文章编号: 0583-1431(2007)04-0797-04 **文献标识码: A**

关于图的基本群的正规子群的指数

周 伟

西南大学数学与统计学院 重庆 400715
E-mail: zh_great@swu.edu.cn

施武杰

苏州大学数学学院 苏州 215006
E-mail: wjshi@suda.edu.cn

摘 要 本文主要研究图的基本群的正规子群的指数何时成为任意正整数的条件. 主要讨论的群类有：有限生成的无扭幂零群、自由群、多重无限循环群等.

关键词 广义自由积; 树积; 基本群
MR(2000) 主题分类 20E06, 20F16
中图分类 O152

On the Index of the Normal Subgroups of Fundamental Groups of Graph

Wei ZHOU

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715*, P. R. China*
E-mail:zh_great@swu.edu.cn

Wu Jie SHI

School of Mathematics, Soochow University, Suzhou 215006*, P. R. China*
E-mail: wjshi@suda.edu.cn

Abstract In this paper, we study the condition which makes the fundamental group of graph have every positive integer as the index of some normal subgroup. We discuss the following group classes: finitely generated torsion-free nilpotent groups, free groups, polycyclic groups.

Keywords generalized free product; tree product; fundamental group
MR(2000) Subject Classification 20E06, 20F16
Chinese Library Classification O152

1 预备知识

一般说来, 一个群中的正规子群的指数并不能是任意的数, 本文将会讨论这样的群. 我们知道剩余有限群 G 的有限指数的正规子群很多, 但这并不能保证对于任意正整数 n, 都有 $N \lhd G$,

收稿日期: 2005-10-10; 接受日期: 2006-11-05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10571128);
重庆市自然科学基金资助项目 (CSTC: 2005BB8096); 西南大学博士基金资助项目 (SWNUB2005023)

满足 $|G/N| = n$. 比如 Z_{p^∞}, 它的子群都是有限循环群. 于是没有有限的指数的真正规子群. 但是对于无限循环群 $\langle x\rangle$ 来说, 情况恰好相反, 对于任意有限的正整数 n, 都有 $|\langle x\rangle/\langle x^n\rangle| = n$.

首先给出图的基本群 (Fundamental group of graph) 的定义. 这个定义可以在文 [1] 中得到.

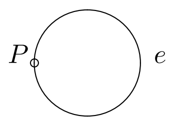
定义 1.1 令 $\Gamma = (V, E)$ 是一个连通图 (Graph), 它的顶点集合是 V, 边集合是 E. 对于每个顶点 $v \in V$ 对应一个群 G_v, 对于每个边 $e \in E$ 也对应一个群 G_e, 而 α_e, β_e 是单同态映射, 通过它们把 G_e 嵌入到边 e 的两个顶点对应的群中去. 设 T 是 Γ 的极大树 (Maximal tree of Γ). 那么图 Γ 的基本群 (Fundamental group of graph Γ) G 就是由下面表现 (Presentation) 所确定：G 的生成元 (Generator) 是所有 G_v 的生成元, 再附加 $t_e, e \in E$, G 定义关系 (Relation) 是所有 G_v 的定义关系, 再加上如下的关系

$$t_e^{-1}\alpha_e(g_e)t_e = \beta_e(g_e), \quad g_e \in G_e,$$

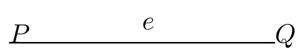
以及对于任意树 T 中的边 e 有 $t_e = 1$.

由文 [1], 我们知道图的基本群与图的极大图 T 的选取无关, 不同的极大图所得到的基本群都是同构的.

若 Γ 是 loop, 我们就得到了 HNN- 扩张 (HNN-extension) 的定义



如果 Γ 是线段, 即有两个顶点, 一条边时



就得到广义自由积 (Generalized free product) 的定义.

如果 Γ 是一个树, 相应地就得到了树积 (Tree product) 的定义.

一个图的基本群可以由以下的程序得到：首先得到 Γ 的极大树 T, 由这个树的树积得到一个群 A, 然后再作 HNN- 扩张 (见文 [1]). 对于 HNN- 扩张 $G = \langle A, t; t^{-1}Ht = K\rangle$, 我们可以得到 G 的一个同态像 $\overline{G} = \langle t\rangle$, 它是一个无限循环群. 因此对于基本群的正规子群指数的研究就只需要考虑树积的情况.

对于广义自由积以及树积, 以往比较多讨论它们的剩余性质和可分性质, 见文 [2–3]. 但是对于一个剩余有限的群, 虽然我们可以找到许多的指数有限的正规子群, 可是并不能保证对于每一个正整数 n, 都有一个正规子群使得它的指数恰好就是 n. 例如 $G = \langle a, b; a^2 = b^2 = 1\rangle = \langle a; a^2 = 1\rangle * \langle b; b^2 = 1\rangle$, 它是两个 2 阶循环群的自由积, 它是剩余有限的, 但是对于素数 3, 不存在 $N \lhd G$ 满足 $|G/N| = 3$ (否则, 我们有 $a^3 \in N, b^3 \in N$. 但是 $a^2 = b^2 = 1 \in N$, 于是 $a, b \in N$, 这使得 $|G/N| = 1$, 矛盾). 于是 G 就不会不满足我们所讨论的条件.

对于广义自由积, 文 [4] 得到如下的结论：

引理 1.2[4] 设 A, B 是有限生成的无扭幂零群, U 为 A, B 的循环子群, 则 $G = A *_U B$ 具有无限循环商群.

根据这个定理, 如果融合子群 (amalgamted subgroup) 是循环群的两个有限生成的无扭幂零群的广义自由积具有无限循环商群, 从而对于任意正整数 n, 都会有正规子群 $N \lhd G$ 满足 $|G : N| = n$.

注 1 在文 [4] 中, 作者开始试图以下面一个例子说明剩余有限的群未必具有任意指数为正整数的正规子群: $G=\langle a,b;a^2=b^3\rangle$. 但是 $G=\langle a\rangle_{\langle a^2\rangle=\langle b^3\rangle}\langle b\rangle$, 根据引理 1.2, 我们知道它具有循环商群, 因此它的例子并不是一个反例.

本文把对广义自由积的情况推广到树积上去, 得到了如下的结论:

定理 1.3 设 $G{=}(G_1,G_2,\ldots,G_n;\,H_{ij}{=}H_{ji})$ 是 $G_1,G_2,\ldots,G_n$ 的树积, 其中 $G_1,G_2\ldots,G_n$ 都是有限生成的无扭幂零群, H_{ij} 都是循环群, 而且对于任意 $j\neq k$, $H_{ij}\cap H_{ik}=1$, 则 G 具有无限循环商群.

在文 [4] 中, 对于自由群的广义自由积也作了讨论, 得到了:

引理 1.4 设 A,B 是自由群, U 是循环群, 则 $G=A*_U B$ 也具有无限的循环商群.

同样也可以把它推广到树积的情形上去. 我们有:

定理 1.5 设 $G{=}(G_1,G_2,\ldots,G_n;\,H_{ij}{=}H_{ji})$ 是 $G_1,G_2,\ldots,G_n$ 的树积, 其中 $G_1,G_2\ldots,G_n$ 都是自由群, H_{ij} 都是循环群, 而且对于任意 $j\neq k$, $H_{ij}\cap H_{ik}=1$. 则 G 具有无限循环商群.

对于多重无限循环群 (Poly-infinite cyclic group), 我们也得到了类似的性质.

引理 1.6 设 $G=A*_H B$, 其中 A,B 是多重无限循环群, H 是循环群, 则 G 具有无限循环商群.

证明 由于 A,B 是多重无限循环群, 于是存在序列

$$1=A_0\lhd A_1\lhd\cdots\lhd A_m=A,\quad 1=B_0\lhd B_1\lhd B_2\lhd\cdots\lhd B_n=B,$$

满足 $A_{i+1}/A_i,B_{j+1}/B_j$ 都是无限循环群.

我们断言: $B_{n-1}\cap H=1=A_{m-1}\cap H$.

对于 $m=n=1$ 显然成立. 假设 $m>1$. 于是 $\overline{H}=HA_{m-1}/A_{m-1}\cong H/(H\cap A_{m-1})$. 如果 $H\cap A_{m-1}\neq 1$, 由于 H 是循环群, 可得 $\overline{H}$ 是有限循环群. 但是 A/A_{m-1} 是无限循环群, 矛盾. 同样可以讨论 $n>1$ 的情形.

根据广义自由积的性质, 存在同态映射

$$\pi:G\longrightarrow\overline{G}=A/A_{m-1}*_{\overline{H}}B/B_{n-1},$$

其中 $\overline{H}=HA_{m-1}/A_{m-1}=HB_{n-1}/B_{n-1}$. 根据引理 1.2, 存在 $\overline{L}\lhd\overline{G}$, 满足 $\overline{G}/\overline{L}$ 是无限循环群. 令 L 是 $\overline{L}$ 在 G 中的原像, 我们有 $L\lhd G$, 并且 G/L 为无限循环群.

类似的我们有:

定理 1.7 设 $G{=}(G_1,G_2,\ldots,G_n;\,H_{ij}{=}H_{ji})$ 是 $G_1,G_2,\ldots,G_n$ 的树积, 其中 $G_1,G_2\ldots,G_n$ 都是多重无限循环群, H_{ij} 都是循环群, 而且对于任意 $j\neq k$, $H_{ij}\cap H_{ik}=1$, 则 G 具有无限循环商群.

对于融合子群不是循环群的广义自由积, 我们考虑下面的情况:

定理 1.8 设 A,B 是有限生成的无扭幂零群, $H\leq Z(A)\cap Z(B)$, 则 $G=A*_H B$ 具有无限循环商群.

证明 设 A,B 的类长分别为 m,n, 于是 $H\leq Z_{m-1}(A)$, $H\leq Z_{n-1}(B)$. 因此 $H\cap Z_{m-1}(A)=H=H\cap Z_{n-1}(B)$, 从而存在同态映射

$$\pi:G\longrightarrow\overline{G}=A/Z_{m-1}(A)*B/Z_{n-1}(B).$$

注意到 A,B 是无扭的幂零群, 因此 $A/Z_{m-1}(A),B/Z_{n-1}(B)$ 都是无扭的有限生成的阿贝尔群. 由引理 1.2 可得结论.

2 定理的证明

首先我们给出定理 1.3 的证明.

证明 我们对 n 进行归纳.

对于 $n=2$ 的情况, 它就是我们的引理 1.2. 下面考虑 $n\geq 3$ 的情况. 对于任意有限的树来说, 都存在某一个顶点只和另外的一个顶点相连, 不妨假设这个顶点对应的群就是 G_n, 而唯一与这个顶点相连的顶点所对应的群就是 G_{n-1}. 我们令 E_{n-1} 就是由 $G_1,G_2,\ldots,G_{n-1}$ 所生成的群. 由树积的定义, 我们可以知道 E_{n-1} 就是由群 $G_1,G_2,\ldots,G_{n-1}$ 所得到的树积. 于是由归纳假设, 存在 $N\lhd E_{n-1}$, 满足 G/N 是无限循环群. 令 $H=H_{n-1,n}=H_{n,n-1}$, 我们有 $G=E_{n-1}*_H G_n$. 令 $H=\langle h\rangle$.

如果 $h\in N$, 则有 $N\cap H=H=G_n\cap H$. 于是根据广义自由积的性质, 我们知道存在同态映射 1.2,

$$\pi: G\longrightarrow \overline{G}=E_{n-1}/N *_{\overline{H}} G_n/G_n,$$

其中 $\overline{H}=HN/N=HG_n/G_n$. 注意到此时 $\overline{H}=1$, $G\pi=\overline{G}=E_{n-1}/N$ 是一个无限循环群. 于是此时结论成立.

下面假设 $h\notin N$. 令 $M=1$, 我们说 $N\cap H=1$. 否则 $\overline{H}=\langle h\rangle N/N\cong\langle h\rangle/\langle h\rangle\cap N$, 于是 $\overline{H}$ 是有限循环群, 这与 $\overline{E_{n-1}}=E_{n-1}/N$ 是无限循环群矛盾. 所以我们有 $N\cap H=1=M\cap H$. 同样由广义自由积的性质, 存在同态映射

$$\pi: G\longrightarrow \overline{G}=E_{n-1}/N *_{\overline{H}} G_n/M,$$

其中 $\overline{H}=HN/N=HM/M\cong H$. 根据引理 1.2, 对于广义自由积 $\overline{G}$, 存在 $\overline{L}\lhd\overline{G}$, 满足 $\overline{G}/\overline{H}$ 是无限的循环群. 令 L 是 $\overline{L}$ 在 G 中的原像, 于是有 $L\lhd G$, 并且 G/L 是无限循环群.

对于定理 1.5, 1.7, 我们的证明方法与定理 1.3 类似, 同样是对于 n 进行归纳. 在归纳的过程中, 注意到同样有 E_{n-1}/N 是一个无限循环群, 于是可以利用引理 1.4, 引理 1.6 完成定理的证明.

参 考 文 献

[1] Serre J. P., Trees, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1980.
[2] Baumslag G., On the residually finiteness of generalized free products of nilpotent groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1963, **106**: 193–209.
[3] Kim G., Separability properties of certain tree products of groups, *J. Alg.*, 2002, **251**: 323–349.
[4] Gregorac R. J., A note on certain generalized free products, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1967, **18**(4): 754–755.
[5] Robinson D. J. S., A course in the theory of groups, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1982.