第 23 卷 第 1 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 23 No. 1
2000 年 1 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Jan., 2000

保持 n- 形式系统的 Lie 对称群约化及应用 *

黄德斌
(上海大学数学系，上海 201800)

赵晓华
(云南大学数学系，昆明 650091)

于　锋
(上海大学数学系，上海 201800)

刘玉荣
(苏州大学数学系，苏州 215006)

摘　要　本文考虑保持 n- 形式 (面积、体积的高维推广概念) 的 n 维向量场，应用 Lie 群方法对其约化问题进行了系统性研究，得到了下列结果. 第一，如果保持 n- 形式的 n 维向量场具有一个单参数保持 $n-$ 形式的空间对称群，则可具体地构造出一个与向量场无关的变换，使得原向量场约化掉一维，并且该约化向量场保持相应的 $(n-1)$- 形式，特别 $n=3$ 时可直接得到 [1] 中的重要结果. 第二，上述 n 维向量场如果具有一个 r 参数保持 n- 形式的空间 Abelian 对称群，则原系统可被约化成一保持 $(n-r)$- 形式的 $(n-r)$ 维向量场. 特别 $n=4$, $r=2$ 时，约化向量场有较简单的形式，于是可具体地讨论该类四维扰动系统的一些重要动力学性质. 最后本文以著名的 L-K 模型及 ABC 流为例阐述了本文提出的一般方法的应用.

关键词　保持 n- 形式，Lie 群，约化，作用 - 角度 - 角度 - 角度变换，不变环面

1　引言

众所周知，Lie 对称性在非线性微分方程中的重要作用之一就是用于系统约化，特别对于高维系统而言，Lie 群因可降低系统的维数使问题得到一定程度的简化而尤显重要 [1]，同时也带来了一个在理论上和应用上都有重要意义的问题：约化系统与原系统之间有什么样的联系，特别如果原系统具有某种重要而便于应用的性质，经过上述约化后，该性质是否被保留. 更精确地，要问当系统具有什么样的对称群时，约化过程才不会使原系统的某些性质丧失. 过去，辛流形上的 Hamilton 系统的约化问题曾经引起众多学者的兴趣，特别保持 Hamilton 结构的对称群约化问题在引入 Lie 群方法后，直到 1973 年，Marsden 和 Weinstein[2] 才完美地给出了辛流形上的约化程序.

本文所要讨论的是保持某种 $n-$ 形式 (即面积、体积概念的高维推广) 的 n 维系统，或称零散度系统. 这类系统在物理学，大气动力学，生物学等领域大量存在，例如象泰勒 -Couette 流之类的不可压缩周期流，并且比 Hamilton 系统更广泛. 将 Hamilton 系统的有关理论和方法向零散度系统推广，是非常困难但又是很有价值的 (见 [3, 4] 等). 这些工作说明在向量场的约化过程中保持零散度性是非常重要的，但过去很少有这方面的研究.

基于以上认识，本文从保持 Hamilton 结构的约化理论出发，应用 Lie 对称群的方法，比较系统地得到了保持 n- 形式的 n 维系统 (即零散度向量物) 的对称约化程序. 即：如果保持 n- 形式的 n 维向量场具有一个单参数保持 $n-$ 形式的空间对称群，则可

本文 1998 年 6 月 26 日收到.
* 国家自然科学基金和云南省科委基金资助项目 (批准号：19972058).

具体地构造出一个与向量场无关的局部坐标变换，使得原向量场约化掉一维，并且该约化向量场保持相应的 $(n-1)$- 形式；上述 n 维向量场如果具有一个 r 参数保持 n- 形式的空间 Abelian 对称群，则原系统可被局部地约化成一保持 $(n-r)$- 形式的 $(n-r)$ 维向量场. 这直接推广了 [5] 的结果，并且从某种意义上讲，本文的结果是对 [2] 中的 Hamilton 结构的辛约化程序之实质作出的推广. 同时，这样的约化程序将使得某些动力系统的理论和应用研究大为简化. 例如 $n=4$, $r=2$ 时这类系统具有简单的约化形式，我们可用现有的方法对其扰动系统进行讨论，特别可应用作用 - 角度 - 角度 - 角度变换将系统变成作用 - 角度 - 角度 - 角度的形式，并应用 Xia[6] 的结果讨论其不变环面的存在性. 最后，本文讨论了著名的 Lorenz-Krishnurmathy 和 ABC 流模型，并得到了较好的结果.

2 概念和预备定理

为了在后面叙述和引用方便，本节首先介绍一些相关的定义、记号和将要引用的基本结论. 本文中所用的符号与 [1] 中的基本一样.

定义 2.1 设 M 为 n 维流形，其局部坐标为 $\{x^1,\cdots,x^n\}$. 考虑 M 上的 n 形式 Ω, F 是 M 上的任一向量场，如果 Ω 关于向量场 F 的 Lie 导数 $L_F\Omega=0$, 则称向量场 F 保持 n- 形式 Ω.

现我们指定 n- 形式 Ω 为典则形式 $\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$.

命题 2.2 设 n 维流形 M 上定义了一个向量场 F:

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}=f_i(x^1,\cdots,x^n,t),\qquad (x^1,\cdots,x^n)\in M,\quad t\in R,\quad i=1,\cdots,n, \tag{2.1}$$

若向量场 F 的散度

$$\operatorname{div}F=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(x^1,\cdots,x^n,t)}{\partial x^i}=0,$$

则该向量场保持 n- 形式 Ω.

证 主要应用微分形式的理论有 $L_F\Omega=(\operatorname{div}F)\Omega$ (见 [1]), 就可得证.

由于此命题，以下我们将 “散度为零” 和 “保持 n- 形式” 不加区别而混用.

定义 2.3 设 G 是作用在 $M\times R$ 上的单参数 Lie 群. 若 G 满足条件 (i) G 是向量场 (2.1) 的单参数对称群， (ii) G 的无穷小生成元 V 有形式:

$$V=\sum_{i=1}^{n}\xi^i(x^1,\cdots,x^n)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

则称 G 是向量场 (2.1) 的空间对称群. 如果 G 的无穷小生成元 V 还满足条件:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\xi^i(x^1,\cdots,x^n)}{\partial x^i}=0,$$

则称 G 是向量场 (2.1) 的保持 n- 形式的空间对称群.

一般说来，给定一个形如 (2.1) 的向量场，怎样求出它的空间对称群并不是一件容易的事. 但是可根据 (2.1) 的实际背景，通过几何的，或物理等方法猜出其空间对称群，这也正是 Lie 群方法的优势所在. 为了便于后面应用，下面我们给出一个判定定理.

定理 2.4 以 $V=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi^i(x^1,\cdots,x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}$ (下面简记为 $V=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$) 生成的 Lie 群 G 是 (2.1) 的空间对称群的充要条件是 $[F,V]=0$, 其中 $F=(f_1,\cdots,f_n)$, $[F,V]$ 表示 Lie

括号，其坐标表示定义为：

$$[F,V]_i=\sum_{j=1}^{n}\Big(f_j\frac{\partial\xi^i}{\partial\xi^j}-\xi^j\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\Big),\qquad i=1,\cdots,n.$$

证 利用 [1] 中的定理 2.36 和定理 2.71 容易证明该定理的结论.

定理 2.5 设 (2.1) 具有一个单参数对称群 G, 其无穷小生成元为 V, 那么在满足条件 $V|_{(x,t)}\neq 0$ 的点 (x,t) 附近，存在一个局部变换：

$$x^i=\eta_i(y^1,\cdots,y^n,s),\qquad t=\varphi(y^1,\cdots,y^n,s),\qquad i=1,\cdots,n. \tag{2.2}$$

使得 (2.1) 变成：

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}s}=g_i(y^1,\cdots,y^n,s),\qquad i=1,\cdots,n, \tag{2.3}$$

并且 $y^1,\cdots,y^{n-1},s$ 构成 V 的函数独立不变量的完全系，即：

$$V(y^i)=0,\qquad i=1,\cdots,n-1,\qquad V(s)=0,\qquad V(y^n)=1. \tag{2.4}$$

证 主要是利用直化定理将向量场 V"变直", 详见 [1] 中定理 2.66.

注 因为 (2.3) 的右端与 y^n 无关，故 y^n 可通过积分求出. 所以通常称 (2.3) 的前 $n-1$ 个方程为 (2.1) 在 G 下的约化方程.

特别地当 G 是空间对称群时，我们有下面的推论.

推论 2.6 如果上述定理中的对称群 G 是空间对称群，则可在变换 (2.2) 中取 $s=t$, 而 η_i $(i=1,\cdots,n)$ 与 s 无关，即 y_i^n $(i=1,\cdots,n)$ 与 t 无关.

证 因为 G 是空间对称群，故 t 就是 G 的一个不变量，所以可取 $s=t$. 另一方面，因为

$$V(y)=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\frac{\partial y}{\partial x^i},$$

其中 ξ^i $(i=1,\cdots,n)$ 与 t 无关，故 $V(y)=0$ 或 1 的解都与 t 无关. 从而证毕.

3 主要结果及其证明

3.1 单参数群

有了上节的准备，本节将证明如下主要结果：

定理 3.1 设 n 维向量场 (2.1) 保持 n- 形式 Ω, 并且具有一个单参数保持 n- 形式 Ω 的空间对称群 G. 则存在局部坐标变换使得 (2.1) 的 $(n-1)$ 维约化向量场保持 $(n-1)$-形式.

在证明该定理之前，我们先证明如下引理：

引理 3.2 如果一阶常微分方程组 (2.1) 在微分同胚 φ:

$$x^i=\varphi_i(y^1,\cdots,y^n),\qquad i=1,\cdots,n \tag{3.1}$$

下变为新的常微分方程组：

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}=g_i(y^1,\cdots,y^n,t),\qquad i=1,\cdots,n, \tag{3.2}$$

则两个方程的右端必满足如下关系：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x^i}=\frac{1}{|J|}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(|J|g_i)}{\partial y^i}, \tag{3.3}$$

其中 J 是变换 φ 的 Jacobi 矩阵， $|J|$ 是行列式.

证 设 $f_i(x^1,\cdots,x^n,t)$ 在 φ 下变为 $\widetilde{f}(y^1,\cdots,y^n,t)$, $i=1,\cdots,n$. 故由链式法则可得

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}\\ \vdots\\ \dfrac{dy^n}{dt}\end{bmatrix}=J^{-1}\begin{bmatrix}\widetilde{f}_1\\ \vdots\\ \widetilde{f}_n\end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

联立 (3.2) 得

$$\begin{bmatrix}\widetilde{f}_1\\ \vdots\\ \widetilde{f}_n\end{bmatrix}=J\begin{bmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

又由

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{f}_i}{\partial y^i}\frac{\partial y^j}{\partial x^i},\qquad i=1,\cdots,n,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x^i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{f}_i}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}=\mathrm{tra}\left[D_y\begin{bmatrix}\widetilde{f}_1\\ \vdots\\ \widetilde{f}_n\end{bmatrix}J^{-1}\right], \tag{3.6}$$

其中 tra 表示矩阵的迹,

$$D_y\begin{bmatrix}\widetilde{f}_1\\ \vdots\\ \widetilde{f}_n\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\widetilde{f}_1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial\widetilde{f}_1}{\partial y^n}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \dfrac{\partial\widetilde{f}_n}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial\widetilde{f}_n}{\partial y^n}\end{bmatrix}.$$

又由 (3.7) 得

$$\begin{aligned}D_y\begin{bmatrix}\widetilde{f}_1\\ \vdots\\ \widetilde{f}_n\end{bmatrix}&=D_y\left[J\begin{bmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{bmatrix}\right]\\ &=\left[\frac{\partial J}{\partial y^1}\begin{bmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{bmatrix}+J\begin{bmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{bmatrix},\cdots,\frac{\partial J}{\partial y^1}\begin{bmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{bmatrix}+J\begin{bmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{bmatrix}\right]\ (\text{按列分块}),\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}_{y^i} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y^i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial y^i} \end{bmatrix}, \qquad i=1,\cdots,n,$$

所以 (3.6) 等于

$$\mathrm{tra}\left[\left(\frac{\partial J}{\partial y^1}\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix},\cdots,\frac{\partial J}{\partial y^n}\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}\right)J^{-1}\right]+\mathrm{tra}\left[\left(J\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}_{y^1},\cdots,J\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}_{y^n}\right)J^{-1}\right]. \tag{3.8}$$

由矩阵的性质知 (3.8) 中的第二项等于

$$\mathrm{tra}\left[\left(J\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}_{y^1},\cdots,J\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}_{y^n}\right)J^{-1}\right]=\mathrm{tra}\left[\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}_{y^1},\cdots,\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}_{y^n}\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial y^i}. \tag{3.9}$$

现记

$$K=\mathrm{tra}\left[\left(\frac{\partial J}{\partial y^1}\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix},\cdots,\frac{\partial J}{\partial y^n}\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}\right)J^{-1}\right],$$

显然 K 是关于 gi, $I=1,\cdots,n$ 的线性组合，即 $K=\sum\limits_{i=1}^{n}G_ig_i$.

现计算 g_1 的系数 G_1.

由矩阵的迹得

$$G_1=\left(\frac{\partial J_{11}}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial J_{11}}{\partial y^n}\right)J_1^{-1}+\cdots+\left(\frac{\partial J_{n1}}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial J_{n1}}{\partial y^n}\right)J_n^{-1}, \tag{3.10}$$

其中 J_{ij} 表示 J 中第 i 行第 j 列的元素，J_i^{-1} 表示 $J^{-}1$ 中的第 i 列，$i,j=1,\cdots,n$. 另外由 J 的定义得

$$\frac{\partial J_{ij}}{\partial y^k}=\frac{\partial J_{ik}}{\partial y^j}, \qquad i,j,k=1,\cdots,n,$$

故重新整理 (3.10) 得

$$G_1=\left(\frac{\partial J_{11}}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial J_{1n}}{\partial y^1}\right)J_1^{-1}+\cdots+\left(\frac{\partial J_{n1}}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial J_{nn}}{\partial y^1}\right)J_n^{-1}, \tag{3.11}$$

借助上式应用行列式性质得 $|J|\,G_1=\frac{\partial|J|}{\partial y^1}$.

同理可得 K 中 g_i, $i=2,\cdots,n$ 的系数 G_i 也有类似关系，$|J|\,G_i=\frac{\partial|J|}{\partial y^i}$, $i=2,\cdots,n$. 现将上述结果代回 (3.6) 得

$$|J|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x^i}=|J|\left(\sum_{i=1}^{n}G_ig_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial y^i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial|J|}{\partial y^i}g_i+|J|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial y^i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(|J|g_i)}{\partial y^i},$$

即 (3.1) 成立. 故引理证毕.

定理 3.1 的证明　设 G 的无穷小生成元为 $V=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$. 由定理 2.5 及推论 2.6 可知, 存在形如 (3.1) 的局部变换使得 (2.1) 变成如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}=k_i(y^1,\cdots,y^{n-1},t),\qquad i=1,\cdots,n. \tag{3.12}$$

由定理假设及引理 3.2 中的关系 (3.3) 可得:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(|J|k_i)}{\partial y^i}=0. \tag{3.13}$$

又从定理 2.5 的证明中的 (2.4) 式知向量场 V 在 φ 下必变为 $(0,\cdots,0,1)$, 再次利用引理 3.2 可得:

$$0=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^i}=\frac{1}{|J|}\left(0+\cdots+0+\frac{\partial|J|}{\partial y^n}\right)\Rightarrow\frac{\partial|J|}{\partial y^n}=0.$$

从而 $|J|$ 与 y_n 无关, 代回 (3.13) 就得:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial(|J|k_i)}{\partial y^i}=0. \tag{3.14}$$

现在考虑方程 (2.1) 的约化系统, 即 (3.12) 的前 $(n-1)$ 个方程:

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}=k_i(y^1,\cdots,y^{n-1},t),\qquad i=1,\cdots,n-1. \tag{3.15}$$

作变换 Γ:

$$z^1=\int|J|\,\mathrm{d}y^1,\qquad z^2=y^2,\cdots,z^{n-1}=y^{n-1}. \tag{3.16}$$

设 (3.15) 在这个变换下变为:

$$\frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}t}=g_i(z^1,\cdots,z^{n-1},t),\qquad i=1,\cdots,n-1. \tag{3.17}$$

显然变换 Γ 可逆, 即 Γ^{-1} 存在, 换言之, (3.17) 在变换 Γ^{-1} 下变为 (3.15).

现在计算 Γ^{-1} 的 Jacobi 矩阵 $\frac{Dz}{Dy}(z=(z^1,\cdots,z^{n-1}),\ y=(y^1,\cdots,y^{n-1}))$

$$\frac{Dz}{Dy}=\begin{bmatrix}|J| & \dfrac{\partial}{\partial y^2}\displaystyle\int|J|\,\mathrm{d}y^1 & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial y^{n-1}}\displaystyle\int|J|\,\mathrm{d}y^1\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}, \tag{3.18}$$

所以再利用引理 3.2 及 (3.14) 式可得:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial g_i}{\partial z^i}=\frac{1}{|Dz/Dy|}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial(|Dz/Dy|k_i)}{\partial y^i}=\frac{1}{J}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial|J|k_i}{\partial y^i}=0.$$

综上所述，对于满足定理 3.1 条件的向量场 (2.1), 存在从 $x \to z$ 的变换使得 (2.1) 变为：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}t} = g_i(z^1, \cdots, z^{n-1}, t), \qquad i = 1, \cdots, n-1, \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g_i}{\partial z^i} = 0, \ i = 1, \cdots, n-1, \\ \dfrac{\mathrm{d}z^n}{\mathrm{d}t} = g_n(z^1, \cdots, z^{n-1}, t), \qquad 其中\ z^n = y^n. \end{cases} \tag{3.19}$$

从而证明了定理的结论.

注 从定理 3.1 的证明中，可知使 (2.1) 变为 (3.19) 的变换与向量场无关，而与对称群 G 有关，并且整个变换是保持 n- 形式的变换.

在定理 3.1 中，当 $n = 3$ 时，我们可直接得到 [5] 中的如下主要结果.

推论 3.1 假设如下三维微分系统 (3.20) 是一个保体积系统：

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = f_i(x^1, x^2, x^3, t), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{3.20}$$

如果它有一个单参数保体积的空间对称群 G, 那么存在局部坐标变换：

$$x^i = \varphi_i(z^1, \cdots, z^n), \qquad i = 1, 2, 3,$$

使得 (3.20) 变成：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z^1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H(z^1, z^2, t)}{\partial z^2}, \\ \dfrac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H(z^1, z^2, t)}{\partial z^1}, \\ \dfrac{\mathrm{d}z^3}{\mathrm{d}t} = k_3(z^1, z^2, t), \end{cases} \tag{3.21}$$

其中 $H(z_1, z_2, t)$ 是某个确定的函数.

证 直接应用定理 3.1 可知，(3.20) 的二维约化系统是保持 2- 形式的二维向量场，故可以表示成 Hamilton 形式，因此，(3.20) 可以变换为 (3.21) 的形式。

3.2 多参数群

现在我们讨论多参数群的情形.

定理 3.4 设

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = f_i(x^1, \cdots, x^n, t), \qquad i = 1, \cdots, n \tag{3.22}$$

是一保持 n- 形式的 n 维向量场，且它具有一个两参数空间对称群 G, 并且满足

i) v_1, v_2 是保持 n- 形式的，

ii) $[v_1, v_2] = 0$, 即 G 两参数 Abelian 群，其中 v_1, v_2 是 G 的两个独立无穷小生成元，则 (3.22) 可被局部地约化成一个保持 $(n-2)$- 形式的 $(n-2)$ 维向量场.

证 首先，我们用 v_1 对 (3.22) 进行约化. 与定理 3.1 的证明一样，不妨设系统 (3.22) 在变换 φ:

$$x^i = \varphi_i(y^1, \cdots, y^n), \qquad i = 1, \cdots, n$$

之下将 (3.22) 变成约化系统 (3.15):

按照 Lie 群理论，系统 (3.15) 应以商群 G/G_1 作为单参数对称群，其中 G_1 是 v_1 生成的 Lie 群. G/G_1 是 v_2 在 v_1 的不变量完全系下的约化向量场 (记为 v_3) 生成的单参

数对称群．现设

$$v_2=\eta^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+\eta^n\frac{\partial}{\partial x^n}\equiv(\eta^1,\cdots,\eta^n).$$

下面求 v_3.

从定理 2.5 知 v_1 的不变量完全集为 $\{t,y^1,\cdots,y^{n-1}\}$, 现补充一个变量 y^n 使得 $\{t,y^1,\cdots,y^{n-1},y^n\}$ 构成一组新坐标．在此坐标下设 v_2 相应变为：

$$\widetilde{\eta}^1(y^1,\cdots,y^{n-1})\frac{\partial}{\partial y^1}+\cdots+\widetilde{\eta}^{n-1}(y^1,\cdots,y^{n-1})\frac{\partial}{\partial y^{n-1}}+\widetilde{\eta}^n(y^1,\cdots,y^{n-1},y^n)\frac{\partial}{\partial y^n}.$$

因此有

$$v_3=\widetilde{\eta}^1(y^1,\cdots,y^{n-1})\frac{\partial}{\partial y^1}+\cdots+\widetilde{\eta}^{n-1}(y^1,\cdots,y^{n-1})\frac{\partial}{\partial y^{n-1}}.$$

又因为 $[v_1,v_2]=0$, 故由定理 2.4 知， v_2 对应的自治系统

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}=\eta^i(x^1,\cdots,x^n),\qquad i=1,\cdots,n,\tag{3.23}$$

以 v_1 生成的单参数群作为对称群．因为定理 3.1 中的变换与具体向量物无关，故可同样用上面的变换 φ 去变换 (3.23), 设得到的系统为：

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}=h^i(y^1,\cdots,y^{n-1}),\qquad i=1,\cdots,n.\tag{3.24}$$

结合上面的讨论，从 [1] 有 $h^i=\widetilde{\eta}^i, i=1,\cdots,n$, 所以 $(n-1)$ 维系统 (3.15) 以 $v_3=(h^1,\cdots,h^{n-1})$ 生成的群作为对称群，即 $[v_3,k]=0$, $k=(k_1,\cdots,k_{n-1})$.

继续象定理 3.1 的证明一样作第二步变换 Γ, 同时变换 (3.15) 和 (3.24). 不妨设 (3.15) 在变换 Γ 下同样变到系统 (3.17) 的形式．另一方面由定理 3.1 知 (3.24) 的前 $(n-1)$ 个方程在变换 Γ 下应变为一个保持 $(n-1)$- 形式的 $(n-1)$ 维的自治向量场，故知 v_3 在变换 Γ 下变为一个保持 $(n-1)$- 形式的自治向量场 (记为 v_3^*).

现由 $[v_3,k]=0$ 很容易得出 $[v_3^*,g]=0$, $g=(g_1,\cdots,g_{n-1})$ (见 (3.17)) (事实上这是因为 Lie 括号的定义与坐标无关), 所以系统 (3.17) 具有一个保持 $(n-1)$- 形式的空间对称群 (由 v_3^* 生成), 故再次利用定理 3.1 就得系统 (3.22) 最后被约化成一保持 $(n-2)$- 形式的系统．定理证毕。

更一般地，对 r 参数群，从上面的证明不难得出下结果.

定理 3.5 保持 n- 形式的 n 维向量场，若具有一个 r 参数保持 n- 形式的空间 Abelian 对称群，则可被局部地约化成一个保持 $(n-r)$- 形式的 $(n-r)$ 维向量场.

特别考虑 $n=4$ 时，有下面的推论.

推论 3.6 设

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}=f_i(x^1,\cdots,x^4,t),\qquad i=1,\cdots,4\tag{3.25}$$

是一个 4 维一阶常微系统满足：

i) $\mathrm{div}(f)=0$, 即保持 4- 形式.

ii) 具有一个由 v_1 与 v_2 生成的 2 参数对称群，其中 v_1 与 v_2 是空间保持 4- 形式的，且 $[v_1,v_2]=0$, 那么一定存在变换

$$x^i=\varphi_i(y^1,\cdots,y^4),\qquad i=1,\cdots,4,$$

使得 (3.25) 变为如下系统：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial y^2}(y^1,y^2,t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial y^1}(y^1,y^2,t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y^3}{\mathrm{d}t} = k_3(y^1,y^2,t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y^4}{\mathrm{d}t} = k_4(y^1,y^2,y^3,t), \end{cases} \tag{3.26}$$

其中 H 是一确定的函数.

从上面的推论易得，若原系统 (3.25) 是自治的，则 (3.26) 存在首次积分 $H(y^1,y^2)$，代回原坐标就得到原系统的一个首次积分.

当 (3.26) 是自治系统时，基于以上重要的坐标变换，我们可用现有的方法来研究此类四维系统及其扰动系统的动力学性质. 首先，自治 (3.26) 的前三个方程与 y_4 无关且存在一个自治首次积分，故据 [7] 可写成一广义 Hamilton 系统，从而可用 [8] 中的结果讨论其扰动系统. 另外，自治 (3.26) 及其扰动系统恰好是 [9] 中的一种特例，故可用其方法研究其 Smale 马蹄的存在性. 但限于篇幅，不再展开讨论. 下一节我们详细讨论如何研究其不变环面的存在性.

4 作用 - 角度 - 角度 - 角度变换及不变环面

现在我们具体地讨论自治 (3.26) 中 k_4 与 y_3 无关时的周期扰动系统 (这在实际约化中经常出现)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial y^2}(y^1,y^2) + \varepsilon f_1(y^1,\cdots,y^4,t,\varepsilon), \\ \dfrac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial y^1}(y^1,y^2) + \varepsilon f_2(y^1,\cdots,y^4,t,\varepsilon), \\ \dfrac{\mathrm{d}y^3}{\mathrm{d}t} = k_3(y^1,y^2) + \varepsilon f_3(y^1,\cdots,y^4,t,\varepsilon), \\ \dfrac{\mathrm{d}y^4}{\mathrm{d}t} = k_4(y^1,y^2) + \varepsilon f_4(y^1,\cdots,y^4,t,\varepsilon), \end{cases} \tag{4.1$_\varepsilon$}$$

其中 $f=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ 关于时间 t 是周期函数，周期 $T=2\pi/\omega$，ε 是一小量.

现对 $(4.1)_\varepsilon$ 作下面非常一般性的假设.

假设 在 y^1-y^2 面内存在子集 D, 使得 $H(y^1,y^2)=h$ 在 D 内是闭曲线族.

如果上面的假设成立，则从经典力学 (见 [10]) 知在 D 内存在作用 - 角度变换：$(y^1,y^2)\to(I,\theta)$ 使得 $(4.1)_{\varepsilon=0}$ 变为：

$$\begin{cases} \dot I = 0, \\ \dot\theta = \Omega_1(I), \\ \dot y^3 = h_3(I,\theta), \\ \dot y^4 = h_4(I,\theta). \end{cases} \tag{4.2}$$

下面给出作用 - 角度 - 角度 - 角度变换定理.

定理 4.1 设 (4.2) 中 $\Omega_1(I)\neq 0$, 则存在变换：

$$(I,\theta,y^3,y^4)\longrightarrow(I,\phi_1,\phi_2,\phi_3),$$

使得系统 (4.2) 变为：

$$\begin{cases} \dot{I}=0, \\ \dot{\phi}_1=\Omega_1(I), \\ \dot{\phi}_2=\Omega_2(I), \\ \dot{\phi}_3=\Omega_3(I), \end{cases} \tag{$(4.3)_{\varepsilon=0}$}$$

其中 $I\in R^1$, $\phi_1\in S^1$, $\phi_2,\phi_3\in S^1$ 或 R^1, 并且该变换是保积的.

证　作变换：

$$\begin{cases} I=I, \\ \phi_1=\theta, \\ \phi_2=y^3+\dfrac{\triangle_1}{2\pi}\theta-\displaystyle\int\frac{h_3(I,\theta)}{\Omega_1(I)}\,\mathrm{d}\theta, \\ \phi_3=y^4+\dfrac{\triangle_2}{2\pi}\theta-\displaystyle\int\frac{h_4(I,\theta)}{\Omega_1(I)}\,\mathrm{d}\theta, \end{cases} \tag{4.4}$$

其中

$$\triangle_1=\int_0^{2\pi}\frac{h_3(I,\theta)}{\Omega_1(I)}\,\mathrm{d}\theta, \qquad \triangle_2=\int_0^{2\pi}\frac{h_4(I,\theta)}{\Omega_1(I)}\,\mathrm{d}\theta$$

于是容易验证可得定理的结论.

为了便于讨论，只考虑 $y^3,y^4\in S^1$, 即 $\phi_2,\phi_3\in S^1$.

上面的定理证实了满足假设的系统 $(4.1)_{\varepsilon=0}$ 存在三维不变环面 T^3, 其整个相空间由这些三维不变环面光滑"重叠"而成. 在每个三维不变环面上系统的流要么成无理流要么成有理流，即其轨道要么是闭轨，要么稠密于整个环面.

现在我们考虑扰动系统 $(4.1)_\varepsilon$ 在相应变化下的系统

$$\begin{cases} \dot{I}=\varepsilon g_0(I,\phi_1,\phi_2,\phi_3,t,\varepsilon), \\ \dot{\phi}_1=\Omega_1(I)+\varepsilon g_1(I,\phi_1,\phi_2,\phi_3,t,\varepsilon), \\ \dot{\phi}_2=\Omega_2(I)+\varepsilon g_2(I,\phi_1,\phi_2,\phi_3,t,\varepsilon), \\ \dot{\phi}_3=\Omega_3(I)+\varepsilon g_3(I,\phi_1,\phi_2,\phi_3,t,\varepsilon), \end{cases} \tag{$(4.3)_\varepsilon$}$$

其中 $\phi_1,\phi_2,\phi_3\in S^1$, $I\in R^1$, 且 g_i, $i=0,1,2,3$ 关于 t 是周期函数，周期 $T=2\pi/\omega$, ε 是一小量.

下面我们将采用 [11] 中的方法导出 $(4.3)_\varepsilon$ 的四维 Poincare 映射.

应用正则摄动理论及 Gronwall 不等式可得，当 ε 充分小时，在 $t\in[t_0,t_0+T]$ 上系统 $(4.3)_\epsilon$ 的解可用系统 $(4.3)_{\varepsilon=0}$ 的解充分逼近. 因此得到 $(4.3)_\varepsilon$ 的解有下面的展开式：

$$\begin{cases} I^\varepsilon(t)=I^0+\varepsilon I^1(t)+O(\varepsilon^2), \\ \phi_1^\varepsilon(t)=\phi_1^0+\Omega_1(I^0)t+\varepsilon\phi_1^1(t)+O(\varepsilon^2), \\ \phi_2^\varepsilon(t)=\phi_2^0+\Omega_2(I^0)t+\varepsilon\phi_2^1(t)+O(\varepsilon^2), \\ \phi_3^\varepsilon(t)=\phi_3^0+\Omega_3(I^0)t+\varepsilon\phi_3^1(t)+O(\varepsilon^2), \end{cases} \tag{4.5}$$

其中，$I^0,\phi_1^0,\phi_2^0,\phi_3^0$ 是初值．$I^1(t),\phi_1^1(t),\phi_2^1(t),\phi_3^1(t)$ 满足下面的一阶变分方程：

$$\left\{\begin{bmatrix} I^1 \\ \dot\phi_1^1 \\ \dot\phi_2^1 \\ \dot\phi_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial\Omega_1}{\partial I}(I_0) & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial\Omega_2}{\partial I}(I_0) & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial\Omega_3}{\partial I}(I_0) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^1 \\ \phi_1^1 \\ \phi_2^1 \\ \phi_3^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}\right., \tag{4.6}$$

其中 g_i，$i=0,1,2,3$ 分别在 $I=I^0$，$\phi_1=\phi_1^0+\Omega_1(I^0)t$，$\phi_2=\phi_2^0+\Omega_2(I^0)t$，$\phi_3=\phi_3^0+\Omega_3(I^0)t$，$\varepsilon=0$ 处取值．

现构造系统 $(4.3)_\varepsilon$ 的四维 Poincare 映射：

$$\begin{aligned} &P_\varepsilon:\big(I^\varepsilon(0),\phi_1^\varepsilon(0),\phi_2^\varepsilon(0),\phi_3^\varepsilon(0)\big)\to\big(I^\varepsilon(T),\phi_1^\varepsilon(T),\phi_2^\varepsilon(T),\phi_3^\varepsilon(T)\big),\\ &(I^0,\phi_1^0,\phi_2^0,\phi_3^0)\longrightarrow\big(I^0+\varepsilon I^1(T),\phi_1^0+\Omega_1(I^0)T+\varepsilon\phi_1^1(T),\phi_2^0+\Omega_2(I_0)T+\varepsilon\phi_2^1(T),\\ &\qquad\qquad\phi_3^0+\Omega_3(I^0)T+\varepsilon\phi_3^1(T)\big)+O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中我们利用了 $I^\varepsilon(0)=I^0$，$\phi_1^\varepsilon(0)=\phi_1^0$，$\phi_2^\varepsilon(0)=\phi_2^0$，$\phi_3^\varepsilon(0)=\phi_3^0$．

从 (4.6) 可立即得出 $I^1(T),\phi_1^1(T),\phi_2^1(T),\phi_3^1(T)$ 的具体表达式：

$$\left\{\begin{aligned} &I^1(T)=\textstyle\int_0^T g_0\,\mathrm{d}t\equiv F_0(I^0,\phi_1^0,\phi_2^0,\phi_3^0),\\ &\phi_1^1(T)=\frac{\partial\Omega_1}{\partial I}(I^0)\int_0^T\int_0^t g_0\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t+\int_0^T g_1\,\mathrm{d}t\equiv F_1(I^0,\phi_1^0,\phi_2^0,\phi_3^0),\\ &\phi_2^1(T)=\frac{\partial\Omega_2}{\partial I}(I^0)\int_0^T\int_0^t g_0\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t+\int_0^T g_2\,\mathrm{d}t\equiv F_2(I^0,\phi_1^0,\phi_2^0,\phi_3^0),\\ &\phi_3^1(T)=\frac{\partial\Omega_3}{\partial I}(I^0)\int_0^T\int_0^t g_0\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t+\int_0^T g_3\,\mathrm{d}t\equiv F_3(I^0,\phi_1^0,\varphi_2^0,\phi_3^0), \end{aligned}\right. \tag{4.8}$$

其中 g_i，$i=0,1,2,3$ 分别在 $I=I^0$，$\phi^1=\phi_1^0+\Omega_1(I^0)t$，$\phi^2=\phi_2^0+\Omega_2(I^0)t$，$\phi^3=\phi_3^0+\Omega_3(I^0)t$，$\varepsilon=0$ 处取值．

把 (4.8) 代入 (4.7) 就得 Poincare 映射的形式：

$$\left\{\begin{aligned} &I\to I+\varepsilon F_0(I,\phi_1,\phi_2,\phi_3)+O(\varepsilon^2),\\ &\phi_1\to\phi_1+2\pi\tfrac{\Omega_1(I)}{\omega}+\varepsilon F_1(I,\phi_1,\phi_2,\phi_3)+O(\varepsilon^2),\\ &\phi_2\to\phi_2+2\pi\tfrac{\Omega_2(I)}{\omega}+\varepsilon F_2(I,\phi_1,\phi_2,\phi_3)+O(\varepsilon^2),\\ &\phi_3\to\phi_3+2\pi\tfrac{\Omega_3(I)}{\omega}+\varepsilon F_3(I,\phi_1,\phi_2,\phi_3)+O(\varepsilon^2), \end{aligned}\right. \tag{4.9}$$

其中利用了 $T=2\pi/\omega$，而映射 (4.9) 恰好是 [6] 中所讨论过的四维情形，所以我们可用其结果来研究 $(4.3)_{\varepsilon=0}$ 中存在的三维不变环面 T^3 在 $(4.3)_\varepsilon$ 中怎样变化．不再累述．

5 例子

1) 1987 年，Lorenz 和 Krishnamurthy[12] 研究了一个描述大气运动的模型，简称 L-K 模型，它对气象学方面慢变流形的研究有重要的意义，并引起了广泛的研究．

现我们考虑修正的无粘性，无强迫的大气流模型

$$\begin{cases} \dot{u} = -vw + bvz, \\ \dot{v} = uw - buz, \\ \dot{w} = -\dfrac{1}{2}(u^2 + v^2), \\ \dot{x} = -z, \\ \dot{z} = x + \dfrac{1}{2}b(u^2 + v^2). \end{cases} \tag{5.1}$$

容易验证 (5.1) 以

$$\xi = -v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}$$

生成的单参数群作为对称群，于是可按第 3 节描述的方法进行约化.

经计算 ξ 有不变量 $u^2 + v^2, w, z, x$, 并且 $\xi\big(\mathrm{arctg}(v/u)\big) = 1$, 故作变换 φ:

$$u_1 = u^2 + v^2, \qquad v_1 = \mathrm{arctg}\,\frac{v}{u}, \qquad w_1 = w, \qquad x_1 = x, \qquad z_1 = z,$$

使得 (5.1) 变为

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = 0, \\ \dot{w}_1 = -\dfrac{1}{2}u_1, \\ \dot{x}_1 = -z_1, \\ \dot{z}_1 = x_1 + \dfrac{1}{2}bu_1, \\ \dot{v}_1 = w_1 - bz_1. \end{cases} \tag{5.2}$$

可验证变换 φ 的 Jacobi 行列式等于 1, 故不需再作定理 3.1 证明中的第二步变换. 事实上 (5.2) 中的前 4 个方程与 v_1 无关并且是保持 4- 形式的 (即散度为零).

显然 (5.2) 的简单表示能使我们容易求得其精确解为:

$$\begin{cases} u_1(t) = \rho_0^2, \\ w_1(t) = -\dfrac{1}{2}\rho_0^2 t + w_0, \\ x_1(t) = (x_0 + b\rho_0^2)\cos t - z_0 \sin t - \frac{1}{2}b\rho_0^2, \\ z_1(t) = (x_0 + b\rho_0^2)\sin t + z_0 \cos t, \\ v_1(t) = -\dfrac{1}{4}\rho_0^2 t^2 + w_0 t + b(x_0 + b\rho_0^2)\cos t - bz_0 \sin t + v_0. \end{cases}$$

其中 ρ_0, w_0, z_0, v_0 是初值.

回到原系统 (5.1), 我们可求出系统的两个首次积分,

$$u^2 + v^2 = \rho^2, \qquad x^2 + z^2 + b(u^2 + v^2) = C,$$

其中 ρ, C 是任意常数.

并且系统 (5.1) 限制在其不变曲面 $\big\{(x, z) \mid x^2 + z^2 + b\rho^2 x = C\big\}$ 上是一族闭轨.

2) 第二个例子, 我们考虑由 Arnold[13] 介绍以描述流体粒子运动的 Arnold-Beltrami-Childress (ABC) 流模型

$$\dot{x} = A\sin z + C\cos y, \qquad \dot{y} = B\sin x + A\cos z, \qquad \dot{z} = C\sin y + B\cos x, \tag{5.3}$$

其中 A,B,C 是实参数.

因为此模型可能存在 Lagrangian 揣流，并且它本身具有 Beltrami 性质 (见 [10]) $v \times rotv = 0$, 所以此模型一直吸引着非线性科学家们的极大兴趣 [14,15].

本文把 C 视为小参数，即讨论下列情形，

$$A > B \geq C \geq 0, \quad C << 1 \text{ 且 } B^2 + C^2 < A^2. \tag{5.4}$$

仔细观察系统 (5.3), 我们可将该系统写成下面的形式

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{\partial H(x,z)}{\partial z} + C\cos y, \\ \dot{z} = \dfrac{\partial H(x,z)}{\partial x} + C\sin y, \\ \dot{y} = H(x,z). \end{cases} \tag{5.5}$$

这恰好为第 4 节中讨论过的特殊情形，所以可用上面的方法讨论其二维不变环面的存在性问题，也可用 [9] 的方法讨论其 Smale 马蹄的存在性. 我们得到的关于 Smale 马蹄的结果与以前的结果基本一致，并且首次得到其不变环面存在性的解析判定. 限于篇幅，这些详细内容请参见 [16].

参 考 文 献

1 Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equation. New York: Springer-Verlag, 1985

2 Marsden J E, Weinstein A. Reduction of Symplectic Manifolds with Symmetry. *Rep. Math. Phys.*, 1974, 5(1): 121–130

3 Quispel G R W. Volume-preserving Integrators. *Phys. Lett. A*, 1995, 206: 26–30

4 Cheng C Q, Sun Y S. Existence of Invariant Tori in Three Dimensional Measure-preserving Mappings. *Celestial Mech.*, 1990, 47: 275–292

5 Mezie I, Wiggins S. On the Integrablility and Perturbation of Three-dimensional Fluid Flows with Symmetry. *J. Nonlinear Sci.*, 1994, 4: 157–194

6 Xia Z H. Existence of Invariant Tori in Volume Preserving Diffeomorphisms. *Ergodic Theory Dyn. Sys.*, 1992, 12: 621–631

7 郭仲衡，陈玉明. 具有不依赖于时间的不变量的三维常微分方程组的 Hamilton 结构. *应用数学和力学*, 1995, 16(4): 283–288

(Gou Zhongheng, Cheng Yuming. Hamilton Structure in the Three-dimensional System of Ordinary Differential Equations with an Invariance Independent of Time. *Appl. Math. Mech.*, 1995, 16(4): 283–288)

8 赵晓华. 广义 Hamilton 扰动系统的周期轨道，同宿轨道分枝与混沌. 北京航空航天大学博士论文, 1991

(Zhao Xiaohua. Periodic Orbits, Homoclinic Bifurcation and Chaos in the Generalized Hamilton Syetems. P.h.D Thesis, Beijing Hang Kong Hang Tian Da Xue, 1991)

9 Wiggins S. Global Bifurecation and Chaos: Analytical Methods. New York: Springer-Verlag, 1988

10 Around V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1978

11 Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. New York: Springer-Verlag, 1990

12 Lorenz E N, Krishnamurthy V. On the Nonexistence of a Slow Manifold. *J. Atmos. Sci.*, 1987, 44: 2940–2950

13 Arnold V I. Sur la Topologie Desecoulements Stationaries des Fluides Parfaits. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1965, 261: 17-20

14 Domber T, Frisch U, Greene J M, et al. Chaotic Streamlines in the ABC Flow. *J. Fluid Mech.*, 1986, 167: 353–391

15 Zhao X H, Kwek K H, Li J B, et al. Chaotic and Resonant Streamlines in the ABC Flow. *SIAM J. Appl. Math.*, 1993, 53: 71–77

16 Huang D B, Zhao X H, Dai H H. Invariant Tori and Chaotic Streamlines in the ABC Flow. *Phys. Lett. A*, 1998, 237: 136–140

LIE SYMMETRY GROUP REDUCTION OF THE SYSTEMS PRESERVING n-FORM AND ITS APPLICATIONS

HUANG DEBIN

(*Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai* 201800)

ZHAO XIAOHUA

(*Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming* 650091)

YU FENG

(*Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai* 201800)

LIU YURONG

(*Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou* 215006)

Abstract In this paper, n-dimensional vectorfields preserving n-form (a high dimensional generalization of area, volume) are considered. By the mean of Lie group the reduction of this kind of vectorfields is studied systematically, and the following results are obtained. Firstly if a n-dimensional vectorfiels preserving n-form admits a one-parameter symmetry group that is spatial and preserving n-form, then it can be reduced into a $(n-1)$-dimensional vectorfield preserving the corresponding $(n-1)$ form by constructing a concrete transformation independent of the vectorfield. Especially, when $n = 3$, the important results in [1] can be obtained directly. Secondly, if the above n-dimensional vectorfield admits a r-parameter symmetry group that is spatial, Abelian and preserving n-form, then it can be reduced into a $(n-r)$-dimensional vectorfield preserving $(n-r)$-form. In particular, when $n = 4$ and $r = 2$, some important dynamical behavior in this kind of four-dimensional perturbed systems can be discussed in detail. Finally the applications of the method proposed in this paper are illustrated by two examples: the famous L-K model and ABC flow.

Key words Preserving n-form, Lie group, reduction, action-angle-angle transformation, invariant torus