第50卷第4期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.50, No.4
2007年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Jul., 2007

文章编号: 0583-1431(2007)04-0823-08 **文献标识码: A**

序 Banach 空间中一类算子方程的可解性

洪世煌 章春国 谢素英 何泽荣

杭州电子科技大学应用数学与工程计算研究所 杭州 310018
E-mail: hongshh@hotmail.com

摘 要 利用改进的 Mönch 紧性条件, 研究了一类算子方程 $Lx = Nx$ 的解的存在性. 本文结果并没有要求算子 L 和 N 的连续性. 作为应用, 讨论了右端项不连续的隐式椭圆偏微分方程的边值问题的解的存在性.

关键词 序空间; 算子方程; 增算子
MR(2000) 主题分类 47H05, 47H10
中图分类 O177.91

Solvability of a Class of Operator Equations in Ordered Banach Spaces

Shi Huang HONG Chun Guo ZHANG Su Ying XIE Ze Rong HE

Institute of Applied Mathematics and Engineering Computations, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018*, P. R. China*
E-mail: hongshh@hotmail.com

Abstract In this paper, we investigate the existence of solutions for a class of operator equations $Lx = Nx$ by using an improved weak compactness condition of Mönch. Here neither L nor N needs to be continuous. We also give some applications to boundary value problems of implicit elliptic differential equations with discontinuous right hand side.

Keywords ordered spaces; operator equations; increasing operators
MR(2000) Subject Classification 47H05, 47H10
Chinese Library Classification O177.91

1 引言及引理

利用 Mönch [1] 给出的紧性条件, 文 [2] 在 Banach 空间中给出了不连续增算子的不动点存在性定理. 本文将拓展这一思路, 讨论以下算子方程

$$Lx = Nx. \tag{1}$$

本文先利用类似于文 [2] 的方法, 建立新的偏序, 然后, 在此基础上, 并结合改进的 Mönch 的弱紧性条件, 证明算子方程 (1) 的解的存在性.

收稿日期: 2005-04-06; 接受日期: 2006-12-21

在诸如常微分方程, 偏微分方程, 积分微分方程等问题的研究中, 算子方程 (1) 的应用相当广泛. 近来, 在各种各样的假设条件下, 由于利用单调迭代方法以及上解下解方法, 许多作者研究了算子方程 (1) 的最大最小解的存在性 (参见文献 [3–6] 及其引用的文献). 本文不同于以上所引用文献的考虑在于：在一般的序 Banach 空间中使用弱紧性条件, 同时, 本文不必假设算子 L 或 N 具有连续性.

第二节引入了一类新的偏序, 并给出了方程 (1) 的解的存在性的充分条件. 第三节说明了所获结果的应用, 即应用第二节的结果可以获得右端项不连续的隐式椭圆偏微分方程的边值问题的解的存在性.

为了方便, 我们给出一些定义, 引理和基本概念.

设 $(E, |\cdot|)$ 是 Banach 空间, P 是 E 中的锥, E 中的序 "$\leq$" 由锥 P 导入, 即 $x \leq y$ 当且仅当 $y - x \in P$. E 的子集 Δ 被成为弱序列闭的, 记作 WSOC, 如果 Δ 的单调序列弱收敛于 x, 则 $x \in \Delta$.

设 Ω 是 E 的非空子集, 一个算子 $L : \Omega \to \Delta$ 被称为满射如果 $L(\Omega) = \Delta$. 一个算子 $N : \Omega \to \Delta$ 称为 L- 单调的如果对任意 x, $y \in \Omega$, 由 $Lx \leq Ly$ 可推出 $Nx \leq Ny$.

本文总是用 $\rightharpoonup$ 表示弱收敛, 以 $\lim(w)$ 表示弱极限, 以 $\mathrm{wcl}\,(B)$ 表示集合 B 的弱闭包.

以下引理均来自文献 [7].

引理 1 设 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 都是 E 中序列且满足 $x_n \leq y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 分别弱收敛于 x, y, 那么 $x \leq y$.

引理 2 如果 B 是 E 的全序的弱相对紧的子集, 那么存在 $x^* \in \mathrm{wcl}\,(B)$, 使得对任意 $x \in B$, 有 $x \leq x^*$.

2 主要结果

假设存在 $x_0 \in E$, 使得集合 $K = \{x : x \in \Omega, Lx_0 \leq Lx\}$ 非空, 又设算子 $L, N : \Omega \to \Delta$, 其中 L 是满射, N 是 L- 单调的. 以下假设将在主要结果中起关键作用, 其中条件 (H) 类似于文 [1]:

(H) 设 $C = \{u_n\} \subset K$, 使得 $LC = \{Lu_n\}$ 为 Δ 的可数全序子集, 如果

$$LC \subset \mathrm{wcl}\,(\{Lu_1\} \cup N(C)),$$

那么 LC 是弱相对紧集.

(h) 存在 $u_0 \in K$, 使得 $Lu_0 \leq Nu_0$.

作集合 $\mathcal{R} = \{x \in K : Lx \leq Nx\}$. 对任意 $x \in \mathcal{R}$ 定义

$$C(x) = \{x, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}, \quad LD(x) = \mathrm{wcl}\,(LC(x)).$$

这里, u_i $(i = 1, 2, \ldots)$ 如下给出：由 $x \in \mathcal{R}$ 得 $Lx \leq Nx$, 由于 $L(\Omega) = \Delta$, 故存在 $u_1 \in \Omega$, 使得 $Lu_1 = Nx$, 根据 N 的 L- 单调性, 得到 $Nx \leq Nu_1$. 又存在 $u_2 \in \Omega$, 使得 $Nu_1 = Lu_2$ 以及 $Nu_1 \leq Nu_2$. 重复这一过程, 得到存在 $u_n \in \Omega$, 使得 $Nu_{n-1} = Lu_n$ 及 $Nu_{n-1} \leq Nu_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

引理 3 设条件 (H) 满足, 那么 $LC(x)$ 单调递增且弱相对紧. 进一步, 存在唯一的弱极限 $w(x)$, 使得

$$\begin{aligned} &w(x) = \lim_{n\to\infty}(w) LC(x), \\ &Lx \leq w(x), \\ &LD(x) = LC(x) \cup \{w(x)\} \subset \Delta. \end{aligned} \tag{2}$$

证明 由 u_i 的作法可知 $LC(x)$ 单调递增, 显然 $LC(x) \subset \{Lx\} \cup N(C(x))$, 由条件 (H) 推出 $LC(x)$ 弱相对紧. 由文 [7, 引理 1.1.3] 可知存在 $w(x) \in E$, 使得当 $n \to \infty$ 时, $Lu_n \dot{\to} w(x)$ 且 $Lu_n \le w(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. 这个证明的其余部分是显而易见的. 证毕.

引理 4 设 $w(x)$ 如引理 3 所给出, 那么存在 $y \in \mathcal{R}$, 使得 $Ly = w(x)$.

证明 由于 Δ 是 WSOC, 所以 $w(x) \in \Delta$. 注意到 $L(\Omega) = \Delta$, 故存在 $y \in \Omega$, 使得 $Ly = w(x)$. 将证明 $y \in \mathcal{R}$, 事实上, 对任意 $u_n \in C(x) \setminus \{x\}$, 有 $Lu_n = Nu_{n-1} \le w(x) = Ly$, 由 N 的 L- 单调性推出 $Nu_n \le Ny$ ($n = 1, 2, \ldots$). 令 n 趋于无穷大, 根据引理 1 得到 $w(y) = Ly \le Ny$, 即 $y \in \mathcal{R}$. 证毕.

令

$$Z = \{D(x) : x \in \mathcal{R} \text{ 且 } D(x) \text{ 满足 } (2)\}.$$

易知 $D(u_0) \in Z$, 即 Z 非空. 在 Z 上定义一种关系 “$\le_0$” 如下: 对任意 $D(x), D(y) \in Z$,

(1) $D(x) = D(y) \Leftrightarrow Lx = Ly$;

(2) $D(x) <_0 D(y) \Leftrightarrow$(a) $Lx < Ly$,

(b) 存在一个至多可数子集 $Q \subset \mathcal{R}$, 使得 LQ 是全序的, 并且

(b1) 对任意 $\forall q \in Q$ 成立 $Lx < Lq < Ly$,

(b2) $w(x) = \inf(LQ \cup \{Ly\}), Ly = \sup(\{w(x)\} \cup \{w(q) : q \in Q\})$,

(b3) $L\big(\bigcup_{q \in Q} D(q)\big)$ 是全序的而且 $L\big(\bigcup_{q \in Q} D(q)\big) \subset \mathrm{wcl}\left(\{w(x)\} \cup N\big(\bigcup_{q \in Q} D(q)\big)\right)$.

Q 称为连结 $D(x)$ 和 $D(y)$ 的一个链.

注 1 如果 $L = I$ (I 表恒等算子), 只要把 “wcl” 改写成 “cl”, 则这个定义和文 [2] 一样.

注 2 如果 $Lx \le Ly$, 则根据引理 1 可得 $w(x) \le w(y)$. 另外, 连结 $D(x)$ 和 $D(y)$ 的链允许是空集, 在这种情况下, $D(x) <_0 D(y)$ 意味着 $Lx < Ly$ 且 $w(x) = Ly$.

注 3 类似于文 [2, 引理 4] 可以证明关系 “$\le_0$” 满足

(i) $D(x) \le_0 D(x)$;

(ii) $D(x) \le_0 D(y),\ D(y) \le_0 D(x) \Rightarrow D(x) = D(y)$;

(iii) $D(x) \le_0 D(y),\ D(y) \le_0 D(z) \Rightarrow D(x) \le_0 D(z)$.

因此, $(Z, \le_0)$ 是一个偏序集.

引理 5 令 $D(x), D(y) \in Z$, 若 $D(x)$ 与 $D(y)$ 按序关系 “$\le_0$” 可比较且存在 $x_1 \in D(x)$, $y_1 \in D(y)$, 使得 $Lx_1 < Ly_1$, 则 $D(x) \le_0 D(y)$.

证明 如果 $D(y) <_0 D(x)$, 那么 $w(y) \le Lx$, 于是 $Ly_1 \le w(y_1) \le Lx \le Lx_1$, 与 $Lx_1 < Ly_1$ 矛盾, 从而 $D(x) \le_0 D(y)$. 证毕.

下面陈述并证明本文的主要结果.

定理 1 假设 Δ 是 WSOC, 算子 $L : \Omega \subset E \to \Delta$ 为满射而算子 $N : \Omega \subset E \to \Delta$ 为 L- 单调. 如果条件 (H) 和 (h) 均满足, 那么方程 $Lx = Nx$ 至少有一解 $x^* \in \mathcal{R}$.

证明 如果 $D(x^*)$ 是 Z 的相对于序 “$\le_0$” 的最大元, 则从 $x^* \in \mathcal{R}$ 得 $Lx^* \le Nx^*$, 假如此式中等号不成立, 那么 $Lx^* < Nx^* \le w(x^*)$. 引理 4 保证存在 $y \in \mathcal{R}$, 使得 $Ly = w(x^*)$. 取空集作为连结 $D(x^*)$ 和 $D(y)$ 的链, 于是 $D(x^*) <_0 D(y)$, 这与 $D(x^*)$ 是 Z 的最大元矛盾. 所以, $Lx^* = Nx^*$, 这表明 x^* 是方程 (1) 的解.

下面必须证明 Z 存在最大元. 由 Zorn 引理, 只要证明 Z 的每一全序子集有上界就够了. 令 $M \subset Z$ 是 Z 的任一全序子集, 考虑集合 $\Gamma = \bigcup_{D(x) \in M} D(x)$. 显然, $\Gamma \subset \mathcal{R}$. 我们断言 $L\Gamma$ 是全序子集. 事实上, 对任意 $u_1, u_2 \in \Gamma$, 存在 $D(x_1)$, $D(x_2) \in M$, 使得 $u_1 \in D(x_1)$, $u_2 \in D(x_2)$. 假如

$D(x_1) = D(x_2)$, 根据 $D(x)$ 的定义可得 Lu_1 和 Lu_2 是可比较的. 否则, 假定 $D(x_1) <_0 D(x_2)$. 由 (2) 和 (b2) 以及引理 1, 可得

$$Lu_1 \le w(x_1) \le Lx_2 \le Lu_2.$$

所以 $Lu_1 \le Lu_2$, 结果 $L\Gamma$ 是全序子集.

下面证明 $L\Gamma$ 弱相对紧, 只要证明严格单调序列 $\{Lx_n\}$ (这里 $\{x_n\} \subset \Gamma$) 存在弱收敛的子列即可. Γ 的定义表明存在 $D(u_n) \subset M$, 使得 $x_n \in D(u_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. 对任意 $x \in \mathcal{R}$, 由 Krein–Smulian 定理推出 $LD(x)$ 是弱相对紧的. 所以只需考虑 $\{x_n\}$ 存在一个子列 (不失一般性, 假设 $\{x_n\}$ 自身) 满足 $x_n \notin D(u_m)$ 如果 $m \ne n$. 让我们考虑

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigg(D(u_n) \cup \bigg(\bigcup_{q \in Q_n} D(q) \bigg) \bigg),$$

其中 Q_n 为连结 $D(u_n)$ 和 $D(u_{n+1})$ 的链. 用文 [2] 相同的方法, 可以证明 W 满足条件 (H), 这说明 LW 是弱相对紧的. 因此, $\{Lx_n\}$ 有弱收敛的子列.

由引理 2, 对每个 $x \in \Gamma$, 存在 $x^* \in \mathrm{wcl}\,(L\Gamma)$, 使得 $Lx \le Lx^*$. 下面证明 $D(x^*)$ 是 M 的一个上界. 分以下两种情形考虑:

Case 1 如果 $x^* \in \Gamma$, 则存在 $D(x) \in M$, 使得 $x^* \in D(x)$, 这表明 $Lx^* \le w(x)$. 另一方面, 由于 $w(x) \in LD(x)$, 存在 $x_0 \in D(x)$, 使得 $w(x) = Lx_0$, 这推出 $w(x) = Lx_0 \le Lx^*$. 因此, $Lx^* = w(x) = Lx_0$, 这说明 $D(x^*) = D(x_0)$. 引理 5 保证了 $D(x) \le_0 D(x_0)$, 从而 $D(x) \le_0 D(x^*)$. 注意到 M 是全序的, 从而对每个 $D(u) \in M$, 要么 $D(u) \le_0 D(x)$, 此推出 $D(u) \le_0 D(x^*)$; 要么 $D(x) <_0 D(u)$, 由此再加上 (b2) 得到 $w(x) \le Lu$, 同时, $Lx^* \le w(x) \le Lu$. 注意到 $u \in \Gamma$, 又有 $Lu \le Lx^*$, 所以, $Lu = Lx^*$. 这表明 $D(u) = D(x^*)$, 所以 $D(x^*)$ 是 M 的一个上界.

Case 2 如果 $x^* \notin \Gamma$, 根据 Eberlein 定理, 存在无穷序列 $\{u'_n\} \subset \Gamma$, 使得

$$Lx^* = \lim_{n\to\infty} (w) Lu'_n.$$

令

$$u_n = \max\{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}.$$

易看出 $\{u_n\} \subset \Gamma$ 单调递增而且 $Lx^* = \lim_{n\to\infty}(w)Lu_n$. 因为 $u_n \in \mathcal{R}$, 显然 $Lu_n \le Nu_n$. 因为 $Lu_n \le Lx^*$ 而且 N 是 L- 单调的, 从而 $Lu_n \le Nx^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$. 让 n 趋向无穷大, 由此并利用引理 1 可推出 $Lx^* \le Nx^*$, 即 $x^* \in \mathcal{R}$. 取 $D(\mu_n) \in M$, 使得 $u_n \in D(\mu_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, 于是获得以下两种可能:

Step 1 存在 n_0, 使得 $u_n \in D(\mu_{n_0})$ $(n \ge n_0)$. 注意到 $LD(\mu_{n_0})$ 弱闭, 得到 $Lx^* \in LD(\mu_{n_0})$, 即 $x^* \in D(\mu_{n_0})$. 用与 Case 1 相同的方法可以证明 $D(x^*)$ 是 M 的一个上界.

Step 2 假设对每个自然数 n, 都存在 m 满足 $m > n$ 以及 $u_m \notin D(\mu_n)$, 于是有

$$L\mu_1 \le Lu_1 \le w(\mu_1) \le L\mu_2 \le Lu_2 \le w(\mu_2) \le \cdots$$

利用 $L\Gamma$ 的弱相对紧性得到

$$Lx^* = \lim_{n\to\infty}(w)Lu_n = \lim_{n\to\infty}(w)L\mu_n = \lim_{n\to\infty}(w)w(\mu_n).$$

以 Q_n 表示连结 $D(\mu_n)$ 和 $D(\mu_{n+1})$ 的链 $(n = 1, 2, \ldots)$, 令 $\bar{Q}_k = \bigcup_{n=k}^{\infty}(Q_n \cup \{\mu_{n+1}\})$ $(k = 1, 2, \ldots)$. 不难看出 $\bar{Q}_k \subset \mathcal{R}$ 是可数的, $L\bar{Q}_k$ 是全序的而且由引理 1 可以推出 $L\mu_k < Lq < Lx^*$ (对所有 $q \in \bar{Q}_k$), 又 $w(\mu_k) = \inf(\{L\mu_{k+1}\} \cup LQ_k) = \inf(\{Lx^*\} \cup L\bar{Q}_k)$ 且

$$Lx^* = \lim_{n\to\infty}(w)w(\mu_n) \in \mathrm{wcl}\,(\{w(\mu_k)\} \cup \{w(q) : q \in \bar{Q}\}),$$

这里 $k=1,2,\ldots$. 类似于文 [2, 定理 1] 的证明, 可以得到 $\bar{Q}_k$ 是连结 $D(\mu_n)$ 和 $D(x^*)$ 的链而且 $D(x^*)$ 是 M 的一个上界. 定理 1 的证明完成了.

推论 1 设 E 是弱序列完备的 Banach 空间, P 为正规锥. 如果算子 N 有界, 又假设除了 (H) 外定理 1 的所有条件都满足, 那么方程 (1) 在 $\mathcal{R}$ 内至少有一解.

证明 显然只要证明条件 (H) 满足即可. 在推论 1 的假设下, 每一有界子集都是弱相对紧的 (见文 [7]), 这就保证了条件 (H) 成立. 证毕.

假设 (E,d) 是距离空间, $\varphi: E\to \mathbf{R}$ 为一个下有界函数. E 中偏序由函数 φ 导入如下:

$$x\le y \Leftrightarrow d(x,y)\le \varphi(x)-\varphi(y).$$

推论 2 设 (E,d) 是弱序列完备的距离空间, 其偏序 "$\le$" 由函数 φ 导入. 如果除条件 (H) 外定理 1 的其他条件均满足, 那么方程 (1) 在 $\mathcal{R}$ 中至少有一个解.

证明 只要证明条件 (H) 成立就可以了. 对任意 $C=\{u_n\}\subset K$, 使得 $LC=\{Lu_n\}$ 是 E 的可数全序子集, 令 $\{v_n\}$ 满足

$$Lv_k=\max\{Lu_1,Lu_2,\ldots,Lu_k\},$$

那么 $\{Lv_n\}\subset LC$ 是单调递增的, 由 "$\le$" 的定义可以看出 $\{\varphi(Lv_n)\}$ 是单调递减的实数列. 由于 φ 是下有界函数, 故 $\{\varphi(Lv_n)\}$ 为收敛数列, 所以, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0>0$, 使得对所有 $m>n>n_0$, 有

$$d(Lv_m,Lv_n)\le\varphi(Lv_n)-\varphi(Lv_m)<\varepsilon,$$

这表明 LC 是 E 中的 Cauchy 序列. E 的完备性保证 LC 是弱相对紧的, 这就证明了 (H) 成立. 证毕.

注 4 推论 2 的结果严格包含了文 [5] 的相应结果. 另外, 类似于定理 1, 可以推出以下结论.

定理 2 设 Δ 是 WSOC, 算子 $L,N:\Omega\subset E\to\Delta$ 满足 L 是满射而 N 是 L- 单调. 如果条件 (H) 及以下条件满足, 则方程 $Lx=Nx$ 至少有一解 $x^*\in\mathcal{R}$.

(h)$'$ 存在 $v_0\in\Omega$, 使得 $Nv_0\le Lv_0$.

下文给出方程 $Lx=Nx$ 的最大最小解的存在性.

方程 $Lx=Nx$ 的解 $x_*\in\mathcal{R}$ 称为最小解如果对方程 $Lx=Nx$ 的任一解 y 有 $Lx_*\le Ly$. 对应地可以定义最大解.

定理 3 设 Δ 是 WSOC, 算子 $L,N:\Omega\subset E\to\Delta$ 满足 L 是满射而 N 是 L- 单调. 如果条件 (H) 及 (h) 满足, 则方程 $Lx=Nx$ 有一最小解 $x_*\in\mathcal{R}$.

证明 定义

$$Z_1=\{D(x): x\in\mathcal{R},\ Lx\le Ly\ \forall\, y\in F\},$$

其中 $F=\{x\in K: Lx=Nx\}$, 显然, 定理 1 表明 F 非空且 $Z_1\subset Z$ 且 $(Z_1,\le_0)$ 是一个偏序集. 设 $M_1\subset Z_1$ 是任意给定的全序子集, 利用和定理 1 同样的证法, 可以得到存在 $y^*\in\mathcal{R}\cap \mathrm{wcl}\,(L\Gamma_1)$ $(\Gamma_1=\bigcup_{D(x)\in M_1}D(x))$, 使得 $D(x)\le_0 D(y^*)$ $(\forall\, D(x)\in M_1)$, 以及对任意 $x\in\Gamma_1$, 有 $Lx\le Ly^*$.

为了证明 y^* 是 M_1 在 $(Z_1,\le_0)$ 中的上界, 必须证明 $D(y^*)\in Z_1$. 考虑以下两种情况:

Case 1 如果 $y^*\in\Gamma_1$, 则存在 $D(x)\in M_1$, 使得 $y^*\in D(x)$, 这表明 $Ly^*\le w(x)$. 另一方面, $D(x)\in M_1$ 表明 $Lx\le Ly$ $(\forall\, y\in F)$ 而且从注 1 可得 $w(x)\le w(y)$. 由 $C(y)$ 的定义推出只要 $y\in F$, 就有 $Ly=w(y)$. 由此导出对任意 $y\in F$, 有 $Ly^*\le Ly$, 即 $D(y^*)\in Z_1$.

Case 2 如果 $y^* \notin \Gamma_1$, 借助于 Eberlein 定理, 存在无穷序列 $\{u'_n\} \subset \Gamma_1$, 使得 $Ly^* = \lim_{n\to\infty}(w)Lu'_n$. 令

$$u_n = \max\{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}.$$

易知 $\{u_n\} \subset \Gamma_1$ 单调递增而且 $Ly^* = \lim_{n\to\infty}(w)Lu_n$. 取 $D(\mu_n) \in M_1$, 使得 $u_n \in D(\mu_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. 考虑以下两种可能:

Step 1 存在 n_0, 使得对所有 $n \geq n_0$, 有 $u_n \in D(\mu_{n_0})$, 注意到 $LD(\mu_{n_0})$ 是弱闭的, 从而 $Ly^* \in LD(\mu_{n_0})$, 即 $y^* \in D(\mu_{n_0})$. 类似于 Case 1 可证 $D(y^*) \in Z_1$.

Step 2 假设对每个自然数 n 都可找到 m 满足 $m > n$ 及 $u_m \notin D(\mu_n)$, 则有

$$L\mu_1 \leq Lu_1 \leq w(\mu_1) \leq L\mu_2 \leq Lu_2 \leq w(\mu_2) \leq \cdots.$$

借助于 $L\Gamma_1$ 的弱紧性, 可得

$$Ly^* = \lim_{n\to\infty}(w)Lu_n = \lim_{n\to\infty}(w)L\mu_n = \lim_{n\to\infty}(w)w(\mu_n).$$

这样一来, 对任意 $y \in F$, 有 $w(\mu_n) \leq w(y) = Ly$. 利用引理 1 可推出对每个 $y \in F$, 有 $Ly^* \leq Ly$, 即 $D(y^*) \in Z_1$.

现在 Zorn 引理保证 Z_1 有一个最大元 $D(x_*)$, 类似于定理 1 的证明不难看出 x_* 是方程 (1) 在 $\mathcal{R}$ 中的最小解. 证毕.

综合以上结果, 得到

定理 4 设 Δ 是 WSOC, 算子 $L, N : \Omega \subset E \to \Delta$ 满足 L 是满射而 N 是 L- 单调. 如果条件 (H), (h) 和 (h)$'$ 都满足, 则方程 $Lx = Nx$ 有最大解和最小解 $x_*, x^* \in [u_0, v_0] =: \{u \in K : Lu_0 \leq Lu \leq Lv_0\}$.

推论 3 让算子 L, N 如定理 4 给出, 假设条件 (h) 和 (h)$'$ 成立, 此外, 假设以下条件之一满足, 那么方程 $Lx = Nx$ 有最大解和最小解 $x_*, x^* \in [u_0, v_0]$.

(h1) P 是正则锥;

(h2) 如果 $C = \{x_n\} \subset K$ 是可数全序子集而且 $LC \subset cl(\{Lx_1\} \cup N(C))$, 那么 LC 是相对紧集;

(h3) $N([u_0, v_0])$ 为弱相对紧集;

(h4) $L[u_0, v_0]$ 有界, 且对任意可数子集 C, 使得 $LC \subset L[u_0, v_0]$ 和 LC 非紧时, 有 $\alpha(N(C)) < \alpha(LC)$, 这里 $\alpha(\cdot)$ 表示 Kuratowskii 非紧性测度.

(h5) Δ 按有序序列弱紧, 即 Δ 的任何单调序列在 Δ 中有弱极限.

证明 以上假设条件中任意一条都可推出条件 (H) 成立.

注 5 (h1) 是文 [5, 定理 3.3] 的关键性条件, (h5) 则是文 [3, 定理 6] 的关键性条件. 所以推论 3 推广和改进了文 [3] 和 [5] 中的相关结果. 另外, 当 L 是恒等算子时, (h2) 是文 [2] 的主要条件, 同时, 文 [2] 特别指出, 如果 P 是正规锥, 那么假设 (h2) 可以减弱到弱相对紧. 因此本文结果也是对文 [2] 中相应结果的推广和改进.

注 6 也可以获得类似于文 [5] 中给出的多解性结果. 为了读者方便, 我们作如下描述:

设 Δ 是 WSOC, 算子 $L, N : \Omega \subset E \to \Delta$ 满足 L 是满射而 N 是 L- 单调. 如果下面条件满足, 则方程 $Lx = Nx$ 至少有 k 个解 $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{u \in K : Lu_1 \leq Lu \leq Lv_k\}$.

(h)$''$ 存在 $u_n, v_n \in K$, 使得 $Lv_n \neq Lu_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots, k-1)$ 以及

$$\begin{aligned} Lu_1 &\leq Nu_1 \leq Nv_1 \leq Lv_1 \leq \cdots \leq Lu_n \leq Nu_n \leq Nv_n \leq Lv_n \\ &\leq \cdots \leq Lu_k \leq Nu_k \leq Nv_k \leq Lv_k. \end{aligned}$$

3 应用

为了说明第二节结果的应用, 本节首先考虑以下隐式方程的边值问题 (BVP) 的可解性

$$Lu = F(t,u,Lu), \quad t \in J, \quad u|_{\partial J} = 0, \tag{3}$$

其中 $J \subset \mathbf{R}^k$ 为紧矩形, $L : C^1(J,E) \to L^1(J,E)$, $Q : J \times C^1(J,E) \times L^1(J,E) \to L^1(J,E)$ 及 E 是序 Banach 空间.

引理 6[8] 让 $p \in [1,\infty]$, 假设 $M \subset L^p(J,E)$ 为可数集, 存在 $v \in L^p(J,R_+)$ 满足对所有 $u \in M$, 有 $|u(t)| \le v(t)$ ($t \in J$ a.e.) 如果 $M(t)$ 在 E 中相对紧 ($t \in J$ a.e.), 那么 M 在 $L^p(J,E)$ 中弱相对紧.

设 $\Omega = \{x \in C^1(J,E) : x|_{\partial J} = 0\}$, $X = \{x \in L^p(J,E) : x|_{\partial J} = 0\}\}$ ($p \in [0,\infty]$) 赋予范数 $\|x\|_p = \left(\int_J |x(t)|^p dt\right)^{1/p}$, 那么 X 是一个 Banach 空间. 对任意 $x,y \in X$, 定义 $x \le y$ 当且仅当 $x(t) \le y(t)$ 对每个 $t \in J$ 成立. 利用定理 1 可得如下存在性结果, 注意其中没有用到 F 的连续性假设.

定理 5 设 $\Delta \subset X$ 是 WSOC, $L : \Omega \to X$ 满足 $L(\Omega) = \Delta$, $F : J \times \Omega \times \Delta \to \Delta$及以下假设:

(f0) 若 $u,v \in \Omega$ 并且 $Lu \le Lv$ 时, 则有 $u \le v$.

(f1) 存在 $u_0 \in \Omega$, 使得

$$Lu_0 \le F(t,u_0,Lu_0), \quad t \in J.$$

(f2) 对给定的 $t \in J$ a.e. 和 $v \in \Delta$, 函数 $F(t,u,v)$ 关于 u 单调递增.

(f3) 对每个有界子集 $M \subset \Omega$ 和每个 $t \in J$, 有 $\alpha(F(t,M(t),LM(t)) < \alpha(LM(t))$, 其中 $\alpha(\cdot)$ 表示 Kuratowskii 非紧性测度.

(f4) 函数 $F(\cdot,u,v)$ 可测, 而且存在 $\eta \in L^p(J,\mathbf{R}^+)$, 使得对所有 $u \in \Omega$ 和 $v \in \Delta$ 不等式 $\|F(t,u,v)\|_p \le \eta(t)$ 成立,

那么 BVP(3) 至少有一解.

证明 记

$$Nx = F(t,x,Lx), \quad t \in J. \tag{4}$$

于是 BVP(3) 转换到方程 $Lx = Nx$. 现在验证定理 1 的条件满足, 由假设 (f0) 和 (f2) 立即推出 N 是 L- 单调的, (f1) 保证条件 (h) 满足. 最后, 仅需验证条件 (H) 成立了, 为此, 假设集合 $C = \{x_n\} \subset K$ 以至 LC 为 Δ 中的可数全序子集而且 $LC \subset \mathrm{wcl}\ (\{Lx_1\} \cup N(C))$. 我们不得不证明 LC 为弱相对紧集. 由于 LC 可数, 从而可以找到可数子集 $V = \{v_n : n \ge 1\} \subset N(C)$ 满足

$$LC \subset \mathrm{wcl}\ (\{Lx_1\} \cup V). \tag{5}$$

所以存在 $u_n \in C$, 使得 $v_n = Nu_n$ ($n = 1,2,\ldots$). 令 $U = \{u_n\}$, 则 $V = LU$. 利用假设 (f3) 得对任意 $t \in J$, 有

$$\alpha(V(t)) = \alpha(F(t,U(t),LU(t))) < \alpha(LU(t)) \le \alpha(LC(t)).$$

此式与 (5) 一起推出 $\alpha(LC(t)) \le \alpha(V(t)) < \alpha(LC(t))$, 由此即得 $\alpha(LC(t)) = 0$, 所以对每个 $t \in J$, $\alpha(LC(t))$ 相对紧.

对等式 $v_n = Lu_n$ 利用 (3) 式及假设 (f4), 得到

$$|v_n(t)| = |F(t,u_n(t),Lu_n(t))| \le \eta(t)$$

对所有 $t \in J$ 及 $v_n \in V$ 成立. (5) 表明用 $Lx_n \in LC$ 代替 v_n 以上不等式依然成立. 于是, 引理 6 保证了 LC 弱相对紧. 这就证明了条件 (H) 成立, 故定理 1 的所有条件满足, 结果, BVP(3) 至少有一解. 证毕.

例 1 设 $g: J \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是一 Carathéodory 函数且存在 L^2- 函数 h_1, 使得 $|g(t,x)| \le h_1(t)$ $((t,x) \in J \times \mathbf{R})$, 那么, 对每个 $h \in L^2(J)$, 文 [9] 表明以下 BVP 在 $W_0^{1,2}(J)$ 内有最大最小解而且它们相对 h 单调递增.

$$Au(t) := -\sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial t_i}\left(a_{ij}(t)\frac{\partial u(t)}{\partial t_j}\right) - g(t,u(t)) = h(t) \text{ a.e. in } J, \quad u|_{\partial J} = 0, \tag{6}$$

这里系数 $a_{ij} \in L^\infty(J)$, 对给定的 $\mu > 0$, 椭圆条件 $\sum_{i,j=1}^k a_{ij}(t)\xi_i\xi_j \ge \mu|\xi|^2$ 对几乎所有的 $t \in J$ 和所有 $\xi \in \mathbf{R}^k$ 成立, 又假设 $W_0^{1,2}(J)$ 及 $L^2(J)$ 几乎逐点可序的. 选取

$$X = L^2(J), \quad \Delta = \{h \in X : \|h\|_2 \le \lambda\} \ (\lambda > 0),$$

$$\Omega = \{u \in W_0^{1,2}(J) : u \text{ 是 (6) 的最小解 (对某个 } h \in \Delta)\}.$$

显然, A 是从 Ω 到 Δ 的满射. 任意给定函数 $F: J \times W_0^{1,2}(J) \times L^2(J) \to \mathbf{R}$, 使其满足假设 (f1) 和以下条件:

(i) 对所有 $u \in \Omega$ 和 $v \in \Delta$, $\|F(\cdot,u,v)\|_2 \le \|v\|_2$.

(ii) 对 $u \in W_0^{1,2}(J)$ 和 $t \in J$ a.e., $F(t,u,v)$ 关于 v 单调增,

那么定理 5 保证以下 BVP

$$Au(t) = F(t,u,Au), \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

有一解.

参 考 文 献

[1] Mönch H., Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces, *Nonlinear Analysis*, 1980, **4**: 985–999.

[2] Wang J. G., Fixed points of increasing operators in ordered Banach spaces, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2000, **43**(1): 43–48.

[3] Šeda V, Monotone-iterative technique for decreasing mappings, *Nonlinear Analysis*, 2000, **40**: 577–588.

[4] Heikkilä S., New iterative methods to solve equations and systems in ordered spaces, *Nonlinear Analysis*, 2002, **51**: 1233–1244.

[5] Liu S. Y., Feng Y. Q., Solvablity of a class of operator equations in partially ordered complete metric space and in partially ordered Banach space, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2005, **48**(1): 109–114.

[6] Heikkilä S., A method to solve discontinuous boundary value problems, *Nonlinear Analysis*, 2001, **47**: 2387–2394.

[7] Guo D. J., Sun J. X., Liu Z. L., Functional method of nonlinear ordinary differential equations, Jinan: Shandong Sci. And Tech. Press, 1995 (in Chinese).

[8] Diestel J., Ruess W. M., Schachermayer W., Weak compactness in $L^1(\mu, X)$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1993, **118**: 447–453.

[9] Carl S., Heikkilä S., Nonlinear differential equations in ordered spaces, London: Chapman and Hall/CRC, 2000.