第 18 卷第 10 期　　物　理　学　报　　Vol. 18, No. 10
1962 年 10 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　October, 1962

利用色散关系計算单个粒子的格林函数*

胡　　宁
(北京大学物理系)

提　　要

本文利用核子与反核子散射振幅的解析性和么正性导出单个虚介子的格林函数. 在計算中不需要进行重正化手續

近几年来，用色散关系处理基本粒子的碰撞問題引起人們广泛的注意. 在这个处理方法里，人們主要的依据是：(1)碰撞和散射振幅是能量和动量交换变数的解析函数；(2)这些振幅满足么正条件. 除此以外，人們不需要知道碰撞粒子間的相互作用拉格朗日量. 比如，在 π-π 散射問題里，由色散关系得出 S 波为主和 P 波为主的两种解[1]. 現在知道这两种解相应于两种不同的作用拉格朗日量[2]. 从这些解还看出相应的作用拉格朗日量可以是不可重正化的.

色散关系的一个重要的应用是唯象的揭示出各种物理观察量之間的联系. 在这一方面色散关系获得了肯定的成就，我們将不在这里再作討論. 色散关系在另一方面的应用是如上面所述利用它来找出碰撞問題的解. 在很多例子里我們发現这样得出的近似解，是和通常量子場論方法得出的結果是一致的. 但是色散关系方法具有一个显著的优点，就是它不需要进行重正化. 同时也必須指出，由于目前尚不能够严格的写出色散关系在角动量表象中的表达式[3]，这使得通常“ND^{-1}”展开解的高次項的可靠性存在疑問.

通常色散关系方法只能应用于碰撞問題. 在这篇短文中，我們将推广这个方法来处理虚跃迁問題. 作为一个具体的例子，我們来考虑一个虛介子的格林函数. 在通常量子場論里，在計算这个函数时，必須进行重正化手續. 在我們的計算里将不需要进行这个手續. 我們的結果和通常量子場論 Tamm-Dancoff 型近似所得的結果是一致的. 通过我們的計算，可以更清楚的看出重正化計算結果里所存在的不确定的因素. 再者，我們能够用色散关系处理一个虛跃迁过程，这本身也是一个有兴趣的結果.

为着計算单介子的格林函数，我們首先考虑核子和反核子的散射問題. 命 p 和 $\bar{p}$ 分別代表核子和反核子的四度动量，在弹性近似下，散射矩陣元 $\langle p\bar{p}'|T|p\bar{p}\rangle$ 满足下面么正条件：

$$\langle p'\bar{p}'|T^+|p\bar{p}\rangle - \langle p'\bar{p}'|T|p\bar{p}\rangle = i(2\pi)^4\sum_{p''\bar{p}''}\delta^4(p+\bar{p}-p''-\bar{p}'')\times \times\langle p'\bar{p}'|T^+|p''\bar{p}''\rangle\langle p''\bar{p}''|T|p\bar{p}\rangle. \tag{1}$$

在 (1) 中我們曾忽略去两个介子以上的态和核子对再加上任意个介子的态的貢献. 所以在計算 T 矩陣我們也只考虑单介态和一对核子和反核子态的貢献. 于是相应的 Feynman

* 1962年3月6日收到.

图为在核子对的始态和末态頂点之間連起一根介子綫，然后在介子綫中插入任意个数的核子圈(由核子及反核子綫組成)．对于这样类型的 Feynman 图，T 矩陣可写为

$$\langle p'\bar{p}'|T|p\bar{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^6}\left[\frac{m^4}{p_0'\bar{p}_0'p_0\bar{p}_0}\right]^{\frac{1}{2}}(\bar{u}_{p'}\gamma_5 v_{\bar{p}'})(\bar{v}_{\bar{p}}\gamma_5 u_p)\frac{F(k^2)}{k^2-\mu^2}, \tag{2}$$

式中 $v_{\bar{p}}$ 和 u_p 代表反核子和核子的 Dirac 波函数，$k^2=(p+\bar{p})^2=(p'+\bar{p}')^2$，$p_0$ 和 $\bar{p}_0$ 分别为 p 和 $\bar{p}$ 的第四分量．m 为核子的靜止质量．

在(1)和(2)中沒有标出核子和反核子的自旋和同位旋变数．为簡单起見，我們可以只考慮中性的 π 介子，这样就可以不考虑同位旋自由度．我們的結果可以很容易的推广到介子有不同电荷的情形．

在完成这个工作以后，我們看到 Nishijima[3a] 等人已有和我們类似的思想．但他們利用么正条件的方式和我們的不同．他們把么正条件展开成微扰級数，因此他們利用么正条件的目的是把高級矩陣元的虛部用低級近似的矩陣元表达出来，而我們則直接利用弹性近似得出 $F(k^2)$，而不需要对相互作用的动力学性质作任何假定．我們的結果相应于 Tamm-Dancoff 近似而不相应于微扰論計算．

在得出我們的結果以后，我們可以进一步在 (1) 中引入非弹性的修正，再重复上面的計算，我們可以得出进一步准确的結果．但是正象其他用色散关系所处理的問題一样，当引入非弹性效应以后，計算将变得很复杂．和其他色散关系的解一样，我們的解有包含有不确定性．这是由于我們在处理过程中并沒有引入有关 π 介子和核子作用的任何动力学的性质的假定．

在(1)中命 $p=p'$，$\bar{p}=\bar{p}'$，代入(2)并对 p''，$\bar{p}''$ 求和，在两边消去实数的共同因子

$$(\bar{u}_p\gamma_5 v_{\bar{p}})(\bar{v}_{\bar{p}}\gamma_5 u_p) = |\bar{u}_p\gamma_5 v_{\bar{p}}|^2,$$

再取质心坐标使得 $k^2=4p_0^2=4\bar{p}_0^2$，$|\mathbf{p}|=\frac{1}{2}(k^2-4m^2)^{\frac{1}{2}}$ 最后我們由 (1) 得到下面关系：

$$\operatorname{Im} F(k^2) = -\frac{1}{16\pi}\frac{[k^2(k^2-4m^2)]^{1/2}}{(k^2-\mu^2)}|F(k^2)|^2 \quad (k^2>4m^2)$$

$$\operatorname{Im} F(k^2) = 0, \quad (k^2<4m^2).$$

上面結果指出，我們可以引入 $D(k^2)=1/F(k^2)$，上式变为

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} D(k^2) &= \frac{1}{16\pi}\frac{[k^2(k^2-4m^2)]^{\frac{1}{2}}}{(k^2-\mu^2)}, \quad (k^2>4m^2),\\ \operatorname{Im} D(k^2) &= 0, \quad (k^2<4m^2).\end{aligned} \tag{3}$$

当 $k^2\to\mu^2$ 时，$D(k^2)$ 趋于一个常数 g^{-2}．由(3)我們看到 $D(k^2)$ 在 k^2 的复平面內 $k^2>4m^2$ 部分的实軸上有一根割綫．如果按照 (1) 假定 $D(k^2)$ 是 k^2 的解析函数，那么 $D(k^2)$ 满足下面色散关系：

$$D(k^2) = g^{-2} - \frac{1}{\pi}(k^2-\mu^2)\int_{4m^2}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} D(k'^2)\,dk'^2}{(k'^2-\mu^2)(k'^2-k^2-i\epsilon)}, \tag{4}$$

代入(3)式得

$$D(k^2) = g^{-2} - \frac{1}{\pi}(k^2-\mu^2)\int_{4m^2}^{\infty}\frac{[k'^2(k'^2-4m^2)]^{\frac{1}{2}}\,dk'^2}{(k'^2-\mu^2)^2(k'^2-k^2-i\epsilon)}, \tag{5}$$

(5)式是(4)的最簡单的解. 上式右边的积分可写为

$$J \equiv \frac{1}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{[k'^2(k'^2-4m^2)]^{\frac{1}{2}}\,dk'^2}{(k'^2-\mu^2)^2(k'^2-k^2-i\epsilon)} = -\frac{\partial}{\partial\mu^2}\frac{1}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{[k'^2(k'^2-4m^2)]^{\frac{1}{2}}\,dk'^2}{(k'^2-\mu^2)(k'^2-k^2-i\epsilon)} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\mu^2}\frac{1}{k^2-\mu^2}\{\alpha(k^2)-\alpha(\mu^2)\} =$$

$$= -\frac{1}{(k^2-\mu^2)^2}\{\alpha(k^2)-\alpha(\mu^2)\} + \frac{1}{k^2-\mu^2}\frac{\partial}{\partial\mu^2}\alpha(\mu^2), \tag{6}$$

式中

$$\alpha(k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{[k'^2(k'^2-4m^2)]^{\frac{1}{2}}}{k'^2-k^2-i\epsilon}\,dk'^2. \tag{7}$$

經过簡单的計算得(略去对(6)式无貢献的一个常数項)

$$\alpha(k^2) = \frac{2}{\pi}[k^2(k^2-4m^2)]^{\frac{1}{2}}\left\{\ln\frac{(k^2)^{\frac{1}{2}}+(k^2-4m^2)^{\frac{1}{2}}}{2m} - \frac{\pi}{2}i\right\}, \quad (k^2 > 4m^2),$$

$$\alpha(k^2) = \frac{2}{\pi}[k^2(4m^2-k^2)]^{\frac{1}{2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{k^2}{4m^2-k^2}}, \quad (4m^2 > k^2 > 0),$$

$$\alpha(k^2) = \frac{2}{\pi}[k^2(4m^2-k^2)]^{\frac{1}{2}}\ln\frac{(-k^2)^{\frac{1}{2}}+(4m^2-k^2)^{\frac{1}{2}}}{2m}, \quad (k^2 < 0). \tag{8}$$

由(5)得

$$\frac{F(k^2)}{k^2-\mu^2} = \frac{g^2}{(k^2-\mu^2)[1-g^2(k^2-\mu^2)J(k^2)]}, \tag{9}$$

式中 g 可看成是核子和介子的作用常数. 当 g^2 很小时，上式可以对 g^2 展开，我們得到

$$g^{-2}F(k^2) = 1 + g^2(k^2-\mu^2)^2J(k^2) + \cdots, \tag{10}$$

上式右边第二項正是介子在贋标量耦合下的二級自能积分在重正化以后所給出的輻射修正. (9)式正是用 Tamm-Dancoff 鏈状近似所得的介子格林函数.

从上面結果我們看到，用色散关系方法得到的介子格林函数和通常量子場論方法所得的結果相同，但在我們的推导里不需要进行重正化步驟. 在我們的推导里，我們只假定前面所述的条件(1)和(2)以及(3). 这三个条件完全沒有牵涉到这个体系的力学性質.

(5)式并不是滿足(1)，(2)和(3)的最普遍的解. 作为 Wigner R 函数，$F(k^2)$ 可以在正实軸上有任意多个零点，即 $D(k^2)$ 可以在正实軸上有任意多个极点. 如果 $D(k^2)$ 在无穷远有一个极点，那么(5)应为

$$D(k^2) = g^{-2} + a(k^2-\mu^2) - \frac{1}{\pi}(k^2-\mu^2)\int_{4m^2}^{\infty}\frac{[k'^2(k'^2-4m^2)]^{\frac{1}{2}}\,dk'^2}{(k'^2-\mu^2)^2(k'^2-k^2-i\epsilon)}, \tag{11}$$

(5)式为上式在 $a=0$ 时的特例. 当 $a=-1/(12m^2)$ 时，上式变为

$$D(k^2) = g^{-2} - \frac{1}{12m^2}(k^2-\mu^2) - \frac{1}{\pi}(k^2-\mu^2)\int_{4m^2}^{\infty}\frac{[k'^2(k'^2-4m^2)]^{\frac{1}{2}}\,dk'^2}{(k'^2-\mu^2)^2(k'^2-k^2-i\epsilon)}, \tag{12}$$

这正是当核子和介子間的作用是贋矢量耦和时所得的結果[4-6]. 当 a 取 $a=0$ 和 $a=-1/(12m^2)$ 間的任意值时，(11)可以看成贋矢量耦合和贋标量耦合同时存在时的情况.

下面我們将指出，上面色散关系方法解中的不确定性也反映着重正化本身所具有的不确定性. 例如在得出(12)式的重正化計算里，人們曾經在原来的发散积分里減去在原

积分中經过下面替代而得到的积分[7]:

$$S_F(k, m) = \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\gamma \cdot k + m}{k^2 - m^2} \to S_F(k, M) = \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\gamma k + M}{k^2 - M^2}. \tag{13}$$

如果我們引入 $S_F(k, m) = (\gamma \cdot k + m)\Delta_F(k, m)$, 并把上面替代換为

$$\Delta_F(k^2, m) = \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \to \Delta_F(k^2, M) = \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2}, \tag{14}$$

那么在进行重正化以后的結果中 $a = -1/6$, 即为 (12) 中 a 值的一半. 这里順便指出, 在量子电动力学里,当我們用同样重正化步驟計算光子的格林函数时,由于規范不变条件必須滿足, 人們只能用替代(13)而不能用替代 (14), 因此重正化結果的不确定性并不出現. 在介子理論里,因为沒有相应的限制条件. (13)和(14)都同样可用,这就使重正化的結果具有不确定性.

$D(k^2)$ 更普遍的解可写为

$$D(k^2) = g^{-2} + a(k^2 - \mu^2) + \frac{1}{\pi}(k^2 - \mu^2)\int_{4m^2}^{\infty} \frac{[k'^2(k'^2 - 4m^2)]^{\frac{1}{2}}}{(k'^2 - \mu^2)^2(k'^2 - k^2 - i\epsilon)} dk'^2 +$$

$$+ \sum_i C_i \left\{\frac{1}{k^2 - \lambda_i} - \frac{1}{\mu^2 - \lambda_i}\right\}, \tag{15}$$

(15)式在 $k^2 = \lambda_i\,(i = 1, 2, 3, \cdots)$ 处具有一个极点, C_i 是常数,每一对 C_i 和 λ_i 导致这个系統的一个激发态或相应于参加作用的一个质量为 λ_i 的不稳定粒子.

上面結果又一次的証实了色散关系最簡单的解是和用通常場論的虛跃迁方法从一个具体的作用拉格朗日量出发并經过重正化手續所得的結果是一致的. 上面的結果还指出,色散关系所給出的解也包括不可重正化的相互作用. 从色散关系的观点看来,因为所得的解不会有发散困难,而且也不需要进行重正化計算,因此沒有理由摒弃通常場論里認为不可重正化的解. 根据这个考虑, 我們認为(2)是一个合理的介子格林函数, 因为它包括贗矢量和贗标量两种耦合的迭加[1]. 在这个解中出現的两个参数 g 和 a 代替了通常場論里所引入的两个作用常数.

我們的計算首先給出 Tamm-Dancoff 近似的結果(9),然后得出由(10)給出的微扰論的介子自能积分. 在通常場論的計算里这个推导的次序是相反的, 这是因为在我們的計算里,么正条件提到首要的地位,而通常微扰論是不滿足这个条件的.

用同样方法我們可以計算其他类型的自能积分. 这里我們愿意特别提一下在 π-π 作用下, 一个介子由于跃迁到三个 π 介子的中間态所給出的自能积分. 这个积分可以用通常重正化方法处理,但也可用我們的方法計算,这时我們需要考虑由 $3\pi \to 3\pi$ 弹性散射所給出的么正条件.

我們上面給出的近似結果只相当于核子反核子散射的弹性近似, 这也是平常重正化方法可以經过較易运算而得到的解. 如果人們要求得出更准确的結果,就必須考虑(1)式中非弹性的貢献. 相应的(2)式自然也須包括其他类型的形式因子以及在 $k^2 = \mu^2$ 点是解

---

1) 我們將不討論有关"鬼态"的問題. 在色散关系計算里和在 Tamm-Dancoff 近似里, 都时常得到这些鬼态 (参閱文献[2]) 有可能在計入更复杂的中間态以后,它們可以被消去.

析的項．在原則上只要人們知道怎样选择"最簡单"的解，較准确的单介子格林函数仍然是可以求得的．

参　考　文　献

[1] Chew and Mandelstam, *Phys. Rev.*, **119** (1960), 467.
[2] 胡宁，物理学报，**18** (1962)，177.
[3] Efremov, Meshcheryakov, Shirkov, 朱洪元, *Nuclear Physics*, **22** (1961), 202.
[3a] Muraskin & Nishijima, *Phys. Rev.*, **122** (1961), 331. Nishijima, *Phys. Rev.*, **124** (1961), 255.
[4] 胡宁，科学記录，(新輯)，**3** (1959)，408.
[5] 胡宁，物理学报，**8** (1950)，39.
[6] 胡宁，中国科学，**2** (1953)，60.
[7] Feynman, R. P., *Phys. Rev.*, **76** (1949), 769.

THE DERIVATION OF ONE-PARTICAL GREEN'S FUNCTION BY THE METHOD OF DISPERSION RELATION

Hu Ning

(Department of Physics, Peking University)

Abstract

The Green's function of a single π-meson is obtained by the method of dispersion relation utilizing the analytic and unitary properties of the nucleon-antinucleon scattering amplitude. No renormalization procedure is needed.