第 29 卷 第 1 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 29 No. 1
2006 年 1 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Jan., 2005

广义周期 Besov 类在周期 Sobolev 空间中的宽度 *

许贵桥

(天津师范大学数学学院，天津 300074)

(E-mail: xuguiqiao@eyou.com)

摘　要　本文给出了一种广义周期 Besov 类在周期 Sobolev 空间中的 n- 宽度的弱渐近估计.

关键词　广义周期 Besov 类；Sobolev 空间；n- 宽度

MR(2000) 主题分类　41A63; 41A44

中图分类　O174.41

1　引言

设 $L_p(T^d)$, $T=(-\pi,\pi]$ $(1\le p\le\infty)$ 表示普通的 2π 周期 L_p 空间. 设 $k\in N,\ h\in R^d$. 对任意 $f\in L_p(T^d)$,

$$\Delta_h^k f(x)=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{l+k}\binom{k}{l}f(x+lh) \tag{1.1}$$

为 $f(x)$ 在点 x 步长为 h 的 k 阶差分. f 的 k 阶光滑模 $\Omega_k(f,t)_p$ 定义为

$$\Omega_k(f,t)_p=:\sup_{|h|\le t}\|\Delta_h^k f\|_p. \tag{1.2}$$

Pustovoitov N N[1] 和孙永生, 汪和平 [2] 分别引入了周期函数类 $H_q^\Omega(T^d)$ 和 $B_{p\theta}^\Omega(T^d)$. 当 $\Omega(t)=\omega(t_1\cdots t_d)$ 时, [1] 和 [2] 分别讨论了 $H_q^\Omega(T^d)$ 和 $B_{p\theta}^\Omega(T^d)$ 的 Kolmogorov n- 宽度. 考虑到 $\omega(|t|)$ 具有与 $\omega(t_1\cdots t_d)$ 完全不同的性质，我们引入一种广义周期 Besov 类.

定义　设 $k\in N$, $\Omega(t)\in\Phi_k^*$, $1\le\theta\le\infty$, $1\le p\le\infty$. 称 $f\in B_{p\theta}^\Omega(T^d)$, 若 f 满足条件：

(1)　$f\in L_p(T^d)$;

本文 2003 年 1 月 3 日收到.

* 国家自然科学基金 (10071010); 天津市高等学校科技发展基金项目 (52LD69) 资助项目.

(2) $\|f\|_{b^{\Omega}_{p\theta}(T^d)} < \infty$, 其中

$$\|f\|_{b^{\Omega}_{p\theta}(T^d)} = \begin{cases} \left\{ \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{\Omega_k(f,t)_p}{\Omega(t)} \Big)^{\theta} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right\}^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \displaystyle\sup_{t>0} \frac{\Omega_k(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

线性空间 $B^{\Omega}_{p\theta}(T^d)$ 赋以范数

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p\theta}(T^d)} := \|f\|_p + \|f\|_{b^{\Omega}_{p\theta}(T^d)}$$

成为线性赋范空间. 当 $\Omega(t) = t^{\alpha}$ 时, $B^{\Omega}_{p\theta}(T^d)$ 即为普通的 Besov 空间 $B^{\alpha}_{p\theta}(T^d)$. 令

$$S^{\Omega}_{p\theta}(T^d) := \big\{ f \in L_p(T^d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p\theta}(T^d)} \le 1 \big\}.$$

若 $r \in N,\ 1 \le p \le \infty$, 则周期 Sobolev 空间 $W^r_p = W^r_p(T^d)$ 由满足范数

$$\|f\|^r_p := \|f\|_p + \sum_{j=1}^{d} \Big\| \frac{\partial^r f}{\partial x_j^r} \Big\|_p$$

为有限的 2π 周期函数按以上范数构成的线性赋范空间.

许多作者讨论了 Besov 型函数类在空间 $L_p(T^d)$ 中的 Kolmogorov n- 宽度. 注意到上述工作均利用函数的 Fourier 级数理论作为基本工具, 我们采用函数的 de la Vallee Poussin 和作工具, 结合 Nikolskii[3] 关于函数表示的思路及 Pinkus[4] 关于宽度计算的思路, 主要讨论了 $S^{\Omega}_{p\theta}(T^d)$ 在 W^r_q 中的 Gel'fand n- 宽度及线性 n- 宽度. 我们的结果为

定理 设 $k \in N,\ \Omega(t) \in \Phi^*_k,\ 1 \le q, p \le \infty,\ \Omega(t)/t^{\alpha}$ 几乎单调升, 且 $\alpha > r + d\max\big(3\frac{1}{2} - \frac{3}{p}, \frac{1}{2} + \frac{3}{q},\ \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\big)$, 则

$$(1)\quad d_n\big(S^{\Omega}_{p\theta}(T^d), W^r_q\big) \asymp \begin{cases} \Omega(n^{-1/d}) n^{r/d}, & 1 \le q \le p \le \infty, \\ \Omega(n^{-1/d}) n^{r/d}, & 2 \le p \le q \le \infty, \\ \Omega(n^{-1/d}) n^{r/d+1/p-1/2}, & 1 \le p \le 2 \le q \le \infty, \\ \Omega(n^{-1/d}) n^{r/d+1/p-1/q}, & 1 \le p \le q \le 2. \end{cases}$$

$$(2)\quad d^n\big(S^{\Omega}_{p\theta}(T^d), W^r_q\big) \asymp \begin{cases} \Omega(n^{-1/d}) n^{r/d}, & 1 \le q \le p \le \infty, \\ \Omega(n^{-1/d}) n^{r/d}, & 1 \le p \le q \le 2, \\ \Omega(n^{-1/d}) n^{r/d+1/2-1/q}, & 1 \le p \le 2 \le q \le \infty, \\ \Omega(n^{-1/d}) n^{r/d+1/p-1/q}, & 2 \le p \le q \le \infty. \end{cases}$$

$$(3)\quad d'_n\big(S^{\Omega}_{p\theta}(T^d), W^r_q\big) \asymp \begin{cases} \Omega(n^{-1/d}) n^{r/d}, & 1 \le q \le p \le \infty, \\ \Omega(n^{-1/d}) n^{r/d+1/p-1/q}, & 1 \le p \le q \le 2 \text{ or } 2 \le p \le q \le \infty, \\ \Omega(n^{-1/d}) n^{r/d+1/p-1/2}, & 1 \le p \le 2 \le q \le \infty,\ p' \ge q, \\ \Omega(n^{-1/d}) n^{r/d+1/2-1/q}, & 1 \le p \le 2 \le q \le \infty,\ p' \le q, \end{cases}$$

其中 $1/p + 1/p' = 1/q + 1/q' = 1,\ A \asymp B$ 是指存在仅依赖于 d, p, Ω, θ, k 的常数 C 使得 $B/C \le A \le CB$.

当 $r = 0$ 时, 上述结果即为 $S^{\Omega}_{p\theta}(T^d)$ 在 $L_q(T^d)$ 下的宽度估计.

2　一些引理

对 $m \in N$, 设

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \ A!" coskt + 2 \sum_{k=m+1}^{2m} ((2m-k)/m) \cos kt$$

为 de la Vallée Poussin 核．多维 de la Vallée Poussin 核定义为

$$V_m(x) := \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j).$$

对 $f \in L_p(T^d)$, 令 $V_m f := f * V_m$ 为 f 的 de la Vallée Poussin 和． de la Vallée Poussin 和的连续差定义为

$$\Phi_0 f := V_1 f, \qquad \Phi_s f := V_{2^s} f - V_{2^{s-1}} f, \qquad s = 1, 2, \cdots.$$

类似于 [5] 的证明，我们有

引理 1　设 $k \in N$, $\Omega(t) \in \Phi_k^*$, $f \in B_{p\theta}^{\Omega}(T^d)$, 则 f 在 $L_p(T^d)$ 收敛的意义下可表示为级数

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} \Phi_s, \tag{2.1}$$

且

$$\|f\|_{B_{p\theta}^{\Omega}(T^d)} \asymp \begin{cases} \left\{ \sum\limits_{s \in Z^+} \left(\dfrac{\|\Phi_s\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right\}^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s \in Z^+} \dfrac{\|\Phi_s\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{2.2}$$

引理 2　设 $k \in N$, $\Omega(t) \in \Phi_k^*$, $1 \le q < p \le \infty$, $\Omega(t)/t^{\alpha}$ 几乎单调升，且 $\alpha > d(1/q - 1/p)$, 则 $B_{q\theta}^{\Omega}(T^d) \subset B_{p\theta}^{\Omega_1}(T^d)$, 其中 $\Omega_1(t) = \Omega(t)/t^{d(1/q-1/p)}$ 且 $\forall f \in B_{q\theta}^{\Omega}(T^d)$,

$$\|f\|_{B_{p\theta}^{\Omega_1}(T^d)} << \|f\|_{B_{q\theta}^{\Omega}(T^d)}.$$

证　易检验 $\Omega_1(t) \in \Phi_k^*$. 当 $1 \le \theta < \infty$ 时，由引理 1, $\forall f \in B_{q\theta}^{\Omega}(T^d)$,

$$\left\{ \sum_{s=0}^{+\infty} \left(\frac{\|\Phi_s\|_q}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right\}^{1/\theta} << \|f\|_{B_{q\theta}^{\Omega}(T^d)}.$$

由引理 1 及 Nikolskii 不等式

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p\theta}^{\Omega_1}(T^d)} &<< \left\{ \sum_{s=0}^{+\infty} \left(\frac{\|\Phi_s\|_p}{\Omega_1(2^{-s})} \right)^{\theta} \right\}^{1/\theta} << \left\{ \sum_{s=0}^{+\infty} \left(\frac{\|\Phi_s\|_q 2^{ds(1/q-1/p)}}{\Omega_1(2^{-s})} \right)^{\theta} \right\}^{1/\theta} \\ &= \left\{ \sum_{s=0}^{+\infty} \left(\frac{\|\Phi_s\|_q}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right\}^{1/\theta} << \|f\|_{B_{q\theta}^{\Omega}(T^d)}. \end{aligned}$$

当 $\theta=\infty$ 时，由引理 1 及

$$\Omega_1^{-1}(2^{-s})=\frac{2^{-ds(1/q-1/p)}}{\Omega(2^{-s})},\qquad \|\Phi_s(f)\|_p<<2^{ds(1/q-1/p)}\|\Phi_s(f)\|_q,$$

可得 $\|f\|_{B^{\Omega_1}_{p\infty}(T^d)}\le\|f\|_{B^{\Omega}_{q\infty}(T^d)}$. 引理 2 证毕.

设 $1\le p\le\infty$, l_p^m 为 R^m 赋以范数

$$\|x\|_{l_p^m}=\Big(\sum_{k=1}^m|x_k|^p\Big)^{1/p},\qquad p<\infty.$$

当 $p=\infty$ 时取最大范数. 令 $B(l_p^m)$ 表示 l_p^m 的单位球.

设 T_m 表示关于任一变量 $x_j,\ j=1,\cdots,d$ 的阶 $\le m$ 的多元三角多项式全体. 若 $1\le p\le\infty$, 则对任一 $f\in T_m$

$$\|f\|_p\approx m^{-d/p}\Big(\sum_{k\in P_m}|f(hk)|^p\Big)^{1/p}. \tag{2.3}$$

当 $p=\infty$ 时取最大范数, 其中 $P_m:=\big\{k\in Z^d:\ -2m\le k_j<2m,\ j=1,\cdots,d\big\}$, $h=\pi/2m$ (见 [6]).

引理 3 设 $p<q$, $\Omega(t)/t^\alpha$ 几乎单调升, $\alpha>d(1/p-1/q)$, 且 s_n 表示 d_n, d^n 或 d'_n 中的任意一个，则

$$s_n\big(S^{\Omega}_{p\theta}(T^d),W^r_q\big)<<\sum_{k=0}^\infty\Omega(2^{-k})2^{rk+dk(1/p-1/q)}s_{n_k}\big(B(l_p^{2^{(k+3)d}}),l_q^{2^{(k+3)d}}\big), \tag{2.4}$$

其中 n_k 为满足 $\sum_{k=0}^\infty n_k\le n$ 的非负整数.

证 先列举关于 n- 宽度的两个事实 [4].

用 $L(X,Y)$ 表示由 X 到 Y 的连续映射的全体.

A) 用 $s_n(T;X;Y)$ 表示集 $\big\{Tx:\|x\|\le1\big\}$ 在 Y 中的相应 n- 宽度. 设 $T_i\in L(X,Y)$, $i=1,2$, 则

$$s_{n+m}(T_1+T_2;X;Y)\le s_n(T_1;X;Y)+s_m(T_2;X;Y). \tag{2.5}$$

B) 设 $T_1\in L(X,Z)$, $T_2\in L(Z,Y)$. 则 $T=T_2T_1\in L(X,Y)$, 且

$$s_n(T;X;Y)\le s_n(T_2;Z;Y)\|T_1\|_{(X,Z)}, \tag{2.6}$$

其中

$$\|T_1\|_{(X,Z)}=\sup_{x\ne0}\|T_1x\|_Z\big/\|x\|_X.$$

由对 $f\in B^{\Omega}_{p\theta}(T^d)$, $f=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\Phi_kf$ 可得

$$s_n\big(S^{\Omega}_{p\theta}(T^d),W^r_q\big)\le\sum_{k=0}^\infty s_{n_k}\big(\Phi_k;B^{\Omega}_{p\theta}(T^d);W^r_q\big).$$

我们欲证对 $k\in Z_+$,

$$s_{n_k}\big(\Phi_k;B^{\Omega}_{p\theta}(T^d);W^r_q\big)<<\Omega(2^{-k})2^{rk+dk(1/p-1/q)}s_{n_k}\big(B(l_p^{2^{(k+3)d}}),l_q^{2^{(k+3)d}}\big).$$

我们分解算子 $\Phi_k:B^{\Omega}_{p\theta}(T^d)\to T_{2^{k+1}}\cap W^r_q$ 如下： $\Phi_k=S_kL_k^{-1}IL_k\widetilde{\Phi}_k$, 其中 $\widetilde{\Phi}_k$ 为由 $B^{\Omega}_{p\theta}(T^d)$ 到 $L_p(T^d)$ 的算子 Φ_kf, 由引理 1 可得

$$\|\widetilde{\Phi}_k\|_{(B^{\Omega}_{p\theta}(T^d),L_p(T^d))}<<\Omega(2^{-k}). \tag{2.7}$$

L_k 表示由 $T_{2^{k+1}}\cap L_p(T^d)$ 到 $l_p^{2^{(k+3)d}}$ 的如下算子

$$L_k(f)=\Big\{f\Big(\frac{\pi}{2^{k+2}}m\Big)\Big\}_{m\in P_k},$$

由 (2.3) 可知

$$\|L_k\|_{(T_{2^{k+1}}\cap L_p,l_p^{2^{(k+3)d}})}<<2^{kd/p}. \tag{2.8}$$

I 表示由 $l_p^{2^{(k+3)d}}$ 到 $l_q^{2^{(k+3)d}}$ 的恒等算子， L_k^{-1} 表示由 $l_q^{2^{(k+3)d}}$ 到 $T_{2^{k+1}}\cap L_q$ 的如下算子

$$L_k^{-1}(\{a_m\}_{m\in P_k})=\sum_{m\in P_k}\frac{a_m}{2^{(k+3)d}}\prod_{j=1}^{d}V_{2^{k+1}}\Big(x_j-\frac{m_j\pi}{2^{k+2}}\Big).$$

计算可得

$$\Big\|\Big\{\sum_{m\in P_k}\frac{a_m}{2^{(k+3)d}}\prod_{j=1}^{d}V_{2^{k+1}}\Big(\frac{n_j\pi}{2^{k+2}}-\frac{m_j\pi}{2^{k+2}}\Big)\Big\}_{n\in P_k}\Big\|_{l_q^{2^{(k+3)d}}}<<\|\{a_m\}_{m\in P_k}\|_{l_q^{2^{(k+3)d}}}. \tag{2.9}$$

由 [6] 知对 $f\in T_{2^{k+1}}$, $L_k^{-1}L_k(f)=f$. 由 (2.3) 及 (2.9) 知

$$\|L_k^{-1}\|_{\big(l_q^{2^{(k+3)d}},T_{2^{k+1}}\cap L_q\big)}<<2^{-kd/q}. \tag{2.10}$$

S_k 表示由 $T_{2^{k+1}}\cap L_q$ 到 $T_{2^{k+1}}\cap W^r_q$ 的恒等映射. 由 Bernstein 不等式可得

$$\|S_k\|_{(T_{2^{k+1}}\cap L_q,T_{2^{k+1}}\cap W^r_q)}<<2^{rk}. \tag{2.11}$$

由 (2.5) 到 (2.11) 可得引理 3.

3 定理的证明

上估计

(1) 证明对 $1\le p,\ q\le+\infty$,

$$d'_n\big(S^{\Omega}_{p\theta}(T^d),W^r_q\big)<<\Omega(n^{-1/d})n^{r/d+(1/p-1/q)_+}. \tag{3.1}$$

由 $\|f\|_p<<\|f\|_q$ $(p\le q)$ 及引理 2 知仅考虑 $p=q$ 即可. 令 $2^m\asymp n^{1/d}$ 且 $T_m(f,x)=f*V_{2^m}(x)$, 则 T_m 为由 $B^{\Omega}_{p\theta}(T^d)$ 到 $T_{2^{m+1}}\cap W^r_p$ 的连续线性算子, $\dim(T_{2^{m+1}},W^r_p)<<n$, 且

$$f(x)-T_m(f,x)=\sum_{j=m+1}^{+\infty}\Phi_j(x). \tag{3.2}$$

对 $1<\theta<+\infty$, $f\in S^{\Omega}_{p\theta}(T^d)$, 由引理 1 知

$$\begin{aligned}\|f-T_mf\|_p &\le \sum_{j=m+1}^{+\infty}\|\Phi_j(f)\|_p << \Big\{\sum_{j=m+1}^{+\infty}\frac{\|\Phi_j(f)\|_p^\theta}{\Omega^\theta(2^{-j})}\Big\}^{\frac{1}{\theta}}\Big\{\sum_{j=m+1}^{+\infty}\Omega^{\theta'}(2^{-j})\Big\}^{\frac{1}{\theta'}}\\ &<<\|f\|_{B^{\Omega}_{p\theta}(T^d)}\Omega(2^{-m})\Big\{\sum_{j=1}^{+\infty}2^{-j\alpha\theta'}\Big\}^{\frac{1}{\theta'}} << \Omega(2^{-m}) << \Omega(n^{-1/d}).\end{aligned}\tag{3.3}$$

对 $1\le l\le d$, 由 Bernstein 不等式

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{\partial^r(f-T_mf)}{\partial x_l^r}\Big\|_p &\le \sum_{j=m+1}^{+\infty}2^{rj}\|\Phi_j(f)\|_p\\ &<<\Big\{\sum_{j=m+1}^{+\infty}\frac{\|\Phi_j(f)\|_p^\theta}{\Omega^\theta(2^{-j})}\Big\}^{\frac{1}{\theta}}\Big\{\sum_{j=m+1}^{+\infty}2^{rj\theta'}\Omega^{\theta'}(2^{-j})\Big\}^{\frac{1}{\theta'}}\\ &<<\|f\|_{B^{\Omega}_{p\theta}(T^d)}\Omega(2^{-m})\Big\{\sum_{j=1}^{+\infty}2^{j(r-\alpha)\theta'}\Big\}^{\frac{1}{\theta'}}2^{rm}\\ &<<\Omega(2^{-m})2^{rm} << \Omega(n^{-1/d})n^{r/d}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

类似可检验对 $\theta=1,\ \infty$, (3.3), (3.4) 成立. 由 (3.3), (3.4) 可得 (3.1).

(2) 下面证明

$$d_n\big(S^{\Omega}_{p\theta}(T^d),W^r_q\big) << \begin{cases}\Omega(n^{-1/d})n^{r/d}, & 2\le p\le q\le\infty,\\ \Omega(n^{-1/d})n^{r/d+1/p-1/2}, & 1\le p\le 2\le q\le\infty.\end{cases}\tag{3.5}$$

由 $\|f\|_t\le\|f\|_s$ $(1\le t\le s\le\infty)$ 可得对 $2\le p\le q\le\infty$,

$$d_n\big(S^{\Omega}_{p\theta}(T^d),W^r_q\big)\le d_n\big(S^{\Omega}_{2\theta}(T^d),W^r_\infty\big),$$

且对 $1\le p\le 2\le q\le\infty$,

$$d_n\big(S^{\Omega}_{p\theta}(T^d),W^r_q\big)\le d_n\big(S^{\Omega}_{p\theta}(T^d),W^r_\infty\big).$$

因此仅需证明对 $1\le p\le 2$,

$$d_n\big(S^{\Omega}_{p\theta}(T^d),W^r_\infty\big) << \Omega(n^{-1/d})n^{r/d+1/p-1/2}.$$

令 $2^m\asymp n^{1/d}$, 且令

$$n_k=\begin{cases}2^{(k+3)d}, & 0\le k\le m,\\ 2^{(2m-k)d}, & m<k<2m,\\ 0, & 2m<k,\end{cases}\tag{3.6}$$

则 $\sum\limits_{k=0}^{m}2^{(k+3)d}+\sum\limits_{k=m+1}^{2m-1}2^{(2m-k)d} << n$. 对 $0\le k\le m$, $d_{2^{(k+3)d}}\big(B(l_p^{2^{(k+3)d}}),l_q^{2^{(k+3)d}}\big)=0$, 且

对 $2m \le k$, $d_0\big(B(l_p^{2^{(k+3)d}}), l_\infty^{2^{(k+3)d}}\big) = 1$. 对 $m < k < 2m$, 由 [4] 知

$$\begin{aligned} &d_{2^{(2m-k)d}}\big(B(l_p^{2^{(k+3)d}}), l_\infty^{2^{(k+3)d}}\big) << 2^{-(m-k/2)d}\Big(1 + \ln \frac{2^{(k+3)d}}{2^{(2m-k)d}}\Big)^{3/2} \\ << &2^{-(m-k/2)d}(k-m)^{3/2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

由 (3.5) 及 (3.7) 可得

$$\begin{aligned} d_n\big(S^\Omega_{p\theta}(T^d), W^r_\infty\big) << &\sum_{k=m+1}^{2m-1} \Omega(2^{-k})2^{rk+dk/p}2^{-(m-k/2)d}(k-m)^{3/2} \\ &+ \sum_{k=2m}^{\infty} \Omega(2^{-k})2^{rk+dk/p}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

由 $\Omega(2^{-k}) << \Omega(2^{-m})2^{\alpha(m-k)}$ $(k \ge m)$ 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{k=m+1}^{2m-1} \Omega(2^{-k})2^{rk+dk/p}2^{-(m-k/2)d}(k-m)^{3/2} \\ << &\Omega(2^{-m})2^{rm-md(1/2-1/p)} \sum_{k=m+1}^{2m-1} 2^{-(\alpha-r-d/p)(k-m)}(k-m)^{3/2} \\ << &\Omega(n^{-1/d})n^{r/d+1/p-1/2}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2m}^{\infty} \Omega(2^{-k})2^{rk+dk/p} << \Omega(2^{-m}) \sum_{k=2m}^{\infty} 2^{\alpha(m-k)}2^{rk+dk/p} \\ << &\Omega(2^{-m})2^{rm+md/p} \sum_{k=2m}^{\infty} 2^{(\alpha-r-d/p)(m-k)} \\ << &\Omega(2^{-m})2^{m(2d/p+r-\alpha)} << \Omega(n^{-1/d})n^{r/d+1/p-1/2}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

由 (3.8)–(3.10) 可得 (3.5).

由等式 $d_n\big(B(l_p^M), l_q^M\big) = d^n\big(B(l_{q'}^M), l_{p'}^M\big)$ 及 (3.5) 的证明可得

$$d^n\big(S^\Omega_{p\theta}(T^d), W^r_q\big) << \begin{cases} \Omega(n^{-1/d})n^{r/d}, & 2 \le p \le q \le \infty, \\ \Omega(n^{-1/d})n^{r/d+1/2-1/q}, & 1 \le p \le 2 \le q \le \infty. \end{cases} \tag{3.11}$$

(3) 下面证明

$$d'_n\big(S^\Omega_{p\theta}(T^d), W^r_q\big) << \begin{cases} \Omega(n^{-1/d})n^{r/d+1/p-1/2}, & 1 \le p \le 2 \le q \le \infty,\ p' \ge q, \\ \Omega(n^{-1/d})n^{r/d+1/2-1/q}, & 1 \le p \le 2 \le q \le \infty,\ p' \le q. \end{cases} \tag{3.12}$$

对 $p' \ge q$, $d'_n\big(S^\Omega_{p\theta}(T^d), W^r_q\big) << d'_n\big(S^\Omega_{p\theta}(T^d), W^r_{p'}\big)$, 且对 $p' \le q$, $d'_n\big(S^\Omega_{p\theta}(T^d), W^r_q\big) << d'_n\big(S^\Omega_{q'\theta}(T^d), W^r_q\big)$. 因此仅需证明对 $1 \le p \le 2$,

$$d'_n\big(S^\Omega_{p\theta}(T^d), W^r_{p'}\big) << \Omega(n^{-1/d})n^{r/d+1/p-1/2}.$$

设 n_k 由 (3.6) 定义. 对 $0 \le k \le m$, $d'_{2^{(k+3)d}}\big(B(l_p^{2^{(k+3)d}}), l_q^{2^{(k+3)d}}\big) = 0$, 且由 $p \le p'$ 知对

$2m \le k$, $d_0'\big(B(l_p^{2^{(k+3)d}}), l_{p'}^{2^{(k+3)d}}\big) = 1$. 对 $m < k < 2m$, 由 [4] 知

$$d'_{2^{(2m-k)d}}\big(B(l_p^{2^{(k+3)d}}), l_{p'}^{2^{(k+3)d}}\big) << 2^{-(m-k/2)d(1/2-1/p)+2(2k-2m)d/p'}\Big(\frac{k}{2m-k}\Big)^{\frac{2}{p}-1}. \quad (3.13)$$

由 (2.4) 及 (3.13), 类似于 (3.5) 的证明，若 $\alpha > \big(3\frac{1}{2} - \frac{3}{p}\big)d$, 计算可得

$$d'_n\big(S^{\Omega}_{p\theta}(T^d), W^r_{p'}\big) << \Omega(n^{-1/d}) n^{r/d+1/p-1/2}. \quad (3.14)$$

由 $d_n\big(S^{\Omega}_{p\theta}(T^d), W^r_q\big) \le d'_n\big(S^{\Omega}_{p\theta}(T^d), W^r_q\big)$, $d^n\big(S^{\Omega}_{p\theta}(T^d), W^r_q\big) \le d'_n\big(S^{\Omega}_{p\theta}(T^d), W^r_q\big)$, (3.1), (3.5), (3.11) 及 (3.12) 可得上估计.

下估计

设 $\lambda = 4([n^{1/d}]+1)$, 且对 $1 \le l \le \lambda$, 令

$$\varphi_l(t) = \sin^k(\lambda t)\chi_{[2\pi(l-1)/\lambda, 2\pi l/\lambda]}(t), \qquad t \in R. \quad (3.15)$$

记 $s = \lambda^d$, 令集 $\{f_1, \cdots, f_s\}$ 表示函数集 $\big\{\prod_{j=1}^{d} \varphi_{l_j}(x_j) : 1 \le l_j \le \lambda, 1 \le j \le d\big\}$. 定义周期函数集 Φ 如下

$$\Phi = \Big\{f : f|_{[0,2\pi]^d}(x) = \sum_{j=1}^{s} a_j f_j(x)\Big\}. \quad (3.16)$$

对任意 $g \in (W^r_q)^*$, 定义 $\widetilde{g} \in (l^s_q)^*$ 如下

$$\widetilde{g}(a_1, \cdots, a_s) = g\Big(\sum_{j=1}^{s} a_j f_j\Big). \quad (3.17)$$

对任意 $L = \{g_1, \cdots, g_n\} \subset (W^r_q)^*$, 存在 $a \in l^s_p$ 满足

$$\widetilde{g}_i(a) = 0, \qquad i = 1, \cdots, n; \quad (3.18)$$

$$\|a\|_q \ge d^n(B(l^s_p), l^s_q)\|a\|_p. \quad (3.19)$$

其中 $\|a\|_p = \|a\|_{l^s_p}$. 设 $f = \sum_{j=1}^{s} a_j f_j$. 由 (3.17)–(3.19) 可得 $f \in L_\perp$. 易检验

$$\|f\|_q = \lambda^{-d/q}\big\|\sin^k(\cdot)\big\|_q^d \|a\|_q, \quad (3.20)$$

且对任意 $\alpha \in Z^d_+$,

$$\Big\|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\Big\|_p = \lambda^{|\alpha|-d/p}\prod_{i=1}^{d}\Big(\int_0^{2\pi}\big|(\sin^k)^{(\alpha_i)}(t)\big|^p \,\mathrm{d}t\Big)^{1/p}\|a\|_p. \quad (3.21)$$

对 $h = (h_1, \cdots, h_d) \in R^d$, 由 Minkowski 不等式， (3.21) 及

$$\Delta^k_h f(x) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_d}h_d\Big)^k f\Big(x + \sum_{j=1}^{k} u_j h\Big)\,\mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_k,$$

可得

$$\|\Delta_h^k f\|_p << |h|^k \lambda^{k-d/p}\|a\|_p. \tag{3.22}$$

由 (1.1) 及 (3.20) 可得

$$\|\Delta_h^k f\|_p << \lambda^{-d/p}\|a\|_p. \tag{3.23}$$

由 (1.1), (3.22) 及 (3.23) 可得

$$\Omega_k(f,t)_p << t^k \lambda^{k-d/p}\|a\|_p, \tag{3.24}$$

$$\Omega_k(f,t)_p << \lambda^{-d/p}\|a\|_p. \tag{3.25}$$

对 $1 \le \theta < \infty$, 由 (3.24) 及 (3.25) 可得

$$\int_0^{+\infty}\Big(\frac{\Omega_k(f,t)_p}{\Omega(t)}\Big)^\theta \frac{\mathrm{d}t}{t} << \Big(\lambda^{k\theta}\int_0^{1/\lambda}\frac{t^{k\theta-1}}{\Omega^\theta(t)}\,\mathrm{d}t + \int_{1/\lambda}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\Omega^\theta(t)t}\Big)\lambda^{-d\theta/p}\|a\|_p^\theta. \tag{3.26}$$

由 $\Omega(t)/t^\beta$ 几乎单调减得

$$\int_0^{1/\lambda}\frac{t^{k\theta-1}}{\Omega^\theta(t)}\,\mathrm{d}t << \frac{(1/\lambda)^{\beta\theta}}{\Omega^\theta(1/\lambda)}\int_0^{1/\lambda} t^{(k-\beta)\theta-1}\,\mathrm{d}t << \frac{1}{\Omega^\theta(1/\lambda)\lambda^{k\theta}}. \tag{3.27}$$

由 $\Omega(t)/t^\alpha$ 几乎单调升得

$$\int_{1/\lambda}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\Omega^\theta(t)t} << \frac{(1/\lambda)^{\alpha\theta}}{\Omega^\theta(1/\lambda)}\int_{1/\lambda}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha\theta+1}} << \frac{1}{\Omega^\theta(1/\lambda)}. \tag{3.28}$$

由 (3.26)–(3.28) 可得

$$\|f\|_{b^\Omega_{p\theta}(T^d)} << \lambda^{-d/p}\|a\|_p/\Omega(1/\lambda). \tag{3.29}$$

因此可得

$$\|f\|_{B^\Omega_{p\theta}(T^d)} << \|f\|_p + \lambda^{-d/p}\|a\|_p/\Omega(1/\lambda) << \lambda^{-d/p}\|a\|_p/\Omega(1/\lambda), \tag{3.30}$$

类似可得对 $\theta = \infty$, (3.30) 成立. 设 $\overline{f} = f/\|f\|_{B^\Omega_{p\theta}(T^d)}$, 则 $\overline{f} \in L_\perp \cap B^\Omega_{p\theta}(T^d)$. 由 $\|\overline{f}\|_{B^\Omega_{p\theta}(T^d)} = 1$, (3.19), (3.20) 及 (3.30) 知

$$\|f\|_q >> \Omega(1/\lambda)d^n(B(l_p^s), l_q^s)\lambda^{d/p-d/q} >> \Omega(1/\lambda)d^{\frac{s}{2}}(B(l_p^s), l_q^s)\lambda^{d/p-d/q}. \tag{3.31}$$

由 [4] 知 $d^n(B(l_p^M), l_q^M) = d_n(B(l_{q'}^M), l_{p'}^M)$, 且

$$d_n(B(l_p^{2n}), l_q^{2n}) >> \begin{cases} n^{1/q-1/p}, & 1 \le q \le p \le \infty, \\ n^{1/q-1/p}, & 2 \le p \le q \le \infty, \\ n^{1/q-1/2}, & 1 \le p \le 2 \le q \le \infty, \\ 1, & 1 \le p \le q \le 2. \end{cases} \tag{3.32}$$

由 (3.31), (3.32), (3.20), (3.21) 及 $\lambda \asymp n^{1/d}$ 可得 $d^n\big(S^\Omega_{p\theta}(T^d), L_q(T^d)\big)$ 的下估计. 类似可得 $d_n\big(S^\Omega_{p\theta}(T^d), L_q(T^d)\big)$ 的下估计. 由 $d^n\big(S^\Omega_{p\theta}(T^d), L_q(T^d)\big) \le d'_n\big(S^\Omega_{p\theta}(T^d), L_q(T^d)\big)$ 及 $d_n\big(S^\Omega_{p\theta}(T^d), L_q(T^d)\big) \le d'_n\big(S^\Omega_{p\theta}(T^d), L_q(T^d)\big)$ 可得 $d'_n\big(S^\Omega_{p\theta}(T^d), L_q(T^d)\big)$ 的下估计.

参 考 文 献

[1] Pustovoitov N N. Representation and Approximation of Multivariate Periodic Functions with a Given Modulus of Smoothness. *Analysis Math.*, 1994, 20: 35–48

[2] Sun Yongsheng, Wang Heping. Representation and Approximation of Multivariate Functions with Bounded Mixed Moduli of Smoothness. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1997, 219: 350–371

[3] Nikol'skii S M. Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems. New York: Spring-Verlag, 1975

[4] Pinkus A, N-widths in approximation Theory. New York: Springer-Verlag, 1985

[5] Liu Yongping, Xu Guiqiao. The Infinite-dimensional Widths and Optimal Recovery of Generalized Besov Classes. *Journal of Complexity*, 2000, 18: 815–832

[6] Temlyakov V N. Approximation of Periodic Functions. New York: Nova Science Publishers, Inc., 1993

N-widths for a Generalized Periodic Besov Classes in the Periodic Sobolev Space

XU Guiqiao

(*Department of Mathematics, Tianjin Normal University, Tianjin.* 300074)

(*E-mail: Xuguiqiao@eyou.com*)

Abstract This paper gives the weakly asymptotically order estimate of the n-widths for a Generalized periodic Besov Classes in the periodic Sobolev Space.

Key words generalized periodic Besov classes; Sobolev space; n-widths.

MR(2000) Subject Classification 41A63; 41A44

Chinese Library Classification O174.41