關於介子理論裡 S 方陣之進一步的研討*†

胡 寧 (北京大學物理系，中國科學院近代物理研究所)

于 敏 (中國科學院近代物理研究所)

本文確定在積分含有文中所述及的函數 $D_F'(k)$ 時的積分路徑.

在前文“介子理論裡的 S 方陣”中[註 1] 曾證明在某些介子理論中，只要適當的考慮虛介子的放射效應. 我們可以利用質量及電荷重正化觀念去掉這些理論中的 S 陣中存在的發散困難，這些效應的結果等於把

$$D_F(\boldsymbol{k}) = \frac{2i}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{\boldsymbol{k}^2-\kappa^2} \tag{1}$$

代成

$$D_F'(\boldsymbol{k}) = \frac{D_F(\boldsymbol{k})}{1-\frac{1}{2}D_C(\boldsymbol{k})\,D_F(\boldsymbol{k})} \tag{2}$$

$D_C(\boldsymbol{k})$ 具有因子 g^2 並代表放射效應. 這個理論的進一步的運用，發生積分路徑的混淆.[註 2] 本文之目的在討論並澄清這種混淆. 現假設我們計算一個核子的自能積分. 在贋標介子贋矢耦合理論中此積分是

$$I = -g^2\,\frac{(2\pi)^4}{4\kappa^2}\int D_F'(\boldsymbol{k})\,S_F(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\,d^4k, \tag{3}$$

這裏

$$S_F(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}) = \frac{2i}{(2\pi)^4}\,\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}+m}{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})^2-m^2}. \tag{4}$$

* 1951 年 12 月 27 日收到.

† 中國科學院近代物理研究所論著彙刊甲集第 11 號.

[註 1] 胡寧, 中國物理學報 **8** (1951), 40.

[註 2] 于敏, “核子的非正常磁矩” 在付印中.

在前文中曾計算過 $D_C(\boldsymbol{k})$.

$$D'_F(\boldsymbol{k}) \cong \frac{2i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\boldsymbol{k}^2 - \kappa^2 + \frac{g^2}{\pi\kappa^2}\left\{4m^2\boldsymbol{k}^2\left(1-\frac{\theta}{\tan\theta}\right) - \frac{1}{3}\boldsymbol{k}^4\right\}} \tag{5}$$

$\sin^2\theta = \frac{\boldsymbol{k}^2}{4m^2}$. 在 (5) 中具有 $\frac{\kappa^2}{4m^2}$ 數量級的項已被忽略. 在做 (3) 之積分以前, 我們必需先知道 (5) 裏函數之解析性質. 因爲多值函數 $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{4m^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $D'_F(\boldsymbol{k})$ 有四支點, $k_0 = \pm K$, 和 $k_0 = \pm(K^2+4m^2)^{\frac{1}{2}}$ 在 k_0 複數平面之實軸上. 這裏 $K^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$. $D'_F(\boldsymbol{k})$ 又有四個極點. 其中兩個在 $k_0 = \pm(K^2+\kappa^2)^{\frac{1}{2}}$ (見前文方程式 (15b) 和 (14)). 另外兩個極點大致適合下列方程式:

$$1 + \frac{g^2}{\pi\kappa^2}\left\{4m^2\left(1-\frac{\theta}{\tan\theta}\right) - \frac{1}{3}(k_0^2 - K^2)\right\} = 0. \tag{6}$$

茲考慮 g^2 非常小的情形. 假設 (6) 式的解法是 $k_0 = \pm(a+ib)$, 其中 a 和 b 都是正實數, 並且

$$a \gg (K^2+4m^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad a \gg b. \tag{7}$$

從以下的計算中我們將發現這種假設是可能的 (只要 g^2 甚小). 在 $k_0 = \pm(a+ib)$ 附近

$$\theta = \frac{\pi}{2} + i\ln\left[\frac{1}{2m}(\sqrt{k_0^2 - K^2}) + \sqrt{k_0^2 - K^2 - 4m^2})\right]. \tag{8}$$

因爲 $\frac{|k_0^2 - K^2|}{4m^2} \gg 1$, (8) 之第二項非常大, 所以

$$\tan\theta \approx i. \tag{9}$$

將 (8), (9) 代入 (6), 得

$$\frac{\pi\kappa^2}{g^2} - \frac{1}{3}(k_0^2 - K^2) + 4m^2\left\{1 + \frac{\pi}{2}i\right.$$

$$\left. - \ln\left[\frac{1}{2m}(\sqrt{k_0^2 - K^2} + \sqrt{k_0^2 - K^2 - 4m^2})\right]\right\} = 0.$$

代入 $k_0 = \pm(a + ib)$, 得

$$a^2 \cong K^2 + \frac{3\pi\kappa^2}{g^2},$$

$$b \cong 3m^2\frac{\pi}{a}. \tag{10}$$

因此 g^2 非常小時 a 和 b 都是正的並且也可以適合 (7).

在實際問題中, g^2 並不小, 所以以上的估計不見得能用. 平常 b 可以是正的也可以是負的. 但是從下面的討論中我們可以看出, 當 b 是正值時最難選擇積分路徑, 因此這裏不妨考慮 b 是正值的情形. 當然 g^2 不小, 攝動方法也許不能應用了. 既然本文之目的在假設攝動方法能用情形下, 如何免除發散困難, 只有 g^2 非常小我們才感興趣.

當積分 (3) 中之 dk_0 時, 積分路徑之選擇要非常小心. 為此我們把 $D'_F(\boldsymbol{k})$ 代以原級數

$$D_F(\boldsymbol{k}) + \frac{1}{2}D_F(\boldsymbol{k})D_C(\boldsymbol{k})D_F(\boldsymbol{k}) + \frac{1}{4}D_F(\boldsymbol{k})D_C(\boldsymbol{k})D_F(\boldsymbol{k})D_C(\boldsymbol{k})D_F(\boldsymbol{k}) + \cdots \tag{11}$$

如將 (11) 代入 (3) 積分仍舊發散. 但是 (11) 可以幫助我們選擇積分路徑. 取 (11) 中任一項. 根據費曼理論, 只要我們把 m 和 κ 看作具有小的負虛數部分, 在 k_0 面的積分便可以取實軸. 為積分路徑因之在 $D'_F(\boldsymbol{k})$ 中之支點 $k_0 = \pm(K^2 + 4m^2)^{\frac{1}{2}}$ 和極點 $k_0 = \pm(K^2 + \kappa^2)^{\frac{1}{2}}$ 並不在積分路徑上. 現在還需要考慮另外二支點 $k_0 = \pm K$. 因為當 x_0 軸反過來時, S 陣不變, 而在 S 陣中 x_0 只以 $e^{ik_0x_0}$ 形式出現. 所以當 k_0 變號時, S 陣也不會變. 因之在 k_0 面的積分路綫, 必須對原點對稱. 適合這個要求的只有兩個可能: *(i)* 積分路綫經過 $k_0 = -K$ 的下面, $k_0 = +K$ 的上面. *(ii)* 路綫經過 $k_0 = -K$ 的上面, $k_0 = K$ 的下面, 從 (8) 我們看出 $\theta/\tan\theta$ 的值在 *(i)* 和 *(ii)* 上都相同. 所以用 *(i)* 和 *(ii)* 的積分結果相同. 下面我們將選定 *(i)* 做我們的積分路綫.

當然只要不通過奇點 Γ 曲線可以任意變形而不影響積分之數值, 當 $D'_F(\boldsymbol{k})$ 取 (11) 式時, 積分路徑 Γ 與 Γ' 毫無區別 (圖 1), 因為 $k_0 = \pm(a + ib)$ 不是 (11) 中任一項的奇點. 不過當用 (5) 代替 (11) 時, 積分路徑 Γ 與 Γ' 便有很大區別

了. 因爲 $k_0=\pm(a+ib)$ 現在是函數 (5) 的奇點，這一點並不奇怪，因爲在前文中我們就已知道當 k_0 相當大時 (2) 並不等於 (11). 決定積分路徑是 Γ 還是 Γ' 還需要進一步的考慮.

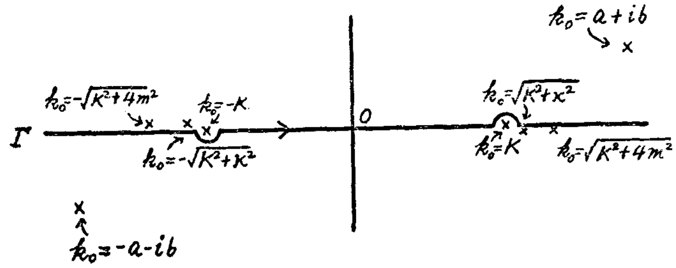

圖 1.

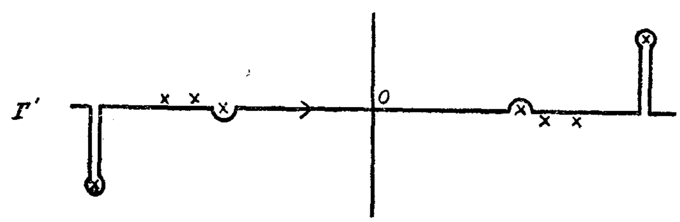

圖 2.

回到積分 (3). 設 Γ_1 代表在 k_0 面上沿着虛軸之積分. 當 Γ 是 (3) 中之積分路徑時，有

$$
\begin{aligned}
I = -g^2\frac{(2\pi)^4}{4\kappa^2}\Big\{&\int_{\Gamma_1} D'_F(\boldsymbol{k})\gamma_5\boldsymbol{k}\,S_F(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\gamma_5\boldsymbol{k}\,d^4k \\
&+\int dk_1\,dk_2\,dk_3\oint_{\pm(a+ib)} dk_0\,D'_F(\boldsymbol{k})\gamma_5\boldsymbol{k}\,S_F(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\gamma_5\boldsymbol{k} \\
&+\int dk_1\,dk_2\,dk_3\oint_{\kappa'} dk_0\,D'_F(\boldsymbol{k})\gamma_5\boldsymbol{k}\,S_F(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\gamma_5\boldsymbol{k}\Big\}. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

$\oint_{\pm(a+ib)}$ 指順着兩個以 $\pm(a+ib)$ 爲中心的小圓的積分. $k_0=\kappa'>0$ 是 $S_F(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})$ 的移極點,

$$\kappa' = p_0 - [(p_1 - k_1)^2 + (p_2 - k_2)^2 + (p_3 - k_3)^2 - m^2]^{\frac{1}{2}}.$$

現在,

$$\int d\,k_1\,d\,k_2\,d\,k_3 \oint_{\pm(a+ib)} d\,k_0\,D'_F(\boldsymbol{k})\,\gamma_5\,\boldsymbol{k}\,S_F(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\,\gamma_5\,\boldsymbol{k} \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K^2\,d\,k_1\,d\,k_2\,d\,k_3}{K^2}, \tag{13}$$

$$\int d\,k_1\,d\,k_2\,d\,k_5 \oint_{\kappa'} dk_0\,D'_F(\boldsymbol{k})\,\gamma_5\,\boldsymbol{k}\,S_F(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\,\gamma_5\,\boldsymbol{k} \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K^2\,d\,k_1\,d\,k_2\,d\,k_3}{K^4}. \tag{14}$$

代 k_0 以 $i k_4$, 得

$$\int_{\Gamma_1} D'_F(\boldsymbol{k})\,\gamma_5\,\boldsymbol{k}\,S_F(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\,\gamma_5\,\boldsymbol{k}\,d^4 k \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z^2\,d\,k_1\,d\,k_2\,d\,k_3\,d\,k_4}{Z^6}, \tag{15}$$

$Z^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2$. (14)(15) 線形發散, (13) 三級發散. (14)(15) 與電動力學中之電子自能發散積分同一型態, 但是 (13) 之發散程度比電動力學中的嚴重得多. 如果用 Γ' 代替 Γ (13) 便不復出現了, 因之爲了可以用質量及電荷之重正化去掉發散困難, 我們選擇積分路徑 Γ'.

(5) 式中之 $\left(1-\frac{\theta}{\tan\theta}\right)$ 一項使積分之計算異常複雜. 當 $\boldsymbol{k}^2$ 小時, 這項不重要, 當 $\boldsymbol{k}^2$ 非常大時, 這項比起 $\boldsymbol{k}^4$ 項來又可以忽略. 因之我們最好將 $D'_F(\boldsymbol{k})$ 對這項展開.

$$D'_F(\boldsymbol{k}) = D''_F(\boldsymbol{k}) + D''_F(\boldsymbol{k})\,D''_C(\boldsymbol{k})\,D''_F(\boldsymbol{k}) + \cdots; \tag{16}$$

這裏

$$D''_F(\boldsymbol{k}) = \frac{2\,i}{(2\,\pi)^4}\,\frac{1}{\boldsymbol{k}^2 - \kappa^2 - \frac{g^2}{3\,\pi\,\kappa^2}\,\boldsymbol{k}^4}, \tag{17}$$

$$D''_C(\boldsymbol{k}) = -\frac{g^2\,4\,m^2}{\pi\,\kappa^2}\,\boldsymbol{k}^2\left(1-\frac{\theta}{\tan\theta}\right). \tag{18}$$

很容易看出用 (16) 式之右方代 $D'_F(\boldsymbol{k})$ 對 S 陣之收斂無影響. 在攝動方法中, 我們可以把 (16) 式中第二項以下包含在高次攝動中, 因爲他們包含 g^2 之高次羃.

作爲本文之結尾，我們指出利用現在的理論核子間力不再有 $1/r^3$ 奇點. 在平常介子理論中，必須忽略核子之反衝才可得到核子間力. 這點相當於忽略 $D_F(\boldsymbol{k})$ 之 k_0^2（代 $\boldsymbol{k}^2$ 以 $-K^2$）. 因之得

$$V(r)=g^2\frac{2\pi}{2\kappa^2}\int(\sigma^{(1)}K)\,[D_F(\boldsymbol{k})]_{\boldsymbol{k}^2=-K^2}(\sigma^{(2)}K)\,e^{i(Kr)}\,d^3k, \tag{19}$$

這裏 $r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ 代表二核子間之距離. $\sigma^{(1)}$ $\sigma^{(2)}$ 分別是第一核子和第二核子之自旋陣. $(\sigma^{(1)}K)=\sigma_x^{(1)}K_x+\sigma_y^{(1)}K_y+\sigma_z^{(1)}K_z$, $(\sigma^{(2)}K)=\sigma_x^{(2)}K_x+\sigma_y^{(2)}K_y+\sigma_z^{(2)}K_z$ 代表三度空間中之無向積. 經簡單計算得

$$V(r)=\frac{g^2}{k^2}(\sigma^{(1)}\nabla)(\sigma^{(2)}\nabla)\frac{e^{-kr}}{4\pi r}, \tag{20}$$

這裏 $(\sigma\nabla)=\sigma_x\dfrac{\partial}{\partial x}+\sigma_y\dfrac{\partial}{\partial y}+\sigma_z\dfrac{\partial}{\partial z}$. 當 r 很小時 (20) 像函數 $\dfrac{1}{r^3}$. 按本文之理論. $D_F(\boldsymbol{k})$ 應代以 $D_F'(\boldsymbol{k})$ 或 $D_F''(\boldsymbol{k})$. 由 (17) 我們可以得

$$[D_F''(\boldsymbol{k})]_{\boldsymbol{k}^2=-K^2}=-\frac{2i}{(2\pi)^4}\frac{1}{K^2+\kappa^2+\dfrac{g^2}{3\pi\kappa^2}K^4}\simeq\frac{1}{K^2-\kappa^2}-\frac{1}{K^2-\dfrac{3\pi\kappa^2}{g^2}}. \tag{21}$$

以上式代 (19) 中之 $D_F(\boldsymbol{k})$, 得

$$V(r)=\frac{g^2}{k^2}(\sigma^{(1)}\nabla)(\sigma^{(2)}\nabla)\left\{\frac{1}{4\pi r}\left(e^{-kr}-e^{-\sqrt{3\pi}\,kr/g}\right)\right\}. \tag{22}$$

當 r 甚小時，與函數 $1/r$ 相似.

自然我們可以討論用攝動方法求核子間力並且忽略核子之反衝也許是大有問題的. 但是以上的計算至少表示如果在介子理論中，平常常用的討論氫二核的方法能用的話，現在的理論不再像平常的介子理論需要在短距離引入割斷了.