

## 用四探針法測量矩形 半导体电阻率时的修正函数\*

宿 昌 厚

### 提 要

本文对于应用四探針法測量矩形半导体电阻率問題进行理論分析,在同时考虑样品有限长、寬、厚三个几何尺寸对測量过程的影响的条件下导出修正函数的一般公式,并把根据这些公式計算的一些修正因子列成数据表。指出了为减小电阻率的測量誤差,除了提高測量设备的精确度和改进測量技术外,正确的选择修正因子也是一个重要因素。

在半导体材料的实验技术中,应用最为广泛的測量电阻率的方法是四探針法<sup>[1,2]</sup>。根据这个方法的理論,当被测半导体样品为半无穷大体、四只探針間距离相等并成一直綫时,电阻率按下式計算:

$$\rho_0 = \frac{V}{I} 2\pi S, \quad (1)$$

此处  $\rho_0$ ——被测半导体样品的电阻率(欧姆-厘米);  $V$ ——电压探針間的电位差(毫伏);  $I$ ——流过电流探針的电流(毫安);  $S$ ——探針之間的距离(厘米)。

如果样品并非半无穷大体,而是具有一定的几何形状与尺寸时,为了准确的求得电阻率  $\rho$ , 必須考虑恆流电源的鏡象(电性影象)对測量过程的影响,即将(1)式計算結果加以修正。电阻率測量的精确度除了与具体的实验技术和測量设备直接有关外,正确的选择修正因子也是减小誤差的重要环节。L. B. Valdes<sup>[1]</sup> 对于四只探針的位置接近于样品与导体或样品与絕緣体的边界、或者四只探針位于薄片状样品上时等不同的六种情况計算了修正因子。F. M. Smits<sup>[3]</sup> 研究了应用四探針法測量无穷大半导体薄层和具有一定尺寸的矩形或圓形薄片样品的电阻率,对于后两种情况导出了修正函数的公式,并列出一一些修正因子数据表。M. A. Logan<sup>[4]</sup> 发展了 F. M. Smits 的理論,提出当样品是与导体或絕緣体临界、而探針位于圓形薄片的半径綫或矩形薄片的对角綫上时的修正函数。但是<sup>[5]</sup>, 他們都是从測量厚度为无限小的半导体薄层的表面电阻率  $\rho_s$  这个角度出发,只考虑了面平行电場的情况,所导出的公式对于具有一定厚度的样品來說,例如当厚度大于两倍探針間距时,就不适用。即便是在厚度較小的情况下,虽然用  $F(w/s)$  进行修正,但由于样品的有限长和寬与有限厚度对測量的影响是单独(互不联系)考虑的,因而就导致了一定的

\* 1962年7月2日收到。

誤差。此外,在这两个文献中都没有给出,同时考虑有限长、宽、厚三个几何尺寸的修正常数的一般计算公式。D. E. Vaughan<sup>[6]</sup> 在自己的工作中提出,当直线形探针头和方形探针头(四只探针位于正方形的四个顶角)处于小圆形薄片样品的任意位置时的修正原则,根据他导出的公式可以计算样品任意一点上的电阻率。当要测量具有一定厚度、其长度比宽度大得多的长方形半导体的电阻率时,我们可以从文献[7]中查到修正因子,但这里计算出的修正因子为数甚少,虽然有时可运用内插法,然而由于修正常数是复杂的非线性函数,仍会造成较大的误差,远不能满足半导体材料参数测量与研究工作的实际需要,此外,它们并不适用于厚度较小的薄片。应该指出,为了考虑样品一定的几何尺寸对测量结果的影响,而把由有限长、宽、厚同时引起的影响各个分开,从 Valdes 的理论中单独求出三个修正因子  $F(l/s)$ 、 $F(w/s)$  和  $F(d/s)$ ,然后取其乘积,正如通常所做的那样,不能认为是最合适的方法,因为正如前所述,这意味着忽略了许多实际上应当考虑的、能引起相当误差的电流源的镜像,所求出的电阻率将比实际值偏高。为了弥补以上各缺点,在这里我们准备就一般情况讨论一下用四探针法测量矩形半导体电阻率时的修正函数问题。

## 二

设被测半导体矩形样品的长度为  $2x_0$ , 宽度为  $2y_0$ , 厚度是  $z_0$ , 四只探针间的距离  $S$  相等并成一直线,位于样品表面的中央,如图 1 所示。电流  $I$  从探针 1 输入,由探针 4 输出。探针 2 和 3 为电压探针,它们之间的电压用高电阻电位差计来测量。在这种情况下,除了实际的恒流电源(探针 1, 4)外,还必须考虑沿  $x$ ,  $y$ ,  $z$  三个方向的、从理论上讲是为数无穷多的 1, 4 探针的电性影像对测量过程的影响。因为只有在这种条件下,才能使样品各自由表面保持等位面。换句话说,样品在空间中是处于许许多多的正负电源的包围之中。图 2 示空间中某一个平面的情况(这里我们只是讨论样品四周与绝缘体临界)。

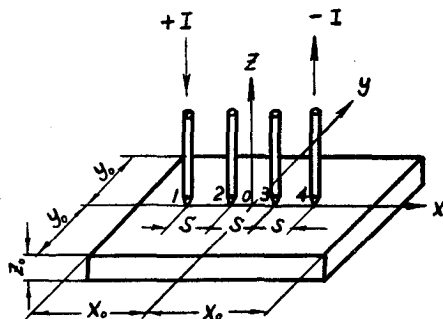


图 1

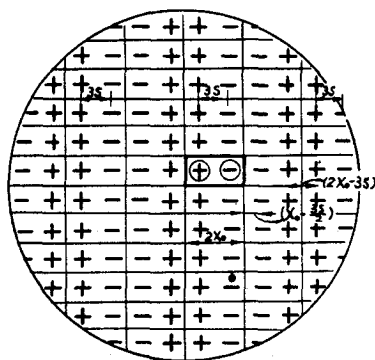


图 2

若以样品表面中心点  $O$  做为原点,则各个正、负电源在  $x$  轴方向的坐标应当是

$$2kx_0 - (-1)^k \frac{3s}{2} \begin{cases} k = +\infty, & \text{正电源,} \\ k = -\infty, & \end{cases}$$

$$2kx_0 + (-1)^k \frac{3s}{2} \begin{cases} k = +\infty, & \text{负电源,} \\ k = -\infty, & \end{cases}$$

而它們在  $y$  和  $z$  方向的座标分別等于  $2my_0$  和  $2nz_0$ 。此处  $k, m$  和  $n$  是界于  $-\infty$  和  $+\infty$  之間的整数。当  $k, m$  和  $n$  都等于零时,就意味着实际的恆流源 1 与 4。样品中任意一点  $(x, y, z)$  的电位  $\varphi$  可用下式表示:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & \\ = & \frac{\rho I}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(2kx_0 - (-1)^k \frac{3s}{2} - x\right)^2 + (2my_0 - y)^2 + (2nz_0 - z)^2}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{\left(2kx_0 + (-1)^k \frac{3s}{2} - x\right)^2 + (2my_0 - y)^2 + (2nz_0 - z)^2}} \right], \quad (2) \end{aligned}$$

样品表面上第 2 点  $\left(-\frac{s}{2}, 0, 0\right)$  的电位  $\varphi_2$  和第 3 点  $\left(\frac{s}{2}, 0, 0\right)$  的电位  $\varphi_3$  分別可以写成

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \frac{\rho I}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(2kx_0 - (-1)^k \frac{3s}{2} + \frac{s}{2}\right)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{\left(2kx_0 + (-1)^k \frac{3s}{2} + \frac{s}{2}\right)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} \right], \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 = & \frac{\rho I}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(2kx_0 - (-1)^k \frac{3s}{2} - \frac{s}{2}\right)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{\left(2kx_0 + (-1)^k \frac{3s}{2} - \frac{s}{2}\right)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

探針 2 和探針 3 之間的电压  $V = \varphi_2 - \varphi_3$ 。取(3)式与(4)式之差,并把  $k=0$  的一项单独分出以及进行某些简单的組合以后,我們得到

$$\begin{aligned} V = & \frac{\rho I}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{\sqrt{s^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2s)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} \right] + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(2kx_0 - (-1)^k \frac{3s}{2} + \frac{s}{2}\right)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} - \right. \\ & - \frac{1}{\sqrt{\left(2kx_0 + (-1)^k \frac{3s}{2} + \frac{s}{2}\right)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} - \\ & - \frac{1}{\sqrt{\left(2kx_0 - (-1)^k \frac{3s}{2} - \frac{s}{2}\right)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} + \\ & \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{\left(2kx_0 + (-1)^k \frac{3s}{2} - \frac{s}{2}\right)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} \right] \right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

為了便於討論, 下面我們來分析兩種具體情況。

### (一) 樣品長度 $2x_0$ 比其寬度 $2y_0$ 和厚度 $z_0$ 大得多

在這種條件下, 可以把被測樣品有限長度  $2x_0$  對於測量過程的影響忽略不計, 即認為樣品左右兩邊的所有電性影象都不存在。此時在(5)中取  $k=0$  就可得到 2, 3 探針之間的電壓:

$$V = \frac{\rho I}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2s)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} \right\}. \quad (6)$$

為求出(6)式的解, 首先設  $z_0 \leq y_0$ , 這樣, 將空間中  $y=0$  ( $m=0$ ) 這個面單獨提出, 並注意到其他各面  $y=2my_0$  與此相對稱, 則可以沒有任何實質改變地把(6)式改寫成下列形式:

$$V = \frac{\rho I}{\pi} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{s^2 + (2nz_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2s)^2 + (2nz_0)^2}} \right] + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{s^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2s)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} \right] \right\}. \quad (7)$$

當  $z_0 > y_0$  時, 可將  $z=0$  這個平面分出, 這時在(7)中  $y_0$  和  $z_0$  互換位置,  $m$  和  $n$  也互換位置。

現在讓我們首先求(7)式中雙級數的和。將  $2z_0$  提出後則這個雙級數變成

$$\begin{aligned} & \frac{2}{2z_0} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{\frac{s^2 + (2my_0)^2}{(2z_0)^2} + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{(2s)^2 + (2my_0)^2}{(2z_0)^2} + n^2}} \right] = \\ & = \frac{1}{z_0} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{A^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{B^2 + n^2}} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

這裡令

$$A^2 = \frac{s^2 + (2my_0)^2}{(2z_0)^2}; \quad B^2 = \frac{(2s)^2 + (2my_0)^2}{(2z_0)^2}.$$

在附錄一中我們將證明, 當  $A^2 \geq 1$  和  $B^2 \geq 1$  時 ( $B \approx A$ ;  $B > A$ ),

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{A^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{B^2 + n^2}} \right] \cong \ln \frac{B^2}{A^2}, \quad (9)$$

因此(8)式可寫成下列形狀:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z_0} \sum_{m=1}^{+\infty} \ln \frac{(2s)^2 + (2my_0)^2}{s^2 + (2my_0)^2} = \frac{1}{z_0} \sum_{m=1}^{+\infty} \ln \frac{\frac{(2s)^2}{(2my_0)^2} + 1}{\frac{s^2}{(2my_0)^2} + 1} = \\ & = \frac{1}{z_0} \sum_{m=1}^{+\infty} \left\{ \ln \left[ 1 + \left( \frac{2s}{2my_0} \right)^2 \right] - \ln \left[ 1 + \left( \frac{s}{2my_0} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

我們知道<sup>[8]</sup>:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \ln \left[ 1 + \frac{h^2}{m^2} \right] = \ln \frac{\text{sh } \pi h}{\pi h}, \quad (10)$$

这样,上式就等于:

$$\frac{1}{z_0} \left\{ \ln \frac{\text{sh} \left( \pi \frac{2s}{2y_0} \right)}{\pi \frac{2s}{2y_0}} - \ln \frac{\text{sh} \left( \pi \frac{s}{2y_0} \right)}{\pi \frac{s}{2y_0}} \right\} = \frac{1}{z_0} \ln \text{ch } \frac{\pi s}{2y_0}, \quad (11)$$

(11)式就是(7)式中双级数的和.

1) 薄样品(厚度小于或等于探针间距;  $z_0 \leq s$ ) 因为  $(s/z_0)^2 \geq 1$ , 故可把(9)式同时应用于(7)中{……}内的第一组级数,即

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{s^2 + (2nz_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2s)^2 + (2nz_0)^2}} \right] &= \\ = \frac{1}{2z_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{s}{2z_0}\right)^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2s}{2z_0}\right)^2 + n^2}} \right] &= \frac{1}{z_0} \ln 2. \end{aligned} \quad (12)$$

将(11)和(12)两式代入(7)中,得到

$$V = \frac{\rho I}{\pi z_0} \ln \left( 2 \text{ch } \frac{\pi s}{2y_0} \right),$$

而电阻率等于:

$$\rho = \frac{V}{I} \cdot z_0 \cdot F_1(s, y_0). \quad (13)$$

此处修正函数:

$$F_1(s, y_0) = \frac{\pi}{\ln \left( 2 \text{ch } \frac{\pi s}{2y_0} \right)}, \quad (14)$$

只依赖于探针间距和样品宽度. 当  $s/y_0 = 0.1 \sim 3$  时,  $F_1$  的数值列入表 1 内. 在利用(13)式时,必须注意,  $z_0$  的单位应是厘米. 不难看出,在  $s/y_0$  很小时(13)式变成

$$\rho = \frac{V}{I} \cdot z_0 \cdot \frac{\pi}{\ln 2}, \quad (15)$$

表 1  $F_1$

| $s/y_0$ | $F_1$  | $s/y_0$ | $F_1$  | $s/y_0$ | $F_1$  |
|---------|--------|---------|--------|---------|--------|
| 0.1     | 4.4529 | 0.6     | 2.9153 | 1.4     | 1.4201 |
| 0.15    | 4.3591 | 0.65    | 2.7502 | 1.6     | 1.2474 |
| 0.2     | 4.2345 | 0.7     | 2.6065 | 1.8     | 1.1087 |
| 0.25    | 4.0821 | 0.75    | 2.4744 | 2.0     | 1.0046 |
| 0.3     | 3.9221 | 0.8     | 2.3522 | 2.5     | 0.8014 |
| 0.35    | 3.7494 | 0.85    | 2.2422 | 3.0     | 0.6684 |
| 0.4     | 3.5887 | 0.9     | 2.1377 |         |        |
| 0.45    | 3.3956 | 0.95    | 2.0347 |         |        |
| 0.5     | 3.2264 | 1.0     | 1.9485 |         |        |
| 0.55    | 3.0675 | 1.2     | 1.6476 |         |        |

这与 F. M. Smits 导出的当厚度较小和宽度较大时的计算公式完全相同。

2) 厚样品 (厚度大于探针间距,  $z_0 > s$ ) 由于此时  $s/z_0 < 1$ , 公式 (9) 已不适用于 (7) 中 {……} 内的第一组级数, 所以我们把后者写成下列形式:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{s^2 + (2nz_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2s)^2 + (2nz_0)^2}} \right] = \\ & = \frac{1}{2s} + \frac{1}{z_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{s}{2z_0}\right)^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{s}{z_0}\right)^2 + n^2}} \right] = \\ & = \frac{1}{2s} \left\{ 1 + \frac{2s}{z_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{s}{2z_0}\right)^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{s}{z_0}\right)^2 + n^2}} \right] \right\} = \\ & = \frac{1}{2s} \cdot \phi(s/z_0). \end{aligned} \quad (16)$$

正如前所述, 我们设  $y_0 \geq z_0$ , 对于厚样品来说, (11) 式仍然有效。把它和 (16) 式代入 (7) 式后得到

$$V = \frac{\rho I}{2\pi s} \left[ \phi(s/z_0) + \frac{2s}{z_0} \ln \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2y_0} \right], \quad (17)$$

被测样品电阻率:

$$\rho = \frac{V}{I} \cdot \frac{2\pi s}{F_2(s, y_0, z_0)}, \quad (18)$$

修正函数:

$$F_2(s, y_0, z_0) = \phi\left(\frac{s}{z_0}\right) + \frac{2s}{z_0} \ln \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2y_0}. \quad (19)$$

在  $s/z_0 \leq 1$  的范围内, 以小数点后第三位的准确度可将  $\phi(s/z_0)$  用下列近似式表示:

$$\begin{aligned} \phi(s/z_0) & \cong 1 + \frac{2s}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{s}{2z_0}\right)^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{s}{z_0}\right)^2 + n^2}} \right] \cong \\ & \cong 1 + \frac{4s}{z_0} \ln \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{s}{z_0}\right)^2 + 1}}{1 + \sqrt{\left(\frac{s}{2z_0}\right)^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (20)$$

当  $s/z_0 = 0.1 \sim 1$  时,  $\phi(s/z_0)$  较准确的数值列入表 6 中。这样

$$F_2(s, y_0, z_0) = 1 + \frac{2s}{z_0} \ln \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2y_0} + \frac{4s}{z_0} \ln \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{s}{z_0}\right)^2 + 1}}{1 + \sqrt{\left(\frac{s}{2z_0}\right)^2 + 1}}. \quad (21)$$

表 2 内列出当  $s/z_0 = 0.1 \sim 1$ ,  $s/y_0 = 0.1 \sim 3$  的范围内时  $F_2$  的数值。在实际情况下, 一般当样品长度大于十倍探针间距以上时 ( $2x_0 > 10s$ ) 应用 (13) 和 (18) 式计算电阻率  $\rho$ , 能够得到比较满意的结果。

表 2  $F_2$ 

| $s/z_0$<br>$s/y_0$ | 0.1    | 0.2    | 0.3    | 0.4    | 0.5    | 0.6    | 0.7    | 0.8    | 0.9    | 1.0    |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.1                | 1.0031 | 1.0115 | 1.0291 | 1.0592 | 1.1052 | 1.1617 | 1.2374 | 1.3228 | 1.4221 | 1.5254 |
| 0.2                | 1.0104 | 1.0260 | 1.0510 | 1.0883 | 1.1416 | 1.2054 | 1.2883 | 1.3811 | 1.4876 | 1.5982 |
| 0.3                | 1.0222 | 1.0497 | 1.0864 | 1.1356 | 1.2007 | 1.2763 | 1.3711 | 1.4756 | 1.5890 | 1.7164 |
| 0.4                | 1.0371 | 1.0794 | 1.1311 | 1.1951 | 1.2751 | 1.3656 | 1.4752 | 1.5947 | 1.7279 | 1.8652 |
| 0.5                | 1.0567 | 1.1187 | 1.1901 | 1.2738 | 1.3734 | 1.4835 | 1.6128 | 1.7520 | 1.9049 | 2.0618 |
| 0.6                | 1.0787 | 1.1628 | 1.2561 | 1.3619 | 1.4835 | 1.6156 | 1.7670 | 1.9281 | 2.1031 | 2.2820 |
| 0.7                | 1.1030 | 1.2114 | 1.3290 | 1.4591 | 1.6050 | 1.7614 | 1.9371 | 2.1225 | 2.3218 | 2.5250 |
| 0.8                | 1.1291 | 1.2635 | 1.4072 | 1.5633 | 1.7353 | 1.9178 | 2.1195 | 2.3310 | 2.5563 | 2.7856 |
| 0.9                | 1.1559 | 1.3171 | 1.4876 | 1.6705 | 1.8693 | 2.0786 | 2.3071 | 2.5454 | 2.7975 | 3.0536 |
| 1.0                | 1.1844 | 1.3742 | 1.5732 | 1.7847 | 2.0120 | 2.2498 | 2.5069 | 2.7737 | 3.0544 | 3.3390 |
| 1.2                | 1.2433 | 1.4920 | 1.7499 | 2.0203 | 2.3065 | 2.6032 | 2.9192 | 3.2449 | 3.5845 | 3.9280 |
| 1.4                | 1.3024 | 1.6101 | 1.9272 | 2.2566 | 2.6019 | 2.9577 | 3.3327 | 3.7176 | 4.1162 | 4.5188 |
| 1.6                | 1.3657 | 1.7367 | 2.1169 | 2.5096 | 2.9182 | 3.3373 | 3.7756 | 4.2236 | 4.6855 | 5.1514 |
| 1.8                | 1.4287 | 1.8627 | 2.3059 | 2.7616 | 3.2332 | 3.7153 | 4.2166 | 4.7276 | 5.2525 | 5.7814 |
| 2.0                | 1.4874 | 1.9801 | 2.4821 | 2.9965 | 3.5268 | 4.0676 | 4.6276 | 5.1974 | 5.7810 | 6.3686 |
| 2.5                | 1.6460 | 2.2973 | 2.9578 | 3.6308 | 4.3197 | 5.0191 | 5.7377 | 6.4660 | 7.2082 | 7.9544 |
| 3.0                | 1.8021 | 2.6095 | 3.4261 | 4.2552 | 5.1002 | 5.9557 | 6.8304 | 7.7148 | 8.6131 | 9.5154 |

## (二) 一般情况

在样品长度并不是很大的情况下, 应当按照(5)式计算电阻率。但此式繁杂不易应用。考虑到在测量实践中,  $2x_0$  至少也要大于  $3s$  以上, 所以, 为简化推导过程, 设  $2x_0 \geq (4 \sim 5)s$ , 这样, 我们就可以以足够的准确度取  $k=0$  和  $k=1$ , 因而(5)式可写成下列形式:

$$\begin{aligned}
 V = \frac{\rho I}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{\sqrt{s^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2s)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} \right] + \right. \\
 \left. + \left[ \frac{1}{\sqrt{(2x_0 - 2s)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2x_0 - s)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} \right] - \right. \\
 \left. - \left[ \frac{1}{\sqrt{(2x_0 + s)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2x_0 + 2s)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} \right] \right\}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

就物理意义而言, 这意味着, 在样品以外左右两边各取一对(正, 负)电流源的镜像, 而把其他各设想电源的影响忽略不计, 因为在  $2x_0$  大于  $(4 \sim 5)s$  时, 这些电源对于 2, 3 探针所引起的电位非常微小。与(6)式比较, (22)式只是增加了两组类似的级数。

$$\begin{aligned}
 L_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{s^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2s)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} \right], \\
 L_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{(2x_0 - 2s)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2x_0 - s)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} \right],
 \end{aligned}$$

$$L_3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{(2x_0 + s)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2x_0 + 2s)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} \right].$$

1) 薄样品 ( $z_0 \leq s$ ) 由上面的演算过程中知道

$$L_1 = \frac{1}{z_0} \ln \left( 2 \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2y_0} \right), \quad (23)$$

应用解(6)式时完全相同的方法, 很容易得到

$$L_2 = \frac{1}{z_0} \ln \frac{\operatorname{sh} \left( \pi \frac{2x_0 - s}{2y_0} \right)}{\operatorname{sh} \left( \pi \frac{x_0 - s}{y_0} \right)}, \quad (24)$$

$$L_3 = \frac{1}{z_0} \ln \frac{\operatorname{sh} \left( \pi \frac{x_0 + s}{y_0} \right)}{\operatorname{sh} \left( \pi \frac{2x_0 + s}{2y_0} \right)}. \quad (25)$$

把(23)、(24)、(25)三式代入:

$$V = \frac{\rho I}{\pi} (L_1 + L_2 - L_3),$$

就得到

$$V = \frac{\rho I}{\pi z_0} \left[ \ln \left( 2 \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2y_0} \right) + \ln \frac{\operatorname{sh} \left( \pi \frac{2x_0 - s}{2y_0} \right)}{\operatorname{sh} \left( \pi \frac{x_0 - s}{y_0} \right)} - \ln \frac{\operatorname{sh} \left( \pi \frac{x_0 + s}{y_0} \right)}{\operatorname{sh} \left( \pi \frac{2x_0 + s}{2y_0} \right)} \right]$$

由此, 电阻率  $\rho$  等于:

$$\rho = \frac{V}{I} \cdot z_0 \cdot F_3(s, x_0, y_0), \quad (26)$$

而

$$\begin{aligned} F_3(s, x_0, y_0) &= \frac{\pi}{\ln \left( 2 \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2y_0} \right) + \ln \left[ \frac{\operatorname{sh} \pi \left( \frac{x_0 - s}{y_0} - \frac{s}{2y_0} \right) \cdot \operatorname{sh} \pi \left( \frac{x_0 + s}{y_0} + \frac{s}{2y_0} \right)}{\operatorname{sh} \pi \left( \frac{x_0 - s}{y_0} \right) \cdot \operatorname{sh} \pi \left( \frac{x_0 + s}{y_0} \right)} \right]} \\ &= \frac{\pi}{\ln \left( 2 \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2y_0} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \ln \frac{\operatorname{sh} \pi \left( \frac{2x_0 + (-1)^k \frac{3s}{2} + \frac{s}{2}}{2y_0} \right)}{\operatorname{sh} \pi \left( \frac{2x_0 + (-1)^k \frac{3s}{2} - \frac{s}{2}}{2y_0} \right)}}. \end{aligned} \quad (27)$$

在  $s/y_0 = 0.1 \sim 1.5$  和  $x_0/y_0 = 1 \sim 3.5$  的范围内所计算出的  $F_3(s, x_0, y_0)$  的数值列入表 3 内。



表 3  $F_3$ 

| $x_0/y_0$<br>$s/y_0$ | 1      | 1.5    | 2      | 2.5    | 3      | $\geq 3.5$ |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|------------|
| 0.1                  | 4.4385 | 4.4529 |        |        |        |            |
| 0.2                  | 4.2186 | 4.2243 | 4.2345 |        |        |            |
| 0.3                  | 3.8691 | 3.9196 | 3.9211 | 3.9221 |        |            |
| 0.4                  | 3.5232 | 3.5858 | 3.5879 | 3.5887 |        |            |
| 0.5                  | 3.1160 | 3.2182 | 3.2258 | 3.2264 |        |            |
| 0.6                  | 2.7162 | 2.8907 | 2.8981 | 2.9153 |        |            |
| 0.7                  | —      | 2.5936 | 2.6060 | 2.6065 |        |            |
| 0.8                  | —      | 2.3333 | 2.3506 | 2.3522 |        |            |
| 0.9                  | —      | 2.1062 | 2.1366 | 2.1377 |        |            |
| 1.0                  | —      | 1.8999 | 1.9459 | 1.9484 | 1.9485 |            |
| 1.2                  | —      | —      | 1.5943 | 1.6449 | 1.6474 | 1.6476     |
| 1.5                  | —      | —      | —      | 1.3267 | 1.3286 | 1.3292     |

2) 厚样品 当  $z_0 > s$  时, 前面已经得到

$$L_1 = \frac{1}{2s} \left[ 1 + \frac{2s}{z_0} \ln \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2y_0} + \frac{4s}{z_0} \ln \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{s}{z_0}\right)^2 + 1}}{1 + \sqrt{\left(\frac{s}{2z_0}\right)^2 + 1}} \right] = \frac{1}{2s} \cdot F_2(s, y_0, z_0). \quad (28)$$

仍然按照上面用过的相同步骤, 不难得到

$$\begin{aligned} \text{当 } \frac{2x_0 - s}{2z_0} < 1 \text{ 时, } L_2 = & \frac{1}{2s} \left\{ \frac{1}{\frac{x_0}{s} - 1} - \frac{1}{\frac{x_0}{s} - \frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. + \frac{2s}{z_0} \left[ 2 \ln \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{2x_0 - s}{2z_0}\right)^2 + 1}}{1 + \sqrt{\left(\frac{2x_0 - 2s}{2z_0}\right)^2 + 1}} + \ln \left( \frac{2x_0 - 2s}{2x_0 - s} \cdot \frac{\operatorname{sh} \pi \left(\frac{2x_0 - s}{2y_0}\right)}{\operatorname{sh} \pi \left(\frac{x_0 - s}{y_0}\right)} \right) \right] \right\}, \quad (29) \end{aligned}$$

而当  $\frac{2x_0 - 2s}{2z_0} \geq 1$  时,  $L_2$  与(24)相同. 当  $\frac{2x_0 + 2s}{2z_0} < 1$  时,

$$\begin{aligned} L_3 = & \frac{1}{2s} \left\{ \frac{1}{\frac{x_0}{s} + \frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{x_0}{s} + 1} + \frac{2s}{z_0} \left[ 2 \ln \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 2s}{2z_0}\right)^2 + 1}}{1 + \sqrt{\left(\frac{2x_0 + s}{2z_0}\right)^2 + 1}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \ln \left( \frac{2x_0 + s}{2x_0 + 2s} \cdot \frac{\operatorname{sh} \pi \left(\frac{x_0 + s}{y_0}\right)}{\operatorname{sh} \pi \left(\frac{2x_0 + s}{2y_0}\right)} \right) \right] \right\}, \quad (30) \end{aligned}$$

但当  $\frac{2x_0 + s}{2z_0} \geq 1$  时,  $L_3$  与(25)相同. 下面我们再就两种具体情况加以分析.

a)  $s < z_0 \leq (x_0 - s)$

(24), (25), (28)三式的适用条件均可满足, 把它们代入(22)中, 我们有

$$\rho = \frac{V}{I} \cdot \frac{2\pi s}{F_4(s, x_0, y_0, z_0)}, \quad (31)$$

式中

$$F_4(s, x_0, y_0, z_0) = F_2 + \frac{2s}{z_0} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \ln \frac{\operatorname{sh} \pi \left( \frac{2x_0 + (-1)^k \frac{3s}{2} + \frac{s}{2}}{2y_0} \right)}{\operatorname{sh} \pi \left( \frac{2x_0 + (-1)^k \frac{3s}{2} - \frac{s}{2}}{2y_0} \right)}, \quad (32)$$

表 4

| $\frac{s}{y_0}$ | $\ln \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2y_0}$ | $\ln 2 \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2y_0}$ | $\frac{s}{y_0}$ | $\ln \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2y_0}$ | $\ln 2 \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2y_0}$ |
|-----------------|--|--|-----------------|--|--|
| 0.1             | 0.0124                                     | 0.7055                                       | 0.75            | 0.5766                                     | 1.2697                                       |
| 0.15            | 0.0276                                     | 0.7207                                       | 0.8             | 0.6425                                     | 1.3356                                       |
| 0.2             | 0.0488                                     | 0.7419                                       | 0.85            | 0.7080                                     | 1.4011                                       |
| 0.25            | 0.0765                                     | 0.7696                                       | 0.9             | 0.7765                                     | 1.4696                                       |
| 0.3             | 0.1079                                     | 0.8010                                       | 0.95            | 0.8509                                     | 1.5440                                       |
| 0.35            | 0.1448                                     | 0.8379                                       | 1.0             | 0.9192                                     | 1.6123                                       |
| 0.4             | 0.1823                                     | 0.8754                                       | 1.2             | 1.2137                                     | 1.9068                                       |
| 0.45            | 0.2321                                     | 0.9252                                       | 1.4             | 1.5091                                     | 2.2122                                       |
| 0.5             | 0.2806                                     | 0.9737                                       | 1.6             | 1.8254                                     | 2.5185                                       |
| 0.55            | 0.3343                                     | 1.0274                                       | 1.8             | 2.1404                                     | 2.8335                                       |
| 0.6             | 0.3907                                     | 1.0838                                       | 2.0             | 2.4340                                     | 3.1271                                       |
| 0.65            | 0.4492                                     | 1.1423                                       | 2.5             | 3.2269                                     | 3.9200                                       |
| 0.7             | 0.5122                                     | 1.2053                                       | 3.0             | 4.0074                                     | 4.7005                                       |

表 5

| $N$ | $\ln \operatorname{sh} N\pi$ | $N$ | $\ln \operatorname{sh} N\pi$ | $N$ | $\ln \operatorname{sh} N\pi$ |
|-----|------------------------------|-----|------------------------------|-----|------------------------------|
| 0.1 | -1.1414                      | 1.1 | 2.7617                       | 2.1 | 5.9043                       |
| 0.2 | -0.4133                      | 1.2 | 3.0763                       | 2.2 | 6.2184                       |
| 0.3 | 0.0845                       | 1.3 | 3.3908                       | 2.3 | 6.5325                       |
| 0.4 | 0.4789                       | 1.4 | 3.7049                       | 2.4 | 6.8466                       |
| 0.5 | 0.8335                       | 1.5 | 4.0192                       | 2.5 | 7.1609                       |
| 0.6 | 1.1686                       | 1.6 | 4.3355                       | 2.6 | 7.4749                       |
| 0.7 | 1.4944                       | 1.7 | 4.6469                       | 2.7 | 7.7892                       |
| 0.8 | 1.8135                       | 1.8 | 4.9619                       | 2.8 | 8.1033                       |
| 0.9 | 2.1304                       | 1.9 | 5.2759                       | 2.9 | 8.4176                       |
| 1.0 | 2.4465                       | 2.0 | 5.5891                       | 3.0 | 8.7316                       |

6)  $z_0 > (x_0 + s)$

把(28),(29),(30)代入(22)内,得到

$$\rho = \frac{V}{I} \cdot \frac{2\pi s}{F_5(s, x_0, y_0, z_0)}, \quad (33)$$

这里

$$\begin{aligned} F_5(s, x_0, y_0, z_0) = & F_2 + \sum_{k=1}^2 \left[ \frac{1}{\frac{x_0}{s} + (-1)^k} - \frac{1}{\frac{x_0}{s} + (-1)^k \cdot \frac{1}{2}} \right] + \\ & + \frac{2s}{z_0} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left[ 2 \ln \frac{1 + \sqrt{\left( \frac{2x_0 + (-1)^k \frac{3s}{2} + \frac{s}{2} \right)^2 + 1}}{2z_0}}{1 + \sqrt{\left( \frac{2x_0 + (-1)^k \frac{3s}{2} - \frac{s}{2} \right)^2 + 1}} + \right. \\ & \left. + \ln \frac{2x_0 + (-1)^k \frac{3s}{2} - \frac{s}{2}}{2x_0 + (-1)^k \frac{3s}{2} + \frac{s}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sh} \pi \cdot \left( \frac{2x_0 + (-1)^k \frac{3s}{2} + \frac{s}{2}}{2y_0} \right)}{\operatorname{sh} \pi \cdot \left( \frac{2x_0 + (-1)^k \frac{3s}{2} - \frac{s}{2}}{2y_0} \right)} \right], \quad (34) \end{aligned}$$

在表 4 和表 5 中分别列出了  $\ln \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2y_0}$ ,  $\ln \left( 2 \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2y_0} \right)$  以及  $\ln \operatorname{sh} (N \cdot \pi)$  的数值, 以便在计算修正因子,  $F_4$  和  $F_5$  时应用.

表 6

| $s/z_0$       | 0.1    | 0.2    | 0.3    | 0.4    | 0.5    | 0.6    | 0.7    | 0.8    | 0.9    | 1.0    |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\phi(s/z_0)$ | 1.0006 | 1.0065 | 1.0217 | 1.0493 | 1.0928 | 1.1468 | 1.2200 | 1.3030 | 1.3998 | 1.5006 |

## 附 录 一

$$\begin{aligned} \text{試証 } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{A^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{B^2 + n^2}} \right] & \equiv C_0 \equiv \\ & \equiv \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{A^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{B^2 + n^2}} \right] \cong \ln \frac{B^2}{A^2}. \end{aligned}$$

1) 首先証明:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{A^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{B^2 + n^2}} \right] & = C \text{ 为收敛級数. 令}^{[9]}: \\ J & = \int_1^{+\infty} f(n) dn = \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{A^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{B^2 + n^2}} \right) dn = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \int_1^x \frac{dn}{\sqrt{A^2 + n^2}} - \int_1^x \frac{dn}{\sqrt{B^2 + n^2}} \right], \quad (35) \end{aligned}$$

因为  $(B > A)$

$$f'(n) = \frac{n}{(B^2 + n^2)^{3/2}} - \frac{n}{(A^2 + n^2)^{3/2}} < 0,$$

所以  $f(n)$  是衰减函数, 已知<sup>[10]</sup>

$$\int \frac{dn}{\sqrt{a^2 + n^2}} = \ln(n + \sqrt{a^2 + n^2}) + \text{常数}, \quad (36)$$

则

$$\begin{aligned} J &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln(n + \sqrt{A^2 + n^2}) \Big|_1^x - \ln(n + \sqrt{B^2 + n^2}) \Big|_1^x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x + \sqrt{A^2 + x^2}) - \ln(x + \sqrt{B^2 + x^2})] + \ln \frac{1 + \sqrt{B^2 + 1}}{1 + \sqrt{A^2 + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln x \left( 1 + \sqrt{\frac{A^2}{x^2} + 1} \right) - \ln x \left( 1 + \sqrt{\frac{B^2}{x^2} + 1} \right) \right] + \ln \frac{1 + \sqrt{B^2 + 1}}{1 + \sqrt{A^2 + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{A^2}{x^2} + 1} \right) - \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{B^2}{x^2} + 1} \right) \right] + \\ &\quad + \ln \frac{1 + \sqrt{B^2 + 1}}{1 + \sqrt{A^2 + 1}} = \ln \frac{1 + \sqrt{B^2 + 1}}{1 + \sqrt{A^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (37)$$

因为  $A$  和  $B$  是与  $n$  无关的任意常数, 所以积分  $J$  是有限的, 这表明  $C$  是收敛级数.

$$2) \text{ 证明 } C_0 \cong \ln \frac{B^2}{A^2}.$$

函数  $f(n)$  是连续的又是衰减的. 图 3 示  $C_0$  的几何概念. 从这个图内很清楚知道,

级数  $C_0$  的和应当等于  $abcdefghijk \cdots$

$npqrstuvw 10a$  所构成的总面积. 另外,

$2 \int_0^{+\infty} f(n)dn$  则是上下二曲线与  $y$  轴之间

组成的面积, 即  $acegik \cdots nqsuwzoa$

的总面积. 如果  $o1wzo$  这块面积等于曲线

以外所有凸出部分的三角形面积的总和

时, 则可以认为:

$$C_0 = 2 \int_0^{+\infty} f(n)dn, \quad (38)$$

(38) 式成立的可能性, 取决于在  $n$  和  $(n +$

$1)$  的区域内 (尤其是当  $n$  较小时)  $f(n)$  是

否趋近于直线性变化. 如果这个条件能够满足, 那么,

$$\begin{aligned} C_0 &= 2 \int_0^{+\infty} f(n)dn = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(n)dn = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \left[ \frac{1}{\sqrt{A^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{B^2 + n^2}} \right] dn = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln(n + \sqrt{A^2 + n^2}) \Big|_0^x - \ln(n + \sqrt{B^2 + n^2}) \Big|_0^x \right] = \end{aligned}$$

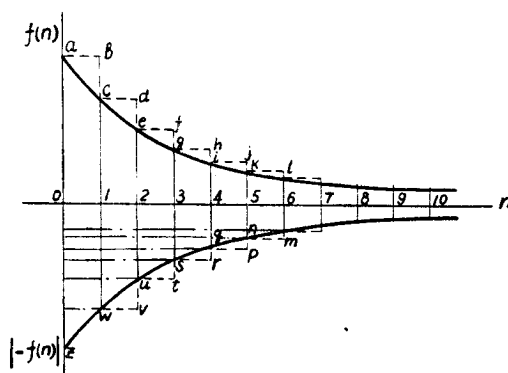


图 3

$$\begin{aligned}
 &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x + \sqrt{A^2 + x^2}) - \ln A - \ln(x + \sqrt{B^2 + x^2}) + \ln B] = \\
 &= 2 \ln \frac{B}{A} + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{A^2}{x^2} + 1} \right) - \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{B^2}{x^2} + 1} \right) \right] = \ln \frac{B^2}{A^2}.
 \end{aligned}$$

但是在何种场合下,可以实现上述条件? 我们知道,直线方程的二次导数应当等于零. 取  $f(n)$  的二次导数,得

$$f''(n) = \frac{B^2 - 2n^2}{(B^2 + n^2)^{3/2}} - \frac{A^2 - 2n^2}{(A^2 + n^2)^{3/2}} \quad (39)$$

由此不难看出:

$$\left. \begin{array}{l} f''(n) \\ A < 1 \\ B < 1 \\ B > A \end{array} \right\} \gg \left. \begin{array}{l} f''(n) \\ A \geq 1 \\ B \geq 1 \\ B > A \end{array} \right\} \approx 0.$$

所以级数  $C_0 \cong \ln \frac{B^2}{A^2}$  只有当  $A^2 \geq 1$  和  $B^2 \geq 1$  时才能够成立.

## 附录二 应用例举

1) 样品尺寸  $11.4 \times 8.2 \times 5.3 \text{ mm}^3$ , 测得

$$\rho_0 = 2.99 \text{ ohm-cm},$$

$$\frac{s}{y_0} = 0.244, \quad \frac{s}{z_0} = 0.1885$$

因为  $2x_0 > 10s$ ,  $z_0 > s$ , 可能应用(18)式计算电阻率,此时修正函数  $F_2 = 1.034$ , 而

$$\rho = 2.99 \cdot \frac{1}{1.034} = 2.8916 \text{ ohm-cm}.$$

若把样品长宽厚的影响分别单独计入,所得结果是  $2.94 \text{ ohm-cm}$ , 因此二者相差:

$$\frac{2.94 - 2.8916}{2.8916} = 1.67\%.$$

2) 被测样品: 锗,  $n$  型. 尺寸:  $19.4 \times 5.5 \times 1.25 \text{ mm}^3$ ; 探针间距:  $s = 1 \text{ mm}$ ;

$\frac{s}{y_0} = 0.365$ ,  $\frac{s}{z_0} = 0.8$ ; 样品截面积:  $0.069 \text{ cm}^2$ ; 测量数据与计算结果列入表 7 中.

表 7

| 方法     | 双 探 针 法   | 四 探 针 法<br>(用(18)式)  | 根据霍尔系数<br>测量结果计算  | 按 Smits 的理論<br>計 算                                   |
|--------|---|--|---|--|
| 电阻率    |   |  |   |  |
| $\rho$ | 38.7  | 39.0   | 38.6  | 37.9   |
| 备 注    | $V = 28 \text{ mV}$<br>$I = 0.5 \text{ mA}$<br>$S = 1 \text{ mm}$ | $V = 48.47 \text{ mV}$<br>$I = 0.5 \text{ mA}$<br>$F_2 = 1.56$<br>$2x_0 \gg 10s$ | 霍尔系数:<br>$R = 1.35 \times 10^5$<br>$\mu_n = 3500^*$<br>$\rho = R/\mu_n$ | $C = 3.6672$<br>$F\left(\frac{W}{s}\right) = 0.8490$ |

\*  $\mu_n = 3.5 \cdot 10^7 \cdot T^{-1.8} \text{ cm}^2/\text{v} \cdot \text{sec}.$   
 $T = 300^\circ\text{K}.$

由此表中看出, 霍尔效应的测量和用双探针法测量结果, 说明用前面导出的公式计算电阻率能够得到满意的结果。如取样品的实际电阻率为

$$\frac{38.7 + 39.0 + 38.6}{3} = 38.85 \text{ ohm-cm},$$

那么, 与 Smits 的方法比较, 两者的百分误差为

$$\frac{38.85 - 37.9}{38.85} = 2.45\%.$$

### 参 考 文 献

- [1] Valdes, L. B., *Proc. I. R. E.*, **42**, 2, (1954), 420.
- [2] Федотов, Я. А., Полупроводниковые приборы и их применения. вып. 2, (1957), 21.
- [3] Smits, F. M., *The Bell System Technical Journal*. **37**, 3, (1958), 711.
- [4] Logan, M. A., *The Bell System Technical Journal*. **40**, 3, (1961), 885.
- [5] Красюк, Б. А., Грибов, А. И., Полупроводники-германий и кремний (1961).
- [6] Vaughan, D. E., *British Journal of Appl. Phys.*, **12**, 8, (1961), 414.
- [7] Иглицын, М. И., Конспект лекции по физике полупроводников. (1959).
- [8] Рыжик, И. М., Градштейн, И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. (1951).
- [9] Смирнов, В. И., Курс высшей математики. 中文版卷一 (1957).
- [10] Бронштейн, И. Н. и Семендяев К. А., Справочник по математике, (1955).
- [11] Пятизначные таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций; Геодиздат, (1955).
- [12] Burington R. S., *Handbook of Mathematical Tables and Formulas*, (1957).

## ПОПРАВочНЫЕ ФУНКЦИИ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ЧЕТЫРЕХЗОНДОВЫМ МЕТОДОМ НА ОБРАЗЦЕ ПОЛУПРОВОДНИКА В ФОРМЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Су Чан-хоу

Резюме

На основании теоретического анализа выведены общие выражения для поправочных функций на удельное сопротивление полупроводника, измеренное четырехзондовым методом на образце в форме прямоугольника. Эти выражения, одновременно учитывающие влияние трёх ограниченных геометрических размеров образца на результаты измерения, могут служить формулами расчета для коэффициентов поправки. Даны таблицы значений разных поправочных функций. Отмечается, что для уменьшения погрешности измерения, помимо улучшения конкретных условий, связанных с точностью установки и техникой измерения, необходим также правильный выбор поправочного множителя.