第 19 卷 第 10 期 物 理 学 报 Vol. 19, No. 10
1963 年 10 月 ACTA PHYSICA SINICA October, 1963

关于波导管的格林张量函数*

顾 福 年
(江 西 大 学)

提 要

本文以本征函数展开的方法，研究了波导管中格林函数的一般性质和形式．为了得到波导管的本征函数（简正波）和格林张量函数的一些关系，我們首先对格林函数作富氏变换，它的象函数在各向同性介質波导中以并矢形式作为最簡单的表达方法，而在充有各向异性介質波导中可以表为 $ABA^{+}e^{-ikz_0}$ 的形式，这里 A 是坐标矩陣．用这种方法詳細推导了均匀各向同性介質波导中的并矢格林函数。

研究波导管的格林函数对于不規則波导管、障碍和耦合等都起着重要作用．如 Marcuvitz 和 Schwinger[1] 研究由于不連續性而产生的电磁場，或 Hauser[2] 研究在波导管內各向异性障碍物所引起电磁場的变化等，实际上都不可避免地推导和引用了格林张量函数．他們都把波导管內的格林函数表示为波导管本征函数的并矢．这对于分析电磁場有很多帮助．本文的目的就是从比較一般的观点来考慮和推求波导管的格林张量函数，这波导管內可充有各向异性介質．

对时間依賴为 $e^{-i\omega t}$ 的麦克斯韦方程的格林张量函数 $\overleftrightarrow{g}$ 是由下式来定义的，

$$\omega\begin{bmatrix}\overleftrightarrow{\varepsilon} & \overleftrightarrow{0}\\ \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{\mu}\end{bmatrix}[\overleftrightarrow{\mathscr{G}}]-\begin{bmatrix}\overleftrightarrow{0} & \nabla x\\ \nabla x & \overleftrightarrow{0}\end{bmatrix}[\overleftrightarrow{\mathscr{G}}]=\delta(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\overleftrightarrow{I_6}, \tag{1}$$

这里 $\overleftrightarrow{I_6}$ 为六行六列的单位矩陣．如果在上式中把对柱軸 z 坐标的运算和对横截面坐标的运算分开来，就有下面的形式[3]：

$$\left(\mathscr{L}_\rho-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial z}\Gamma_z\right)\overleftrightarrow{\mathscr{G}}=\delta(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\overleftrightarrow{I_6}. \tag{1'}$$

为了求(1′)中定义的格林函数，本来可以用比較簡单的方式来表示的[4]；因为如果有两个算符 $\mathscr{L}_{\mathbf{p}}$ 和 B_z 分别对横坐标和綜坐标作运算 $\left(这里\ B_z=-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial z}\right)$，而設有张量函数 $\overleftrightarrow{G_\lambda}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)$ 和矢量 $\boldsymbol{\varphi}_\lambda(z)$ 满足下面二式：

$$(\mathscr{L}_{\mathbf{p}}-\lambda\Gamma_z)\overleftrightarrow{G_\lambda}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)=\delta(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)\overleftrightarrow{I_6},$$

而

$$(B_z+\lambda\Gamma_z)\boldsymbol{\varphi}_\lambda(z)=0.$$

当然，现在下面的方程就很容易解出来了，

$$\boldsymbol{\varphi}_\lambda^k(z)=e^{-i\lambda z}\mathbf{I}_k \qquad k=1,2,\cdots 6;$$

---

* 1962 年 7 月 16 日收．

$\mathbf{I}_k$ 为 k 分量为 1 的单位矢量,其对应的 δ 函数可以写成并矢形式如下:

$$\overleftrightarrow{I_6}\delta(z,\ z_0)=\frac{1}{2\pi}\sum_k\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}_\lambda^k(z)\boldsymbol{\varphi}_\lambda^{k*}(z_0)d\lambda.$$

我們研究积分

$$\frac{1}{2\pi}\sum_k\int\overleftrightarrow{G_\lambda}(\boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{\rho}_0)\boldsymbol{\varphi}_\lambda^k(z)\boldsymbol{\varphi}_\lambda^{k*}(z_0)d\lambda,$$

对它作运算,并利用 $\overleftrightarrow{G}$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_\lambda$ 的性质,得到

$$(\mathscr{L}_{\boldsymbol{\rho}}+B_z)\cdot\frac{1}{2\pi}\sum_k\int\overleftrightarrow{G_\lambda}(\boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{\rho}_0)\boldsymbol{\varphi}_\lambda^k(z)\boldsymbol{\varphi}_\lambda^{k*}(z_0)d\lambda=$$

$$=\delta(\boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{\rho}_0)\delta(z,\ z_0)\overleftrightarrow{I_6}+\frac{1}{2\pi}\sum_k\int\lambda\Gamma_z\overleftrightarrow{G_\lambda}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)\boldsymbol{\varphi}_\lambda^k(z)\boldsymbol{\varphi}_\lambda^{k*}(z_0)d\lambda-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_k\int\overleftrightarrow{G_\lambda}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)\cdot\lambda\Gamma_z\boldsymbol{\varphi}_\lambda^k(z)\boldsymbol{\varphi}_\lambda^{k*}(z_0)d\lambda.$$

如果 Γ_z 和 $\overleftrightarrow{G_\lambda}$ 是可以互换的,則上式后面二項互相抵消,故所引入的积分就是式(1′)所要求的解 $\overleftrightarrow{g}$. 但目前这种互换关系并不成立,所以就引起了問題的复杂性.

作为求格林函数的准备,先写出有外源的麦克斯韦方程. 但假定其电磁波传輸方式是波导型式的,即对 z 的依賴关系是 e^{ikz},表示如下:

$$(\mathscr{L}_\rho-k\Gamma_z)\boldsymbol{\Phi}=\mathbf{J}.\tag{2}$$

这里 $\boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ i\mathbf{H}\end{pmatrix}$, $\mathbf{J}=\begin{pmatrix}-i\mathbf{j}\\ -\mathbf{j}'\end{pmatrix}$,而 $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{j}'$ 分别是电流和磁流. 把(2)式分为横向部分和纵向部分[3]. 其纵向部分是

$$\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ E_z\\ \mathbf{0}\\ iH_z\end{pmatrix}=B_1\begin{pmatrix}\mathbf{E}_t\\ 0\\ i\mathbf{H}_t\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ -ij_z/\omega\varepsilon_{33}\\ \mathbf{0}\\ -j_z'/\omega\varepsilon_{33}\end{pmatrix},\tag{3}$$

而横向部分为

$$A\begin{pmatrix}\mathbf{E}_t\\ 0\\ i\mathbf{H}_t\\ 0\end{pmatrix}=B_2\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ E_z\\ \mathbf{0}\\ iH_z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-i\mathbf{j}_t\\ 0\\ -\mathbf{j}_t'\\ 0\end{pmatrix}.\tag{4}$$

在直角坐标中,(3),(4)式中的各个算符写成

$$B_1=\begin{bmatrix}\dfrac{-1}{\varepsilon_{33}}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\ \varepsilon_{31}&\varepsilon_{32}&0\end{bmatrix} & \dfrac{1}{\omega\varepsilon_{33}}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\ -\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial x}&0\end{bmatrix}\\ \dfrac{1}{\omega\mu_{33}}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\ -\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial x}&0\end{bmatrix} & \dfrac{-1}{\mu_{33}}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\ \mu_{31}&\mu_{32}&0\end{bmatrix}\end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega\varepsilon_{13} & 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & -\omega\varepsilon_{23} & 0 & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & -\omega\mu_{13} \\ 0 & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -\omega\mu_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \omega\varepsilon_{11} & \omega\varepsilon_{12} & 0 & 0 & ik & 0 \\ \omega\varepsilon_{12} & \omega\varepsilon_{22} & 0 & -ik & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ik & 0 & \omega\mu_{11} & \omega\mu_{12} & 0 \\ -ik & 0 & 0 & \omega\mu_{21} & \omega\mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由(4)得到

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_t \\ 0 \\ i\mathbf{H}_t \\ 0 \end{pmatrix} = A^{-1}B_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ E_z \\ \mathbf{0} \\ iH_z \end{pmatrix} + A^{-1} \begin{pmatrix} -i\mathbf{j}_t \\ 0 \\ -\mathbf{j}'_t \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

代入(3)式，有

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ E_z \\ \mathbf{0} \\ iH_z \end{pmatrix} = B_1A^{-1}B_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ E_z \\ \mathbf{0} \\ iH_z \end{pmatrix} + B_1A^{-1} \begin{pmatrix} -i\mathbf{j}_t \\ 0 \\ -\mathbf{j}'_t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -ij_z/\omega\varepsilon_{33} \\ \mathbf{0} \\ -j'_z/\omega\mu_{33} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

波导管的簡正波就是假設电流 $\mathbf{j}$ 和磁流 $\mathbf{j}'$ 为 0 滿足(5)和(6)式以及边界条件的解．以下我們总是假定管壁是理想金属导体組成的．在这样的边界条件下，对应的微分方程有解，其本征值为 k_n，本征矢量为

$$\boldsymbol{\phi}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{tn} \\ E_{zn} \\ i\mathbf{H}_{tn} \\ iH_{zn} \end{pmatrix}.$$

不过一般說来，其正交关系式[3]是

$$(\boldsymbol{\varphi}_n, \Gamma_z\boldsymbol{\varphi}_m) = N_n\delta_{nm}.$$

为了要得到(1)式定义的格林函数和波导管本征函数之間的关系，现在我們对(1)式作对 z 坐标的富氏变换：

$$\bar{f} = \mathscr{F}(f)(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho, z)e^{-ikz}dz, \tag{7}$$

而逆变换

$$(\mathscr{F}^{-1}\phi)(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{ikz}dk.$$

如果注意到

$$\mathscr{F}\left(\frac{\partial}{\partial z}F\right)=ik\mathscr{F}(F),$$

则对 (1′) 式作富氏变换后得到

$$(\mathscr{L}-k\Gamma_z)\overleftrightarrow{\widetilde{\mathscr{G}}}=\overleftrightarrow{I_6}\delta(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)e^{-ikz_0}. \tag{8}$$

在运算形式上，(8)式的算符和(2)式是一样的. 如果我們假定这算符 $P_{\boldsymbol{\rho}}=(\mathscr{L}-k\Gamma_z)$ 是自伴的(关于自伴的条件，只要 $\overleftrightarrow{\mu}$ 和 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 是厄密矩陣[3])，此时因(見附录)

$$[P_{\boldsymbol{\rho}}\overleftrightarrow{\widetilde{\mathscr{G}}}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_1),\ \overleftrightarrow{\widetilde{\mathscr{G}}}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_2)]=[e^{-ikz_0}\delta(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_1)\overleftrightarrow{I_6},\ \overleftrightarrow{\widetilde{\mathscr{G}}}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_2)]=\overleftrightarrow{\widetilde{\mathscr{G}}}^*(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2)e^{-ikz_0},$$

而在上式左边利用 $P_{\boldsymbol{\rho}}$ 的自伴性，有

$$[\overleftrightarrow{\widetilde{\mathscr{G}}}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_1),\ P_{\boldsymbol{\rho}}\overleftrightarrow{\widetilde{\mathscr{G}}}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_2)]=[\overleftrightarrow{\widetilde{\mathscr{G}}}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_1),\ \delta(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_2)\overleftrightarrow{I_6}e^{-ikz_0}]=\overleftrightarrow{\widetilde{\mathscr{G}}}^T(\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1)e^{+ikz_0}.$$

設 $z_0=0$，則对应(8)式的解 $\overleftrightarrow{\widetilde{\mathscr{G}}}$ 有性質

$$\overleftrightarrow{\widetilde{\mathscr{G}}}^*(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2)=\overleftrightarrow{\widetilde{\mathscr{G}}}^T(\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1). \tag{9}$$

因此，作为格林张量函数最簡单的并矢形式是

$$\overleftrightarrow{\widetilde{\mathscr{G}}}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\rho},k)\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\rho}_0,k)e^{-ikz_0}, \tag{10}$$

而且当 $k=k_n$，即在(2)式的本征值时，$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\rho},k)$ 有奇点，显見(10)式滿足关系式(9).

現在作为一个例子，我們先推求在各向同性介質中的格林函数，当然首先要求得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\rho},k)$ 矢量，此时

$$B_1AB_2=-\frac{1}{r^2}\begin{bmatrix}\overleftrightarrow{\Delta_0} & \overleftrightarrow{0}\\ \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{\Delta_0}\end{bmatrix},$$

这里

$$\overleftrightarrow{\Delta_0}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\Delta\end{bmatrix},$$

Δ 是在 $\boldsymbol{\rho}$ 坐标下二維的拉普拉斯算符.

如所周知，本征矢量有二类：对应于 E 波的是

$$\mathbf{f}_n=\left(\frac{r_n^2}{\omega^2\varepsilon\mu+\omega^2\varepsilon^2}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}\dfrac{ik}{r_n^2}\nabla_t\varphi_n\\ \varphi_n\\ -\dfrac{\omega\varepsilon}{r_n^2}\mathbf{i}_{z_0}\times\nabla_t\varphi_n\\ 0\end{pmatrix}\equiv\left(\frac{r_n^2}{\omega^2\varepsilon\mu+\omega^2\varepsilon^2}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}f_{n1}\\ f_{n2}\\ \vdots\\ f_{n5}\\ 0\end{pmatrix},$$

有时記 $\dfrac{ik_n}{r_n^2}\nabla_t\varphi_n$ 为 $\mathbf{f}_{nt}^e$，φ_n 为 $\mathbf{f}_{nz}^e$，$-\dfrac{\omega\varepsilon}{r_n^2}\mathbf{i}_{z_0}\times\nabla_t\varphi_n$ 为 $\mathbf{f}_{nt}^h$. 对应于 H 波的本征矢量

$$\mathbf{g}_n=\left(\frac{r_n'^2}{\omega^2\varepsilon\mu+\omega^2\mu^2}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}-\dfrac{\omega\mu}{r_n'^2}\mathbf{i}_{z_0}\times\nabla_t\psi_n\\ 0\\ \dfrac{ik}{r_n'^2}\nabla_t\psi_n\\ \psi_n\end{pmatrix}\equiv\left(\frac{r_n'^2}{\omega^2\varepsilon\mu+\omega^2\mu^2}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}g_{n1}\\ g_{n2}\\ 0\\ g_{n4}\\ g_{n5}\\ g_{n6}\end{pmatrix}.$$

有时記 ψ_n 为 $\mathbf{g}^h_{nz}$，$\dfrac{ik_n}{r_n'^2}\nabla_t\psi_n$ 为 $\mathbf{g}^h_{nt}$，$-\dfrac{\omega\mu}{r_n'^2}\mathbf{i}_{z_0}\times\nabla_t\psi_n$ 为 $\mathbf{g}^e_{nt}$. 上面二式中的 k 取 k_n 或 $-k_n$ 是由下面富氏逆变换时来决定，当然和通常一样，

$$\Delta\varphi_n+r_n^2\varphi_n=0\qquad \varphi_n|_s=0,$$

$$\Delta\psi_n+r_n'^2\psi_n=0\qquad \frac{\partial}{\partial n}\psi_n|_s=0.$$

这里 $r_n^2=\omega^2\varepsilon\mu-k_n^2$，$r_n'^2=\omega^2\varepsilon\mu-k_n'^2$. 有正交归一关系式

$$\int\varphi_m\varphi_n d\sigma=\delta_{nm};\qquad \int\psi_m\psi_n d\sigma=\delta_{nm};$$

而且

$$\int\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}\right)d\sigma=r_n^2\delta_{nm},$$

$$\int\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi_m}{\partial x}+\frac{\partial\psi_n}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi_m}{\partial y}\right)d\sigma=r_n'^2\delta_{nm};$$

在 $\mathbf{f}_n$ 和 $\mathbf{g}_n$ 表达式前面的数值是归一化因子.

因此在 E 型波中，其 δ 函数可以表为下面的并矢形式：

$$\delta(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)\overleftrightarrow{I}_6=\sum_n\frac{r_n^2}{\omega^2\varepsilon\mu+\omega^2\varepsilon^2}\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\rho})\mathbf{f}_n^*(\boldsymbol{\rho}_0)=[\delta_i^k],\tag{11}$$

在 H 型波中，其 δ 函数可以表为

$$\delta(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)\overleftrightarrow{I}_6=\sum_n\frac{r_n'^2}{\omega^2\varepsilon\mu+\omega^2\mu^2}\mathbf{g}_n(\boldsymbol{\rho})\mathbf{g}_n^*(\boldsymbol{\rho}_0)=[\delta_i^k].\tag{12}$$

利用(6)式，把矢量 $\mathbf{J}$ 代以 f^k，把矢量 $\boldsymbol{\Phi}$ 代以 $\widetilde{\mathbf{g}}^k$，这样在 E 波中有

$$(1-B_1AB_2)\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \tilde g_{3k}\\ \mathbf{0}\\ \tilde g_{6k}\end{pmatrix}=\sum\frac{r_n^2}{\omega^2\varepsilon\mu+\omega^2\varepsilon^2}\left[B_1A^{-1}\begin{pmatrix}f_{n1}\\ f_{n2}\\ 0\\ f_{n4}\\ f_{n5}\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ f_{n3}/\omega\varepsilon\\ \mathbf{0}\\ 0\\ f_{n6}/\omega\varepsilon\end{pmatrix}\right]f_{nk}^*(\boldsymbol{\rho}_0)e^{-ikz_0},$$

而

$$\begin{pmatrix}f_{n1}\\ f_{n2}\\ 0\\ f_{n4}\\ f_{n5}\\ 0\end{pmatrix}=(A^{-1}B_2)_n\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ f_{n3}\\ \mathbf{0}\\ 0\end{pmatrix},$$

所以

$$(1-B_1A^{-1}B_2)\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \tilde{g}_{3k}\\ \mathbf{0}\\ \tilde{g}_{6k}\end{pmatrix}=\sum_n\frac{r_n^2}{\omega^2\varepsilon\mu+\omega^2\varepsilon^2}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \frac{1}{\omega\varepsilon r^2}(k^2+\omega^2\varepsilon^2+r^2)\\ \mathbf{0}\\ 0\end{pmatrix}f_{nk}^{*}\,e^{-ikz_0}. \quad (13)$$

因为在 $(1-B_1A^{-1}B_2)$ 中有运算 $\frac{1}{r^2}(r^2+\Delta)$,所以

$$\frac{1}{r^2}(r^2+\Delta)\begin{pmatrix}\tilde{g}_{1k}\\ \tilde{g}_{2k}\\ 0\\ \tilde{g}_{4k}\\ \tilde{g}_{5k}\\ 0\end{pmatrix}=\sum_n\frac{r_n^2}{\omega\varepsilon r^2}\begin{pmatrix}\frac{r_n^2}{r^2}f_{n1}\\ \frac{r_n^2}{r^2}f_{n2}\\ 0\\ f_{n4}\\ f_{n5}\\ 0\end{pmatrix}f_{nk}^{t}\,e^{-ikz_0}+$$

$$+\sum_n\frac{r_n^4(r^2-r_n^2)}{\omega^2\varepsilon\mu+\omega^2\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{r^4}\begin{pmatrix}\omega\mu f_{n1}-ikf_{n5}\\ \omega\mu f_{n2}+ikf_{n4}\\ 0\\ -ikf_{n2}+\omega\varepsilon f_{n4}\\ ikf_{n1}+\omega\varepsilon f_{n5}\\ 0\end{pmatrix}f_{nk}^{*}\,e^{-ikz_0}. \quad (14)$$

(14)式中最后一項当 $k=k_n$ 时(即 $r=r_n$)为 0,而 $r=0$, 即 $k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ 有奇点,但此时不可能是波导管內电磁波传輸方式,所以我們忽略不計. 这样我們就有

$$[\tilde{\overleftrightarrow{g}}]=\sum_n\frac{r_n^2}{\omega\varepsilon(r^2-r_n^2)}\begin{pmatrix}f_{1n}\\ \vdots\\ f_{5n}\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{1n}\\ \vdots\\ f_{5n}\\ 0\end{pmatrix}^{*}e^{-ikz_0}. \quad (15)$$

現在要对(15)式作反演. 設 $f(k)$ 沒有极点,研究反演积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikz_0}f(k)}{k_n^2-k^2}e^{ikz}dk.$$

設 k_n 的虛数部分大于 0, 而在积分求得后再令 $I_mk_n\to 0$. 設 $z>z_0$, 为了使 $e^{ik(z-z_0)}$ 当 $|k|\to\infty$ 时趋于零,添一个上半圓,其极点为 k_n, 所以有留数

$$2\pi i\cdot\frac{f(k)}{2\pi}\frac{e^{ik(z-z_0)}}{-2k}\bigg|_{k=k_n}=-\frac{i}{2k_n}e^{ik_n(z-z_0)}f(k_n);$$

同样当 $z<z_0$ 添一个下半圓有留数

$$-\frac{i}{2k_n}e^{ik_n(z_0-z)}f(-k_n).$$

这样我們得到

$$[\overleftrightarrow{g}] = \frac{1}{2}\sum \frac{-ir_n^2}{\omega\varepsilon k_n}\begin{pmatrix} \frac{ik}{r_n^2}\nabla_t\varphi_n(\boldsymbol{\rho}) \\ \varphi_n(\rho) \\ -\frac{\omega\varepsilon}{r_n^2}\mathbf{i}_{z_0}\times\nabla_t\varphi_n(\boldsymbol{\rho}) \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-ik}{r_n^2}\nabla_t\varphi_n(\boldsymbol{\rho}_0) \\ \varphi_n(\boldsymbol{\rho}_0) \\ -\frac{\omega\varepsilon}{r_n^2}\mathbf{i}_{z_0}\times\nabla_t\varphi_n(\boldsymbol{\rho}_0) \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_n(z-z_0)}. \quad (16)$$

在上式中当 $z > z_0$ 时 $k = k_n$; 在 $z < z_0$ 时 $k = -k_n$.

同样，如果对H型波作相同的运算，得到

$$[\overleftrightarrow{g}] = \frac{1}{2}\sum \frac{-ir_n'^2}{\omega\varepsilon k_n'}\begin{pmatrix} -\frac{\omega\mu}{r_n'^2}\mathbf{i}_{z_0}\times\nabla_t\psi_n(\boldsymbol{\rho}) \\ 0 \\ \frac{ik}{r_n'^2}\nabla_t\psi_n(\boldsymbol{\rho}) \\ \psi_n(\boldsymbol{\rho}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-\omega\mu}{r_n'^2}\mathbf{i}_{z_0}\times\nabla\psi_n(\boldsymbol{\rho}_0) \\ 0 \\ \frac{-ik}{r_n'^2}\nabla_t\psi_n(\boldsymbol{\rho}_0) \\ \psi_n(\boldsymbol{\rho}_0) \end{pmatrix} e^{ik(z-z_0)}, \quad (17)$$

在上式中，当 $z > z_0$ 时 $k = k_n'$; 在 $z < z_0$ 时 $k = -k_n'$. 这里的(16)和(17)式和文献[1]中的結果完全相同(这里改正了个别符号).

为了推求一般充有各向异性介質波导的格林函数，我們必須先求出它們对应的本征值和本征函数[5]. 由于其复杂性，以及正交性的特殊表示形式，我們还是取各向同性介質中的正交函数系作为坐标函数，这里以文献[6]为例，即把电磁場展开为

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^{\infty}(A_{nz}\mathbf{f}_{nz}^e + A_{nt}\mathbf{f}_{nt}^e) + \sum_{n=1}^{\infty}A_{nt}'\mathbf{g}_{nt}^e, \quad (18)$$

$$\mathbf{H} = \sum_{n=1}^{\infty}(B_{nz}\mathbf{g}_{nz}^h + B_{nt}\mathbf{g}_{nt}^h) + \sum_{n=1}^{\infty}B_{nt}'\mathbf{f}_{nt}^h. \quad (19)$$

所以格林张量函数亦可由上面的函数組成. 我們的非齐次麦克斯韦方程由 (2) 式一样可以表为

$$(\mathscr{L} - k\Gamma_z)\begin{pmatrix}\mathbf{E} \\ i\mathbf{H}\end{pmatrix} = \mathbf{J} \equiv \begin{pmatrix}\mathbf{K} \\ \mathbf{L}\end{pmatrix}.$$

象在文献[6]中一样，当我們以(18)，(19)两式代入上面的方程，并分别以 $\mathbf{f}_{nz}^e, \mathbf{f}_{nt}^e, \mathbf{g}_{nt}^e, \mathbf{g}_{nz}^h, \mathbf{g}_{nt}^h, \mathbf{f}_{nt}^h$ 和它作乘积后，我們得到六个非齐次无穷維代数方程組如下：

$$[\mathscr{M}_{ik}^{st}]\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_3 \\ \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_3\end{pmatrix},$$

这里的 $\mathbf{K}_i$, $\mathbf{L}_i$ 都是无穷維矢量：

$$\mathbf{K}_1 = \{K_{n1}\} = \left\{\iint \mathbf{K}\cdot\mathbf{f}_{nz}^{e*}d\sigma\right\}, \quad \mathbf{K}_2 = \{K_{n2}\} = \left\{\iint \mathbf{K}\cdot\mathbf{f}_{nt}^{e*}d\sigma\right\},$$

$$\mathbf{K}_3 = \{K_{n3}\} = \left\{\iint \mathbf{K}\cdot\mathbf{g}_{nt}^{e*}d\sigma\right\},$$

$$\mathbf{L}_1 = \{L_{n1}\} = \left\{\iint \mathbf{L}\cdot \mathbf{g}^{h*}_{nz} d\sigma\right\},\quad \mathbf{L}_2 = \{L_{n2}\} = \left\{\iint \mathbf{L}\cdot \mathbf{g}^{h*}_{nt} d\sigma\right\},$$

$$\mathbf{L}_3 = \{L_{n3}\} = \left\{\iint \mathbf{L}\cdot \mathbf{f}^{h*}_{nt} d\sigma\right\}.$$

上面的附标 $s, t = 1, 2\cdots 6$. $i, k = 1, 2, 3\cdots$. $\mathscr{M}^{st}_{ik}$ 可以了解为六行六列的"矩陣"，但是每一个"元素"又都是一个无穷維矩陣，其中每一个元素可以是 K 和 K_n 的函数. 如果 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 和 $\overleftrightarrow{\mu}$ 变为数量，则 $\mathscr{M}^{st}_{ik}$ 的各元素就退化为 0，或簡单常数；这里的矢量 $\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{B}_3$ 都是无穷維矢量，分别对应于系数 $\{A_{nz}\}, \{A_{nt}\}, \{A'_{nt}\}, \{B_{nz}\}, \{B_{nt}\}, \{B'_{nt}\}$; $n = 1, 2, 3\cdots$. 我們以近似方法得到 $[\mathscr{M}^{st}_{ik}]$ 的逆矩陣 $[\mathscr{N}^{st}_{ik}]$，則

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\\ \vdots \\ \mathbf{B}_3\end{pmatrix} = [\mathscr{N}^{st}_{ik}]\begin{pmatrix}\mathbf{K}_1\\ \vdots \\ \mathbf{L}_3\end{pmatrix}.$$

所以对应于方程 (8) 的解

$$\overleftrightarrow{\widetilde{g}} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{f}}^{e}_{nz}(\boldsymbol{\rho}) & \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} \\ \overleftrightarrow{0} & \vec{\mathbf{f}}^{e}_{nt}(\boldsymbol{\rho}) & \vec{\mathbf{g}}^{e}_{nt}(\boldsymbol{\rho}) & \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} \\ \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} & \vec{\mathbf{g}}^{h}_{nz}(\boldsymbol{\rho}) & \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} \\ \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} & \vec{\mathbf{g}}^{h}_{nt}(\boldsymbol{\rho}) & \vec{\mathbf{f}}^{h}_{nt}(\boldsymbol{\rho}) \end{bmatrix} [\mathscr{N}^{st}_{ik}] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \downarrow \mathbf{f}^{e*}_{nz}(\boldsymbol{\rho}_0) & \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} \\ \overleftrightarrow{0} & \downarrow \mathbf{f}^{e*}_{nt}(\boldsymbol{\rho}_0) & \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} \\ \overleftrightarrow{0} & \downarrow \mathbf{g}^{e*}_{nt}(\boldsymbol{\rho}_0) & \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} \\ \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} & \downarrow \mathbf{g}^{h*}_{nz}(\boldsymbol{\rho}_0) & \overleftrightarrow{0} \\ \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} & \downarrow \mathbf{g}^{h*}_{nt}(\boldsymbol{\rho}_0) \\ \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} & \overleftrightarrow{0} & \downarrow \mathbf{f}^{h*}_{nt}(\boldsymbol{\rho}_0) \end{bmatrix} \times e^{-ikz_0}, \tag{20}$$

这里 $\vec{\mathbf{f}}^{e}_{nz}(\boldsymbol{\rho})$ 等代表只有一行的无穷矩陣，即

$$\vec{\mathbf{f}}^{e}_{nz}(\boldsymbol{\rho}) = [\mathbf{f}_{1z}(\boldsymbol{\rho}), \mathbf{f}_{2z}(\boldsymbol{\rho}), \cdots],$$

而 $\downarrow \mathbf{f}^{e}_{nz}(\boldsymbol{\rho}_0)$ 等代表只有一列的无穷矩陣，即

$$\downarrow \mathbf{f}^{e}_{nz}(\boldsymbol{\rho}_0) = \begin{bmatrix}\mathbf{f}_{1z}(\boldsymbol{\rho}_0)\\ \mathbf{f}_{2z}(\boldsymbol{\rho}_0)\\ \vdots\end{bmatrix}.$$

所以(20)式可以写成

$$\overleftrightarrow{\widetilde{g}} = \overleftrightarrow{A}(\boldsymbol{\rho})[n^{st}_{ik}]\overleftrightarrow{A}^{+}(\boldsymbol{\rho}_0)e^{-ikz_0}, \tag{20'}$$

这就是波导管中格林张量象函数的最一般形式，$\overleftrightarrow{A}(\boldsymbol{\rho})$ 是由波导管的本征函数所組成的坐标矩陣. 可以想到，如果 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 和 $\overleftrightarrow{\mu}$ 都是厄密矩陣，則由于 $\overleftrightarrow{\widetilde{g}}$ 要滿足 (9) 式，所以 $[n^{st}_{ik}]$ 一定亦是厄密矩陣. 当然我們不一定要采取上面的坐标系，可以在不同的表象下来表达这个式子，例如在該波导的本征矢量坐标下来表达这个式子就可以比較簡单，这种表象理論和量子力学中的并无两样. 最后我們还要对 $\overleftrightarrow{\widetilde{g}}$ 作反演，用求留数的方法逐一求出元素就得到格林函数 $\overleftrightarrow{g}$，当然，$\overleftrightarrow{g}$ 的形式亦是

$$\overleftrightarrow{g} = \overleftrightarrow{A}(\boldsymbol{\rho})[Q_{ik}^{il}]\overleftrightarrow{A}^{+}(\boldsymbol{\rho}_0)e^{ik_e|z-z_0|}. \tag{21}$$

附　　录

如有矩陣K和L,現在定义它們的內积为另一个常数矩陣如下:

$$[K,\ L] = \int K^T L^* d\tau,$$

K^T为K的轉置矩陣，L^*为L的共軛矩陣，K^TL^*为这两矩陣在通常意义下的乘积. 为了方便起見,把矩陣写成列向量$\mathbf{K}^i$和行向量$\mathbf{K}_i$的形式,即

$$K = \begin{bmatrix} K_1^1 & K_1^2 & K_1^3 & \cdots \\ K_2^1 & K_2^2 & K_2^3 & \cdots \\ K_3^1 & K_3^2 & K_3^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \equiv [\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2, \mathbf{K}^3 \cdots] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_3 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

所以

$$K^T = \begin{bmatrix} K_1^1 & K_2^1 & K_3^1 & \cdots \\ K_1^2 & K_2^2 & K_3^2 & \cdots \\ K_1^3 & K_2^3 & K_3^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} = [\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3 \cdots] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 \\ \mathbf{K}^2 \\ \mathbf{K}^3 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

所以轉置矩陣实际上就把行向量和列向量互換了一下,这样內积可以写成

$$[K,\ L] = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}^1, \mathbf{L}^1) & (\mathbf{K}^1, \mathbf{L}^2) & (\mathbf{K}^1, \mathbf{L}^3) & \cdots \\ (\mathbf{K}^2, \mathbf{L}^1) & (\mathbf{K}^2, \mathbf{L}^2) & (\mathbf{K}^2, \mathbf{L}^3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} = [(\mathbf{K}^i, \mathbf{L}^j)].$$

設有算符A作用在K上,我們知道

$$AK \equiv [A\mathbf{K}^1,\ A\mathbf{K}^2,\ A\mathbf{K}^3 \cdots],$$

我們有

$$[AK,\ L] = [(A\mathbf{K}^i,\ \mathbf{L}^j)].$$

如A为自伴算符,則

$$[AK,\ L] = [(\mathbf{K}^i,\ A\mathbf{L}^j)] = (K,\ AL),$$

这在形式上和普通矢量內积是一样的.

参　考　文　献

[1] Marcuvitz, N. and Schwinger, J., *J. A. P.*, **22**, No. 6 (1951), 806—819.
[2] Hauser, W., *Quarterly Jour. Mech. and Applied Math.*, **11**, part 4 (1958), 427—437.
[3] Bresler, A. D., Joshi, G. H. and Marcuvitz, N., *J. A. P.*, **29**, No. 5 (1958), 794—799.
[4] Marcuvitz, N., Field representations in spherically stratified regions. Symposium. "The Theory of Electromagnetic Waves", N. Y., 1951.
[5] Гуревич, А. Г., Ферриты на сверхвысоких частотах, Москва, 1960.
[6] Никольский, В. В., Радио и Электро, No. 1 (1961), 74—80.

ABOUT TENSOR GREEN FUNCTIONS IN WAVEGUIDES

KU FU-NIEN
(*Kiangsi University*)

ABSTRACT

In this paper we studied the general forms and properties of tensor Green functions in waveguides with the methods of eigenfunctions expansion. For acquiring relations between the eigenfunctions of waveguides and tensor Green function, we first take the Fourier transform of Green function. In isotropic media the simplest image function can be expressed in dyadic form, and in anisotropic media in the form of $ABA^{+}e^{-ikz_0}$,where A is the coordinate matrix. With this method, we studied the dyadic Green functions of waveguides in isotropic media in detail.