mathbf{R}}$ (即当 $|t|\longrightarrow\infty$ 时, $\|e^{tT}\|=o(|t|^k)$), 那么 T 有一个连续的 $C^{k+2}(i\mathbf{R})$ 函数演算. 同样地, 如果 $T\in B(X)$ 是可逆的而且是 $k\in\mathbf{N}$ 阶多项式有界的, 那么 T 有一个连续的 $C^{k+2}(\Gamma)$ 函数演算, 其中 $\Gamma=\{z\in\mathbf{C}:|z|=1\}$. 因此由定理 2.11 自然提出这样的问题：如果 X 是一个 Σ_e^1 型 Banach 空间, $T\in B(X)$ 具有一个连续的 $C^m(\mathbf{C})$ 函数演算, 那么问是否必存在某个 $r\in\mathbf{N}$, 使得 $(T-\lambda_T I)^r$ 是紧算子? 其中连续的 $C^m(\mathbf{C})$ 函数演算的定义见文献 [16]. 下面的结果是对这个问题肯定的回答.

定理 2.13 设 X 是一个 Σ_e^1 型 Banach 空间, 若对某个整数 $m\geq 0$, $T\in B(X)$ 有一个连续 $C^m(\mathbf{C})$ 函数演算, 则 $(T-\lambda_T I)^{m+1}$ 是紧算子.

证明 设 $\Phi: C^m(\mathbf{C})\longrightarrow B(X)$ 是 T 的一个连续 $C^m(\mathbf{C})$ 函数演算. 令 $\Psi:\phi\longrightarrow\Phi(\phi)+K(X)$, $\phi\in C^m(\mathbf{C})$, 则 Ψ 是 $C^m(\mathbf{C})$ 到 Calkin 代数 $B(X)/K(X)$ 的一个连续代数同态. 由支集定理 (见文献 [17, 定理 2.15]), 得

$$\operatorname{supp}(\Psi)=\sigma(T+K(X))=\sigma_e(T))=\{\lambda_T\}.$$

设 $(B(X)/K(X))^*$ 表示 $B(X)/K(X)$ 的连续对偶空间. 对每个 $\xi\in(B(X)/K(X))^*$, 映射 $\phi\longrightarrow\langle\Psi(\phi),\xi\rangle$ 是一个阶数不超过 m 的广义函数且支集为 $\{\lambda_T\}$, 其中 $\phi\in C^m(\mathbf{C})$. 因此, 由文献 [16–17] 知

$$\langle\Psi(\phi),\xi\rangle=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(D^\alpha\phi)(\lambda_T),\quad \phi\in C^\infty(\mathbf{C})\cong C^\infty(\mathbf{R}^2),$$

其中系数 $a_\alpha\in\mathbf{C}$ 依赖于 ξ 但与 ϕ 无关. 从而对每个 $\xi\in(B(X)/K(X))^*$,

$$\langle(T-\lambda_T I)^{m+1}+K(X),\xi\rangle=\langle\Psi((I_{\mathbf{C}}-\lambda_T)^{m+1}),\xi\rangle=0,$$

其中 $I_{\mathbf{C}}$ 表示 $\mathbf{C}$ 上的恒等函数, 即 $I_{\mathbf{C}}(z)=z$, $z\in\mathbf{C}$, 所以 $(T-\lambda_T I)^{m+1}\in K(X)$. 证毕.

Lotz 在文献 [18] 中已证明: 在具有 Dunford–Pettis 性质的 Grothendieck 空间上的 C_0 半群的生成元必是有界的. 本文定理 2.9 证明了在 Σ_e^1 型 Banach 空间上的 C_0 群的生成元必是有界

的. 因此自然要问: 在 Σ_e^1 型 Banach 空间上的 C_0 半群的生成元是否必有界? 以下例子说明答案是否定的.

例 2.14 设 X 是一个具有 Schauder 基 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的 $H.I.$ 空间 (例如, 取 X 为文献 [1] 中所构造的空间 X_{GM}). 令 $Y=\overline{\operatorname{span}}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, 即 Y 是 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的闭线性张, 那么 Y 也是一个 $H.I.$ 空间, 当然 Y 为一个 Σ_e^1 型 Banach 空间. 在 Y 上定义算子 T 为

$$T\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k\bigg)=\sum_{k=1}^{\infty}(-k\alpha_k)e_k,$$

其定义域为

$$D(T)=\bigg\{\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k\in Y:\sum_{k=1}^{\infty}(-k\alpha_k)e_k\in Y\bigg\}.$$

由文献 [19, 定理 1.5.2] 知, $(T,D(T))$ 生成一个 C_0 半群. 但显然 T 是 $D(T)$ 上的无界算子.

参考文献

[1] Gowers W. T., Maurey B., The unconditional basic sequence problem, *J. Amer. Math. Soc.*, 1993, **6**(3): 851–874.

[2] Johnson W. B., Lindenstrauss J. eds., Handbook of the Geometry of Banach spaces, Volume 1, Amsterdam: Elsevier, 2001.

[3] Maurey B., Banach spaces with few operators, Handbook of the Geometry of Banach spaces, Volume 2, 1247–1298, Amsterdam: North-Holland, 2002.

[4] Zhong H. J., Significant developments in the structural theory of Banach spaces based on the series of results by Gowers and Maurey, *Adv. Math.*, 2000, **29**(1): 1–18 (in Chinese).

[5] Zhong H. J., Structure of Banach spaces and operator ideals, Beijing: Science Press, 2005 (in Chinese).

[6] Gonzalez M., Herrera J. M., Spaces on which the essential spectrum of all the operators is finite, *J. Operator Theory*, 2005, **53**(2): 303–314.

[7] Zhong H. J., Chen D. X., Chen J. L., Some G–M-type Banach spaces and K-groups of operator algebras on them, *Science in China, Ser. A,* 2004, **47**(3): 372–392.

[8] Zhang Y. N., Zhong H. J., Su W. G., On K_0-groups of operator algebras on Banach spaces, *Science in China, Ser. A,* 2006, **49**(2): 233–244.

[9] Ferenczi V., Quotient hereditarily indecomposable Banach spaces, *Canad. J. Math.*, 1999, **51**(3): 566–581.

[10] Pazy A., Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, New York: Springer-Verlag, 1983.

[11] Dowson H. R., Spectral theory of linear operators, New York: London Math. Soc. Monograph, No. 12, 1978.

[12] Colojoara I., Foias C., Theory of generalized spectral operators, New York: Gordon and Breach, 1968.

[13] Kato T., Perturbation theoroy for linear operators, New York: Springer-Verlg, 1976.

[14] Nagel R., Huang S., Spectral mapping theorems for C_0-groups satisfying non-quasianalytic growth conditions, *Math. Nachr.*, 1994, **169**(2): 207–218.

[15] Buoni J. J., Harte R., Wickstead T., Upper and lower Fredholm spectra, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1977, **66**(2): 309–314.

[16] Albrecht E., Vasilescu E. H., Non-analytic local spectral properties in several variables, *Czechoslovak Math. J.*, 1974, **24**(2): 430–443.

[17] Albrecht E., Funktionalkalküle in mehreren veränderlichen für stetige lineare operatoren auf Banachräumen, *Manuscripta Math.*, 1974, **14**(1): 1–40.

[18] Lotz H. P., Uniform convergence of operators on L^{∞} and similar spaces, *Math. Z.*, 1985, **190**(2): 207–220.

[19] Van Neerven J., The adjoint of a semigroup of linear operators, New York: Springer-Verlag, 1992.