文章编号: 0583-1431(2007)04-0887-08 **文献标识码: A**

Hermite 流形上Coupled Vortex方程的 Dirichlet 问题

汪 悦

中国计量学院数学系 杭州 310018
E-mail: math_wong@163.com

摘 要 本文研究 Coupled Vortex 方程的 Dirichlet 问题, 通过热流方法来讨论该方程 Dirichlet 问题的解的存在唯一性.

关键词 Kähler 流形; Hermite 流形; 全纯向量丛
MR(2000) 主题分类 58E15, 53C07
中图分类 O186.16

Dirichlet Problem for Coupled Vortex Equations over Hermitian Manifold

Yue WANG

Department of Mathematics, China Jiliang University, Hangzhou 310018*, P. R. China*
E-mail: math_wong@163.com

Abstract In this paper, we investigate the Dirichlet problem for Coupled Vortex equations over general Hermitian manifolds.

Keywords Kähler manifold; Hermitian manifold; holomorphic vector bundle
MR(2000) Subject Classification 58E15, 53C07
Chinese Library Classification O186.16

1 引言及定理

设 M 是紧致无边的 Kähler 流形, E 是 M 上全纯向量丛. 经典的 Hitchin–Kobayashi 对应告诉我们 [1−6]: 全纯结构是多重稳定 (Polystable) 的当且仅当 E 上存在 Hermitian–Einstein 度量 H, 即满足下面 Hermitian–Einstein 方程

$$\sqrt{-1}\Lambda F_H = \lambda Id_E, \tag{1.1}$$

其中 F_H 是度量 H 的陈联络的曲率, Λ 是和 M 的 Kähler 形式作缩并, λ 是仅与 E 的拓扑有关的实数. Bradlow [7−8] 考虑全纯向量丛 E 上加入全纯截面 $\phi \in \Gamma(E)$ 的情形, 即全纯对 (E, ϕ). Bradlow 在紧致无边的 Kähler 流形上, 研究了下面的 Vortex 方程

$$\Lambda F_H - \frac{\sqrt{-1}}{2}\phi \otimes \phi^{*H} + \tau \frac{\sqrt{-1}}{2} Id = 0, \tag{1.2}$$

收稿日期: 2005-06-27; 接受日期: 2006-12-21
基金项目: 浙江省自然科学基金资助项目 (Y605091)

其中 ϕ^{*H} 是对于度量 H 的 ϕ 的共轭, τ 是一实数. 他在文 [8] 中给出了全纯向量丛 E 的 τ-稳定性定义, 并证明：全纯丛 E 上存在一 Hermite 度量满足 Vortex 方程 (1.2) 的充分必要条件是全纯丛满足 τ- 稳定性条件 (当 $\phi=0$ 时, (1.2) 恰好就是 Hermitian–Einstein 方程). 后来 Garcia–Prada [9] 在全纯对 (E_1,E_2,ϕ) 上, 讨论了下面的 Coupled Vortex 方程

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\Lambda F_{H_1}+\frac{1}{2}\phi\circ\phi^{*H}&=\tau_1 Id_{E_1},\\ \sqrt{-1}\Lambda F_{H_2}-\frac{1}{2}\phi^{*H}\circ\phi&=\tau_2 Id_{E_2},\end{aligned}\tag{1.3}$$

其中 E_1,E_2 为 M 的两个全纯丛, ϕ 是 E_2 映到 E_1 的全纯同态. 同样, Garcia–Prada 在紧致无边流形上讨论方程 (1.3) 解的存在性和某种稳定性之间的对应关系.

在几何中, 由紧致无边流形上的结果很自然的想到了是否可以推广到紧致带边界流形的边值问题, 在文 [10] 中, Donaldson 得到在紧致带边界 Kähler 流形上 Hermitian–Einstein 方程 (1.1) Dirichlet 边值问题的可解唯一性. 最近, Zhang 在文 [11] 把 Donaldson 的结果推广到底流形为一般的 Hermite 流形的情形, 并利用所得到的 Dirichlet 边值问题的可解唯一性, 去讨论几类完备非紧 Hermite 流形上全纯向量丛中 Hermitian–Einstein 度量的存在性问题. 受文 [11] 的启发, 本文在一般 Hermite 流形上将讨论比 Hermitian–Einstein 方程更一般的 Coupled Vortex 方程的 Dirichlet 问题, 我们得到:

定理 设 $\bar{M}$ 是紧致带边的 Hermite 流形, 有光滑边界 ∂M,E_1,E_2 是 M 上的两个全纯向量丛, $\phi: E_2\to E_1$ 是一全纯同态, 对于在边界 ∂M 上给定 Hermite 度量 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$, 其中 φ_1,φ_2 分别是 E_1,E_2 限制在边界 ∂M 上的 Hermite 度量, 则存在唯一的 Hermite 度量 $H=(H_1,H_2)$, 使得 H 满足 Coupled Vortex 方程和 Dirichlet 边界条件

$$\begin{cases}\sqrt{-1}\Lambda F_{H_1}+\dfrac{1}{2}\phi\circ\phi^{*H}=\tau_1 Id_{E_1},\\ \sqrt{-1}\Lambda F_{H_2}-\dfrac{1}{2}\phi^{*H}\circ\phi=\tau_2 Id_{E_2},\\ H_i\mid_{\partial M}=\varphi_i,\quad i=1,2.\end{cases}\tag{1.4}$$

该定理的证明是通过热流方法来讨论方程 Dirichlet 问题的解的存在唯一性. 首先考虑该问题的发展方程组, 由于方程组的非线性严格抛物性, 可得短时间存在性；然后证明方程组的长时间存在性和唯一性；最后证明发展方程的解收敛到满足 Coupled Vortex 方程的 Hermite 度量.

2 预备知识

设 (M,g) 是紧致复 n 维 Hermite 流形, $E=E_1\oplus E_2$ 是 M 上秩为 r 的全纯向量丛. 记 ω 是 Kähler 形式, 定义 Λ 是和 ω 作缩并, 即对于 $\alpha\in\Omega^{1,1}(M,E)$, 则

$$\Lambda\alpha=\langle\alpha,\omega\rangle.\tag{2.1}$$

设 $H=(H_1,H_2)$ 是全纯向量丛 $E=E_1\oplus E_2$ 上的 Hermite 度量, 全纯结构记为 $\bar\partial_E$, 则存在标准度量联络 A_H. 取局部全纯基 e_α $(1\le\alpha\le r)$, Hermite 度量 H 是正定矩阵 $(H_{\alpha\bar\beta})_{1\le\alpha,\beta\le r}$, 简记为 H, $H_{\alpha\bar\beta}=H(e_\alpha,e_\beta)$. 事实上, 复度量联络可以写成

$$A_H=H^{-1}\partial H,\tag{2.2}$$

曲率形式有

$$F_H=\bar\partial A_H=\bar\partial(H^{-1}\partial H).\tag{2.3}$$

一些文献中联络也写成 $(\partial H)H^{-1}$, 这是由于向量取成行向量和列向量的不同而已.

设 H, K 是丛 E 上两个 Hermite 度量, 且 $H=Kh$, 其中 $h=K^{-1}H\in\Omega^0(M,\mathrm{End}\,(E))$ 是正定的, 对于 K 是自共轭的. 容易验证

$$A_H-A_K=h^{-1}\partial_K h; \tag{2.4}$$

$$F_H-F_K=\bar\partial(h^{-1}\partial_K h). \tag{2.5}$$

在 M 上取局部复坐标系 $\{z^i\}_{i=1}^m$ (参考文 [11]), 定义函数的全纯 Laplace 算子

$$\tilde\triangle f=-2\sqrt{-1}\Lambda\bar\partial\partial f=2g^{i\bar j}\frac{\partial^2 f}{\partial z^i\partial\bar z^j}, \tag{2.6}$$

其中 $(g^{i\bar j})$ 是度量矩阵 $g_{i\bar j}$ 的逆矩阵. 我们把通常的 Beltrami–Laplacian 算子记为 $\triangle$. 两者差一个一阶的微分算子

$$(\tilde\triangle-\triangle)f=\langle V,\nabla f\rangle_g, \tag{2.7}$$

其中 V 是定义在流形 M 上的向量场. 当 Hermite 流形 (M,g) 是 Kähler 的时候, 全纯 Laplace 算子 $\tilde\triangle$ 和通常的 Laplace $\triangle$ 一致.

定义 2.1 (Coupled Vortex 方程) 设 M 是 Hermite 流形, $E=E_1\oplus E_2$ 是 M 上的全纯向量丛, ϕ 是 E_2 映到 E_1 全纯同态, $\tau=(\tau_1,\tau_2)\in R^2$. $H=(H_1,H_2)$ 是 Hermite 度量, 其中 H_i 是 E_i 上的度量. 我们称 H 满足 Coupled Vortex 方程, 若它满足方程

$$\sqrt{-1}\Lambda F_{H_1}+\frac12\phi\circ\phi^{*H}=\tau_1 Id_{E_1},\quad \sqrt{-1}\Lambda F_{H_2}-\frac12\phi^{*H}\circ\phi=\tau_2 Id_{E_2}, \tag{2.8}$$

其中 $i=1,2$, ϕ^{*H} 是 ϕ 对于 H 的自共轭.

3 关于 Coupled Vortex 方程的一些命题

考虑 Hermite 度量 $H=(H_1,H_2)$, 初始值 $H(0)=K$, 设 $h(t)=(h_1(t),h_2(t))$ 是一对自同态且 $h_i=K_i^{-1}H_i$. 把 $H(t),h(t)$ 简记为 H,h. 我们考虑 (2.8) 的发展方程

$$\begin{aligned}H_1^{-1}\frac{\partial H_1}{\partial t}&=-2\Big(\sqrt{-1}\Lambda F_{H_1}+\frac12\phi\circ\phi^{*H}-\tau_1 Id_{E_1}\Big),\\ H_2^{-1}\frac{\partial H_2}{\partial t}&=-2\Big(\sqrt{-1}\Lambda F_{H_2}-\frac12\phi^{*H}\circ\phi-\tau_2 Id_{E_2}\Big),\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $i=1,2$. 该方程等价于下面的发展方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_1}{\partial t}&=-2\sqrt{-1}\Lambda\bar\partial_{E_1}\partial_{K_1}h_1+2\sqrt{-1}\Lambda(\bar\partial_{E_1}h_1h_1^{-1}\partial_{K_1}h_1)-2\sqrt{-1}h_1\Lambda F_{K_1}\\ &\quad+2\tau_1h_1-h_1\phi h_2^{-1}\phi^{*K}h_1,\\ \frac{\partial h_2}{\partial t}&=-2\sqrt{-1}\Lambda\bar\partial_{E_2}\partial_{K_2}h_2+2\sqrt{-1}\Lambda(\bar\partial_{E_2}h_2h_2^{-1}\partial_{K_2}h_2)-2\sqrt{-1}h_2\Lambda F_{K_2}\\ &\quad+2\tau_2h_2+\phi^{*K}h_1\phi,\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中用到公式 (2.5) 和恒等式

$$\phi^{*H}=h_2^{-1}\phi^{*K}h_1. \tag{3.3}$$

上述方程是非线性严格抛物型方程组 [1], $h_i(t)$ 对应 H_i 是自共轭的, $t>0$, 由于 $h_i(0)=Id_{E_i}$. 记

$$\Theta^2=\Big|\sqrt{-1}\Lambda F_{H_1}+\frac12\phi\circ\phi^{*H}-\tau_1Id_{E_1}\Big|_{H_1}^2+\Big|\sqrt{-1}\Lambda F_{H_2}-\frac12\phi^{*H}\circ\phi-\tau_2Id_{E_2}\Big|_{H_2}^2. \tag{3.4}$$

命题 3.1 设 $\mathbf{H}(t)=(H_1(t),H_2(t))$ 是热流方程 (3.1) 的解, 则

$$\Big(\tilde\triangle-\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Theta^2\ge0, \tag{3.5}$$

且

$$\Big(\widetilde{\triangle}-\frac{\partial}{\partial t}\Big)Tr(\theta_1+\theta_2)=0, \tag{3.6}$$

其中, 记

$$\theta_1=\sqrt{-1}\Lambda F_{H_1}+\frac{1}{2}\phi\circ\phi^{*H}-\tau_1 Id_{E_1},\quad \theta_2=\sqrt{-1}\Lambda F_{H_2}-\frac{1}{2}\phi^{*H}\circ\phi-\tau_2 Id_{E_2}. \tag{3.7}$$

证明 由直接的计算, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\theta_1&=\sqrt{-1}\Lambda\bar{\partial}_{E_1}\Big(\partial_{H_1}\Big(h_1^{-1}\frac{dh_1}{dt}\Big)\Big)-\frac{1}{2}\phi h_2^{-1}\tfrac{dh_2}{dt}\phi^{*H}+\frac{1}{2}\phi\phi^{*H}h_1^{-1}\frac{dh_1}{dt},\\ \frac{\partial}{\partial t}\theta_2&=\sqrt{-1}\Lambda\bar{\partial}_{E_2}\Big(\partial_{H_2}\Big(h_2^{-1}\frac{dh_2}{dt}\Big)\Big)+\frac{1}{2}h_2^{-1}\frac{dh_2}{dt}\phi^{*H}\phi-\frac{1}{2}\phi^{*H}h_1^{-1}\frac{dh_1}{dt}\phi,\end{aligned} \tag{3.8}$$

且

$$\begin{aligned}\tilde{\triangle}|\theta_i|^2_{H_i}=\;&2\mathrm{Re}\,\langle -2\sqrt{-1}\Lambda\bar{\partial}_{E_i}\partial_{H_i}\theta_i,\theta_i\rangle_{H_i}+\mathrm{Re}\,\langle[2\sqrt{-1}\Lambda F^{1,1}_{H_i},\theta_i],\theta_i\rangle_{H_i}\\ &+2|\partial_{H_i}\theta_i|^2_{H_i}+2|\bar{\partial}_{E_i}\theta_i|^2_{H_i}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

利用 (3.8), (3.9) 式, 可以得到

$$\begin{aligned}\Big(\widetilde{\triangle}-\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Theta^2=\;&2\sum_{i=1}^{2}|\nabla\theta_i|^2_{H_i}+\{|\phi^{*H}\theta_1|^2-2<\theta_2\phi^{*H},\phi^{*H}\theta_1>+|\theta_2\phi^{*H}|^2\}\\ &+\{|\phi\theta_2|^2-2\langle\theta_1\phi,\phi\theta_2\rangle+|\theta_1\phi|^2\}\geq 0.\end{aligned}$$

式子 (3.6) 可由 (3.8), (3.9) 式直接得到.

命题 3.2 设 $\mathbf{H}(t)=(H_1(t),H_2(t))$ 是热流方程 (3.1) 的解, 则存在正常数 C_1, 使得

$$\Big(\widetilde{\triangle}-\frac{\partial}{\partial t}\Big)|\phi|^2_H\geq 2|\partial_H\phi|^2+C_1|\phi|^4_H-\{|\tau_2-\tau_1|\}|\phi|^2_H. \tag{3.10}$$

证明 由直接的计算, 有

$$\Big(\widetilde{\triangle}-\frac{\partial}{\partial t}\Big)|\phi|^2_H=2|\partial_H\phi|^2_H+2|\phi\phi^{*H}|^2+2(\tau_2-\tau_1)|\phi|^2, \tag{3.11}$$

其中, 我们用到了 $\bar{\partial}_{E_2^*\otimes E_1}\phi=0$ 和 (3.2) 式. 另一方面, 我们可以验证

$$|\phi\phi^{*H}|^2_{H_1}\geq\frac{1}{r_2}|\phi|^4_{H_2}, \tag{3.12}$$

其中 r_2 是 E_2 的秩. 由上面的式子, 可以得到

$$\Big(\widetilde{\triangle}-\frac{\partial}{\partial t}\Big)|\phi|^2_H\geq 2|\partial_H\phi|^2+C_1|\phi|^4_H-\{|\tau_2-\tau_1|\}|\phi|^2_H. \tag{3.13}$$

接下来, 介绍 Hermite 度量空间的 Donalson “距离”.

定义 3.3 对于向量丛 E 上任意两个 Hermite 度量 H, K, 令

$$\sigma(H,K)=TrH^{-1}K+TrK^{-1}H-2\mathrm{rank}\,E. \tag{3.14}$$

显然, $\sigma(H,K)\geq 0$, 等号成立当且仅当 $H=K$. 这样, 可以把 σ 看成一个度量, 特别地, 若一列 H_t 依 C^0 拓扑收敛到 H, 当且仅当 $\mathrm{Sup}_M\sigma(H_t,H)\longrightarrow 0$.

设 $\mathbf{H}=(H_1,H_2)$, $\mathbf{K}=(K_1,K_2)$ 是两个 Hermite 度量. 定义它们之间的 Donaldson 距离为

$$\sigma(\mathbf{H},\mathbf{K})=\sum_{i=1}^{2}\sigma(H_i,K_i). \tag{3.15}$$

记 $\mathbf{h}=(h_1,h_2)$, 其中 $h_i=K_i^{-1}H_i$. 将 $-\sqrt{-1}\Lambda$ 作用到 (2.5) 式上, 在 E_i 丛中取迹, 有

$$Tr(\sqrt{-1}h_i(\Lambda F^{1,1}_{H_i}-\Lambda F^{1,1}_{K_i}))=-\frac{1}{2}\widetilde{\triangle}Trh_i+Tr(-\sqrt{-1}\Lambda\bar{\partial}_{E_i}h_ih_i^{-1}\partial_{K_i}h_i). \tag{3.16}$$

设 $\mathbf{H}(t)$, $\mathbf{K}(t)$ 是热流方程 (3.1) 的解, 用上面的公式, 可得

$$\begin{aligned}\Big(\widetilde{\triangle}-\frac{\partial}{\partial t}\Big)(Trh_1(t)+Trh_2(t)) &= 2\sum_{i=1}^{2}Tr(-\sqrt{-1}\Lambda\bar{\partial}_{E_i}h_ih_i^{-1}\partial_{K_i}h_i)\\ &\quad+Tr(h_1\phi h_2^{-1}\phi^{*K}h_1-h_1\phi\phi^{*K})+Tr(h_2\phi^{*K}\phi-\phi^{*K}h_1\phi)\\ &=2\sum_{i=1}^{2}Tr(-\sqrt{-1}\Lambda\bar{\partial}_{E_i}h_ih_i^{-1}\partial_{K_i}h_i)\\ &\quad+Tr(h_1\phi h_2^{-1}\phi^{*K}h_1-2h_1\phi\phi^{*K}+h_2\phi^{*K}\phi).\end{aligned}\tag{3.17}$$

相似的有

$$\begin{aligned}\Big(\widetilde{\triangle}-\frac{\partial}{\partial t}\Big)(Trh_1^{-1}(t)+Trh_2^{-1}(t)) &= 2\sum_{i=1}^{2}Tr(-\sqrt{-1}\Lambda\bar{\partial}_{E_i}h_i^{-1}h_i\partial_{H_i}h_i^{-1})\\ &\quad+Tr(h_1^{-1}\phi\phi^{*K}-2h_2^{-1}\phi^{*K}\phi+h_2^{-1}h_2^{-1}\phi^{*K}h_1\phi).\end{aligned}\tag{3.18}$$

另一方面, 容易验证

$$Tr(h_1\phi h_2^{-1}\phi^{*K}h_1-2h_1\phi\phi^{*K}+h_2\phi^{*K}\phi)\geq 0;\tag{3.19}$$

$$Tr(h_1^{-1}\phi\phi^{*K}-2h_2^{-1}\phi^{*K}\phi+h_2^{-1}h_2^{-1}\phi^{*K}h_1\phi)\geq 0.\tag{3.20}$$

利用上面的公式和文 [1, 5] 中的结论

$$Tr(-\sqrt{-1}\Lambda\bar{\partial}_{E_i}h_ih_i^{-1}\partial_{K_i}h)\geq 0,\quad Tr(-\sqrt{-1}\Lambda\bar{\partial}_{E_i}h_i^{-1}h_i\partial_{H_i}h^{-1})\geq 0,\tag{3.21}$$

得到下面的命题:

命题 3.4 设 $\mathbf{H}(t)$, $\mathbf{K}(t)$ 是热流方程 (3.1) 的解, 则

$$\Big(\widetilde{\triangle}-\frac{\partial}{\partial t}\Big)\sigma(\mathbf{H}(t),\mathbf{K}(t))\geq 0.\tag{3.22}$$

推论 3.5 设 $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$ 是两个 Hermite 度量, 满足 Coupled Vortex 方程 (2.8), 则

$$\widetilde{\triangle}\sigma(\mathbf{H},\mathbf{K})\geq 0.\tag{3.23}$$

4 定理的证明

设 $\bar{M}$ 是紧致 Hermite 流形, 带有非空边界 ∂M. Hermite 度量光滑, 且在边界上是非退化的. 全纯向量丛 $E=E_1\oplus E_2$ 定义在 $\bar{M}$ 上, 我们将通过热流方法来证明主要定理.

对于在 ∂M 上, 给定的值 φ, 我们考虑下面的发展方程

$$\begin{cases}H_1^{-1}\dfrac{\partial H_1}{\partial t}=-2\Big(\sqrt{-1}\Lambda F_{H_1}+\dfrac{1}{2}\phi\circ\phi^{*H}-\tau_1Id_{E_1}\Big),\\ H_2^{-1}\dfrac{\partial H_2}{\partial t}=-2\Big(\sqrt{-1}\Lambda F_{H_2}-\dfrac{1}{2}\phi^{*H}\circ\phi-\tau_2Id_{E_2}\Big),\\ H_i(t)|_{t=0}=K_i,\\ H_i|_{\partial M}=\varphi,\end{cases}\tag{4.1}$$

其中 $\mathbf{K}=(K_1,K_2)$ 是任意初始光滑的 Hermite 度量满足边界条件. 记 $h_i(t)=K_i^{-1}H_i(t)$, 则发

展方程 (4.1) 等价于

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_1}{\partial t} = -2\sqrt{-1}\Lambda\bar{\partial}_{E_1}\partial_{K_1}h_1 + 2\sqrt{-1}\Lambda(\bar{\partial}_{E_1}h_1h_1^{-1}\partial_{K_1}h_1) \\ \qquad\quad - 2\sqrt{-1}h_1\Lambda F_{K_1} + 2\tau_1h_1 - h_1\phi h_2^{-1}\phi^{*K}h_1, \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial t} = -2\sqrt{-1}\Lambda\bar{\partial}_{E_2}\partial_{K_2}h_2 + 2\sqrt{-1}\Lambda(\bar{\partial}_{E_2}h_2h_2^{-1}\partial_{K_2}h_2) \\ \qquad\quad - 2\sqrt{-1}h_2\Lambda F_{K_2} + 2\tau_2h_2 + \phi^{*K}h_1\phi, \\ h(0) = Id, \\ h|_{\partial M} = Id. \end{cases} \tag{4.2}$$

由于 (4.2) 是非线性严格抛物型方程组, 由标准抛物理论可得短时间存在性.

命题 4.1 对于充分小的 $\epsilon > 0$, 方程组 (3.1) 在短时间 $0 \le t < \epsilon$ 有光滑解 $\mathbf{H}(t) = (H_1(t), H_2(t))$.

设 $\mathbf{H}(t)$ 是发展方程 (3.1) 的解, 且 $h_i = K_i^{-1}H_i$, $i = 1, 2$, 则

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t}(\lg Trh_i)\Big| = \Big|\frac{Tr(\frac{\partial h_i}{\partial t})}{Trh_i}\Big| = 2\Big|\frac{Trh_i\theta_i}{Trh_i}\Big| \le 2|\theta_i|_{H_i} \tag{4.3}$$

和

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t}(\lg Trh_i^{-1})\Big| \le 2|\theta_i|_{H_i}, \tag{4.4}$$

其中 θ_i 由 (3.7) 式给出.

定理 4.2 设方程组 (3.1) 在短时间 $0 \le t < T$ 的光滑解是 $\mathbf{H}(t) = (H_1(t), H_2(t))$, 则当 $t \to T$ 时, $\mathbf{H}(t)$ 依 C^0 拓扑收敛到 $\mathbf{H}(T)$, $\mathbf{H}(T)$ 是连续的, 非退化的.

证明 对于给定 $\epsilon > 0$, 由在 $t = 0$ 处的连续性, 我们可以找到一个 δ, 使得对于 $0 < t$, $t' < \delta$,

$$\sup_M \sigma(\mathbf{H}(t), \mathbf{H}(t')) < \epsilon,$$

则由命题 3.4 和极大值原理, 可得对于所有的 $t, t' > T - \delta$,

$$\sup_M \sigma(\mathbf{H}(t), \mathbf{H}(t')) < \epsilon,$$

这说明了 $H_i(t)$ 是一致的 Cauchy 序列, 并且连续收敛到极限度量 $H_i(T)$, $i = 1, 2$. 根据命题 3.1, 知道 $|\theta_i|_{H_i}$ 是一致有界的. 由 (4.3), (4.4) 式可知 $\sigma(H_i(t), K_i(t))$ 是一致有界的, 所以 $H_i(T)$ 是非退化的度量.

类似和文 [1, 引理 19] 和 [12, 引理 4.3.2] 中的讨论一样, 容易验证下面引理:

引理 4.3 设 $H(t)$, $0 \le t < T$ 是近复 Hermite 流形 M 上复向量丛 E 中的一族单参数 Hermite 度量, 并且满足 Dirichlet 边界条件. 若当 $t \to T$ 时, $H(t)$ 依 C^o 拓扑收敛到连续度量 $H(T)$, 并且, 若 $\sup_M |\Lambda F_H^{1,1}|$ 对于 t 是一致有界的, 则 $H(t)$ 在 C^1 中一致有界, 且在 L_2^p (对于任意 $1 < p < \infty$) 中一致有界.

定理 4.4 任意给定初始 Hermite 度量 $\mathbf{K}$, 则发展方程 (3.1) 长时间 $0 \le t < \infty$ 存在唯一的解 $\mathbf{H}(t)$.

证明 首先证存在性. 命题 4.1 保证了解的短时间存在性. 设时间在 $0 \le t < T$ 中, 解 $\mathbf{H}(t)$ 存在. 由定理 4.2, 当 $t \to T$ 时, $\mathbf{H}(t)$ 依 C^o 拓扑收敛到连续度量 $H(T)$. 由前面讨论知道 $|\theta_i|_{H_i}$ 有界, 并且与 t 无关. 再由命题 3.2, 有

$$\Big(\widetilde{\triangle} - \frac{\partial}{\partial t}\Big)|\phi|_H^2 \ge 2|\partial_H\phi|^2 + C_1|\phi|_H^4 - |\tau_2 - \tau_1|\,|\phi|_H^2.$$

假设 $|\phi|_H^2$ 在 $M\times[0,T)$ 中的 (x_0,t_0) 点处取到极大值, 其中 $0<t_0<T$, $x_0\in M$. 若 $|\phi|^2(x_0,t_0)>\frac{|\tau_2-\tau_1|}{C_1}$, 则在 (x_0,t_0) 的邻域内, 有

$$\Big(\widetilde{\triangle}-\frac{\partial}{\partial t}\Big)|\phi|^2\geq 0,$$

这和热算子的极大值原理矛盾. 所以得到

$$|\phi|^2\leq \max\Big\{|\phi|_K^2,\frac{|\tau_2-\tau_1|}{C_1}\Big\}. \tag{4.5}$$

从而 $\sup_M|\Lambda F_{H_i}^{1,1}|_{K_i}^2$ 是不依赖于 t 而有界的, 其中 $i=1,2$. 所以, 由引理 4.3 $H_i(t)$ 在 C^1 拓扑中有界, 并且在 $L_2^p(1<p<\infty)$ 中关于 t 是一致有界的. 因为发展方程 (3.2) 关于 h_i 的一阶导数是二次的, 就可以应用 Hamilton 的方法 [13] 得到: $H_i(t)\to H_i(T)$ C^∞ 收敛, $i=1,2$, 且解可以连续的越过 T 时刻. 那么发展方程 (3.1) 的解 $\mathbf{H}(t)$ 就长时间存在.

下面证唯一性. 设 $\mathbf{H}'(t)$ 是带有相同初始 Hermite 度量 $\mathbf{K}$ 的发展方程 (3.1) 的另外一个解, 根据命题 3.4, 得到

$$\Big(\widetilde{\triangle}-\frac{\partial}{\partial t}\Big)\sigma(\mathbf{H}(t),\mathbf{H}'(t))\geq 0,$$

且 $\sigma(\mathbf{H},\mathbf{H}')|_{t=0}=0$, 由极大值原理, 有 $\sigma(\mathbf{H}(t),\mathbf{H}'(t))\equiv 0$, 即 $\mathbf{H}(t)\equiv\mathbf{H}'(t)$. 唯一性证毕.

主要定理的证明 对于在 ∂M 给定值 φ, 考虑发展方程 (3.1), 根据定理 3.4, 知道方程 (3.1) 的解存在并且唯一. 接下来, 我们要证明 $\mathbf{H}(t)$ 收敛到满足 Coupled Vortex 方程的 Hermite 度量. 由直接计算, 对于 $\mathrm{End}(E_i)$ 中的截面 θ_i, 有 $|\nabla_H\theta_i|_H^2\geq|\nabla|\theta_i|_H|^2$.

利用 (3.5) 式

$$\Big(\widetilde{\triangle}-\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Theta^2=2\Theta\Big(\widetilde{\triangle}-\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Theta+2|\nabla\Theta|^2\geq 2\sum_{i=1}^2|\nabla\theta_i|_{H_i}^2,$$

从而

$$2\Theta\Big(\widetilde{\triangle}-\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Theta\geq 2\bigg(\sum_{i=1}^2|\nabla\theta_i|_{H_i}^2-|\nabla\Theta|^2\bigg)\geq 2\sum_{i=1}^2(|\nabla\theta_i|_{H_i}^2-|\nabla|\theta_i|_{H_i}|^2)\geq 0,$$

得到

$$\Big(\widetilde{\triangle}-\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Theta\geq 0. \tag{4.6}$$

我们首先解 M 上的 Dirichlet 问题 (见文 [14, 第 5 章, 命题 1.8])

$$\begin{cases}\widetilde{\triangle}v=-\Theta(x,0),\\ v|_{\partial M}=0.\end{cases} \tag{4.7}$$

令

$$\omega(x,t)=\int_0^t\Theta(x,s)ds-v(x).$$

由 (4.6), (4.7) 式和 H_i 满足的边界条件, 得到: 对于 $t>0$, $\Theta(x,t)$ 在 M 的边界上消失. 容易验证 $\omega(x,t)$ 满足

$$\begin{cases}\Big(\widetilde{\triangle}-\frac{\partial}{\partial t}\Big)\omega(x,t)\geq 0,\\ \omega(x,0)=-v(x),\\ \omega(x,t)|_{\partial M}=0.\end{cases} \tag{4.8}$$

再由极大值原理, 对于任意 $x \in M$, $0 < t < \infty$, 有

$$\int_0^t \Theta(x,s)ds \leq \sup_{y\in M} v(y), \tag{4.9}$$

令 $t_1 \leq t \leq t_2$, $\bar{h}_i(x,t) = H_i^{-1}(x,t_1)H_i(x,t)$, 容易验证

$$\bar{h}_i^{-1}\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial t} = -2\theta_i, \tag{4.10}$$

从而 $\frac{\partial}{\partial t}\log tr(\bar{h_i}) \leq 2|\theta_i|_{H_i}$.

从上面的式子, 可得

$$tr(H_i^{-1}(x,t_1)H_i(x,t)) \leq r\exp\left(2\int_{t_1}^t |\theta_i|_{H_i}ds\right). \tag{4.11}$$

相似地估计 $tr(H_i^{-1}(x,t)H_i(x,t_1))$. 得到

$$\sigma(H(x,t),H(x,t_1)) \leq 2r\left(\exp\left(2\int_{t_1}^t |\theta_i|_{H_i}ds\right)-1\right). \tag{4.12}$$

由 (4.9), (4.12) 式可知：当 $t\to\infty$, $H(t)$ 依 C^0 拓扑收敛于连续度量 H_∞. 再用引理 4.3, $H(t)$ 在 C^1 中有界, 并且在 L_2^p $(1<p<\infty)$ 中关于 t 一致有界. 另一方面, $|\theta_i|_{H_i}$ 是一致有界的. 则标准的椭圆正则性理论保证了：在 C_∞ 拓扑中, 存在子列 $H_t \to H_\infty$. 由 (4.9) 式, H_∞ 就是要求的满足边界条件的 Hermite 度量. 唯一性可由推论 3.5 和极大值原理得到. 主要定理证毕.

致谢 衷心感谢沈一兵教授, 张希教授给予的悉心指导.

参 考 文 献

[1] Donaldson S. K., Anti-self-dual Yang–Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles, *Proc. London Math. Soc.*, 1985, **50**(3): 1–26.

[2] Donaldson S. K., Infinite determinants, stable bundles and curvature, *Duke. Math.*, 1987, **54**: 231–247.

[3] Kobayashi S., Curvature and stability of vector bundles, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 1982, **58**: 158–162.

[4] Narasimhan M. S., Seshadri C. S., Stable and unitary vector bundles on compact Riemann surfaces, *Ann. Math.*, 1965, **82**: 540–567.

[5] Siu Y. T., Lectures on Hermitian–Eistein metrics for stable bundles and Kahler-Einstein metrics, *Birkhauser, Basel-Boston*, 1987, MR 89d: 32020.

[6] Uhlenbeck K. K., Yau S. T., On existence of Hermitian–Yang–Mills connection in stable vector bundles, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1986, **39S**: 257–293.

[7] Bradlow S. B., Vortices in holomorphic line bundles over closed Kähler manifolds, *Commun. Math. Phys.*, 1990, **135**: 1–17.

[8] Bradlow S. B., Special metrics and stability for holomorphic bundles with global sections, *J. Diff. Geom.*, 1991, **33**: 169–213.

[9] Garcia-Prada O., Dimensional reduction of stable bundles, vortices and stable pairs, *Int. J. Math.*, 1994, **5**: 1–52.

[10] Donaldson S. K., Boundary value problems for Yang-Mills fields, *Journal of Geometry and Physics*, 1992, **8**: 89–122.

[11] Zhang X., Hermitian–Einstein metrics on holomorphic vector bundles over Hermitian manifolds, *Journal of Geometry and Physics*, 2005, **53**: 315–335.

[12] Jost J., Nonlinear methods in Riemannian and Kählerian geometry, *DMV Seminar*, Vol.10, Basel: Birkhäuser, 1988.

[13] Hamilton R. S., Harmonic maps of manifolds with boundary, Lecture Notes in Math., **471**, New York: Springer, 1975.

[14] Mundet i Riera I., A Hitchin–Kobayashi correspondence for Kähler fibrations, *J. Reine Angew. Math.*, 2000, **528**: 41–80.