第 25 卷 第 2 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 25 No. 2
2002 年 4 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Apr., 2002

Stancu-Kantorovich 算子在 Ba 空间的逼近 *

伍火熊
(北京师范大学数学系，北京 100875)

朱利芝
(湘潭师范学院数学系，湘潭 411201)

摘　要　讨论 Stancu-Kantorovich 算子在 Ba 空间中的逼近阶与饱和性质，得到了逼近阶的一种估计与饱和性定理.

关键词　Stancu-Kantorovich 算子，　Ba 空间，逼近，饱和性

1　引言

Ba 空间是由我国学者丁夏畦先生等在研究线性方程的先验估计问题 (如 Laplace 算子在某些典型域上的先验估计) 时，引进的一类十分重要的函数空间：

定义 1[1]　设 $B=\{L_{p_1},L_{p_2},\cdots,L_{p_m},\cdots\}$ 为一串 Lebesgue 类，　$f(x)$ 为定义在 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内的有界闭集 G 上的可测函数，　$a=\{a_1,a_2,\cdots a_m,\cdots\}$ 是一非负实数列. 若对 $f(x)\in\bigcap\limits_m L_{p_m}$, 存在实数 $\alpha>0$ 使

$$I(f,\alpha):=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\alpha^m\|f\|_{p_m}^m<+\infty,$$

则称 $f(x)\in Ba$, 且定义

$$\|f\|_{Ba}:=\inf_{\alpha>0}\Big\{\alpha:I\Big(f,\frac{1}{\alpha}\Big)\le 1\Big\}$$

为 Ba 空间的范数，　Ba 空间在上述范数下为 Banach 空间 [1,2].

注　在上述定义中，若取 $B=\{L_p,L_p,\cdots,L_p,\cdots\}$，　$a=\{1,0,\cdots,0,\cdots\}$, 则这时的 Ba 空间就是经典的 Lebesgue 空间 L_p. 若取 $B=\{L_1,L_2,\cdots,L_m,\cdots\}$, 则 Ba 空间就是 Orlicz 空间 $L(\phi)$ (见 [1]). 因此 Ba 空间是 L_p 空间与 Orlicz 空间的推广，且由 [1,3] 知，Ba 空间具有许多与 Orlicz 空间相类似的性质，但其包含的内容要广泛得多.

为后面讨论的需要，我们还得引进 Ba 空间的对偶空间 A_b, 其定义如下：

本文 2000 年 9 月 20 日收到. 2001 年 7 月 25 日收到修改稿.
* 教育部博士点基金和湖南省高校青年骨干教师基金资助项目.

定义 2[4] 对于定义 1 中的 Lebesgue 类 B, 给出相应的 Lebesgue 类

$$A=\{L_{q_1},L_{q_2},\cdots,L_{q_m},\cdots\},\qquad \text{其中}\ \frac{1}{p_m}+\frac{1}{q_m}=1,\quad m=1,2,\cdots.$$

$b=\{b_1,b_2,\cdots,b_m,\cdots\}$ 为任一可以与 a 不同的非负实数列, $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 内的有界闭集 G 上的可测函数, 按照定义 1 的方法在 G 上定义的空间称为 Ba 空间的对偶空间, 记作 A_b.

设 $f(x)$ 为定义在 $[0,1]$ 上的实函数, Stancu-Kantorovich 算子是指:

$$K_{n,s}(f,x)=\sum_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)(n+1)\int_{I_k}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $x\in[0,1]$, $I_k=\left[\frac{k}{n+1},\frac{k+1}{n+1}\right]$, $0\le s<\frac{n}{2}$ 是正数, 而

$$q_{n,k,s}(x)=\begin{cases}\dbinom{n-s}{k}x^k(1-x)^{n-s-k+1}, & 0\le k<s,\\ \dbinom{n-s}{k}x^k(1-x)^{n-s-k+1}+\dbinom{n-s}{k-s}x^{k-s+1}(1-x)^{n-k}, & s\le k\le n-s,\\ \dbinom{n-s}{k-s}x^{k-s+1}(1-x)^{n-k}, & n-s<k\le n.\end{cases}$$

易知 $K_{n,s}(f,x)$ 是正线性算子. 当 $s=0$ 与 $s=1$ 时, $K_{n,s}(f,x)$ 便是著名的 Bernstein-Kantorovich 算子. 对于此特款, 吴与盛分别在 [5] 与 [4] 中获得了它们在 Ba 空间中的逼近阶估计与饱和性定理. 本文在 Ba 空间中对一般的 Stancu-Kantorovich 算子讨论类似的问题.

对于 $f(x)\in Ba\,[0,1]$ 和 $t>0$, 我们定义它的二阶积分光滑模为:

$$\omega_2(f,t)_{Ba}=\sup_{0\le h\le t}\big\|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\big\|_{Ba}.$$

为方便起见, 文中总假定 $\alpha>0$, $C(r,q,\cdots)$ 表示仅与括号中字母有关的正常数, 且在不同处其值可以不同. 我们的主要结果是:

定理 1 设 $B=\{L_{p_1},L_{p_2},\cdots,L_{p_m},\cdots\}$ 为一串 Lebesgue 类, $p_m>1$ $(m=1,2,\cdots)$, $a=\{a_1,a_2,\cdots,a_m,\cdots\}$ 是一非负实数列. 若 $\{a_m^{1/m}\}$, $\{a_m^{-1/m}\}\in l^\infty$, 且 $\inf\limits_m p_m=p_0>1$, 则对于 $f(x)\in Ba\,[0,1]$ 和充分大的 n 有

$$\|K_{n,s}(f)-f\|_{Ba}\le C(r,q,p_0)\omega_2\big(f,\sqrt{(n+s^2-s-1)/(n+1)^2}\,\big)_{Ba},$$

其中 $r=\inf\limits_m\{a_m^{1/m}\}$, $q=\sup\limits_m\{a_m^{1/m}\}$.

定理 2 对如上定义的 Ba 空间及其对偶空间 A_b, 设 $\{a_m^{1/m}\}$, $\{a_m^{-1/m}\}\in l^\infty$, $\{b_m^{1/m}\}$, $\{b_m^{-1/m}\}\in l^\infty$, $r=\inf\limits_m\{a_m^{1/m}\}$, $q=\sup\limits_m\{a_m^{1/m}\}$, $r'=\inf\limits_m\{b_m^{1/m}\}$, $q'=\sup\limits_m\{b_m^{1/m}\}$, 则当 $2r\le qq'$, $2r'\le qq'$ 时, 算子 $K_{n,s}$ 在 Ba 空间中是饱和的, 且满足

(i) $\|K_{n,s}(f)-f\|_{Ba}=o\left(\frac{1}{n}\right)\Leftrightarrow f(x)=\text{const.}$;

(ii) $\|K_{n,s}(f)-f\|_{Ba}=O\left(\frac{1}{n}\right)\Rightarrow f(x)\in S_B$;

(iii) 若 $p_0=\inf\limits_m p_m>1$, 当 $f(x)\in S_B$ 时，有 $\|K_{n,s}(f)-f\|_{Ba}=O\left(\frac{1}{n}\right)$, 其中 $S_B=\left\{g(x):g(x)=\text{const.}+\int_0^x\frac{1}{t(1-t)}\int_0^t h(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\right.$, 这里 $h(x)\in Ba\,[0,1]$ 且 $\left.\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x=0\right\}$.

2 辅助引理

引理 1 算子 $K_{n,s}(f)$ 具有如下性质：

(i) $K_{n,s}$ 是 $Ba\,[0,1]$ 中的有界线性正算子，且 $\|K_{n,s}\|\le\frac{q}{4r}$;

(ii) $K_{n,s}(1,x)=1$;

(iii) $K_{n,s}(t-x,\,x)=\frac{1}{2(n+1)}-\frac{x}{n+1}$;

(iv) $K_{n,s}\big((t-x)^2,x\big)=\frac{1}{3(n+1)^2}+\frac{n+s^2-s-1}{(n+1)^2}x(1-x)$;

(v) $K_{n,s}\big(|t-x|,x\big)\le K_{n,s}\big((t-x)^2,x\big)^{1/2}$.

证 注意到 $\sum\limits_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)=1$, (ii), (iii), (iv) 通过简单计算即得， (v) 则是正线性算子的 Schwarz 不等式的直接结果．下证 (i):

$K_{n,s}$ 的线性与正性是显然的，而对 $p_m>1$ $(m=1,2,\cdots)$, 并注意到 $\frac{1}{p_m}+\frac{1}{q_m}=1$ 和 $0\le s<\frac{n}{2}$, 我们有

$$\begin{aligned}\big\|K_{n,s}(f)\big\|_{p_m}=&\Big(\int_0^1\Big|\sum_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)(n+1)\int_{I_k}f(u)\,\mathrm{d}u\Big|^{p_m}\mathrm{d}x\Big)^{1/p_m}\\ =&\Big(\int_0^1\Big|\sum_{k=0}^{n}q_{n,ks}^{1/q_m}(x)q_{n,k,s}^{1/p_m}(x)(n+1)\int_{I_k}f(u)\,\mathrm{d}u\Big|^{p_m}\mathrm{d}x\Big)^{1/p_m}\\ \le&\Big\{\int_0^1\Big(\sum_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)\Big)^{p_m/q_m}\sum_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)(n+1)\Big|\int_{I_k}f(u)\,\mathrm{d}u\Big|^{p_m}\mathrm{d}x\Big\}^{1/p_m}\\ =&\Big\{\int_0^1\sum_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)\Big|\int_{I_k}(n+1)f(u)\,\mathrm{d}u\Big|^{p_m}\mathrm{d}x\Big\}^{1/p_m}\\ \le&\Big\{\int_0^1\sum_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)(n+1)\int_{I_k}|f(u)|^{p_m}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x\Big\}\\ =&\Big\{\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 q_{n,k,s}(x)\,\mathrm{d}x(n+1)\int_{I_k}|f(u)|^{p_m}\,\mathrm{d}u\Big\}^{1/p_m}\\ \le&\Big(\frac{n+1}{n-s+1}\int_I|f(u)|^{p_m}\,\mathrm{d}u\Big)^{1/p_m}\le 2\|f\|_{p_m}\le\frac{2}{r}\|f\|_{Ba}.\end{aligned}$$

上述证明中，利用了 $\int_0^1 q_{n,k,s}(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{n-s+1}$ (见 [7]) 与 $\|f\|_{p_m}\le\frac{1}{r}\|f\|_{Ba}$ (见 [2]), 于是

$$\begin{aligned}&\|K_{n,s}(f)\|_{Ba}=\inf\Big\{\alpha>0:\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{\alpha^m}\|K_{n,s}(f)\|_{p_m}^m\le 1\Big\}\\ \le&\inf\Big\{\alpha>0:\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{\alpha^m}\Big(\frac{2}{r}\|f\|_{Ba}\Big)^m\le 1\Big\}\le\inf\Big\{\alpha>0:\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{2q}{\alpha r}\|f\|_{Ba}\Big)^m\le 1\Big\}.\end{aligned}$$

取 $\alpha=\frac{4q}{r}\|f\|_{Ba}$, 则 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\big(\frac{2q}{\alpha r}\|f\|_{Ba}\big)^m=1$. 故 $\big\|K_{n,s}(f)\big\|_{Ba}\le\frac{4q}{r}\|f\|_{Ba}$, 即 $\|k_{n,s}\|\le\frac{4q}{r}$. 引理 1 得证.

引理 2[5] 在定理 1 的条件下，对 $f(x)\in Ba\,[0,1]$ 有 $\theta_f(x)\in Ba\,[0,1]$, 且 $\|\theta_f\|_{Ba}\le \frac{q}{4r}\frac{p_0}{p_0-1}\|f\|_{Ba}$, 其中 $\theta_f(x)=\sup\limits_{0\le t\le 1,t\ne x}\frac{1}{t-x}\int_x^t|f(u)|\,\mathrm{d}u$ 为 $f(x)$ 的 Hardy-Littlewood 极大函数.

对于 $f(x)\in Ba\,[0,1]$, 把 $f(x)$ 延拓到 $[0,1]$ 区间外，使当 $x\notin[0,1]$ 时， $f(x)=0$. 令

$$f_h(x)=\frac{1}{2h^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\big(f(x+u+v)+f(x-u-v)\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

则有

引理 3[5] 对于 $f(x)\in Ba\,[0,1]$ 有

(i) $f''_h(x)\in Ba\,[0,1]$;

(ii) $\big\|f_h(\cdot)-f(\cdot)\big\|_{Ba}\le\frac{q}{r}\omega_2(f,h)_{Ba}$;

(iii) $\big\|f'_h(\cdot)\big\|_{Ba}\le\frac{2q}{hr}\omega_2(f,h)_{Ba}$;

(iv) $\|f''_h(\cdot)\|_{Ba}\le\frac{4q}{h^2r}\omega_2(f,h)_{Ba}$.

引理 4[7] 对于 $f(x)\in C^2[0,1]$, 有

$$\lim_{n\to\infty}n\big(K_{n,s}(f,x)-f(x)\big)=\big(x(1-x)f'(x)\big)'.$$

引理 5 对于 $f(x)\in Ba\,[0,1]$, $g(x)\in C^2[0,1]$, 令

$$A_n(f,g)=n\int_0^1\big(K_{n,s}(f,x)-f(x)\big)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

则存在 $C(g)>0$, 使 $\big|A_n(f,g)\big|\le C(g)\,\|f\|_{Ba}$.

证 参考 [6] 之引理 5.3 的方法知，存在 $C(g)>0$, 使 $\big|A_n(f,g)\big|\le C(g)\,\|f\|_L\le C(g)\,\|f\|_{Ba}$.

引理 6[2] 在定理 2 的条件下，令 $p_0=\inf\limits_m\{p_m\}$, $p^*=\sup\limits_m\{p_m\}$, 则 $L_{P^*}\subset Ba\subset L_{p_0}$, 且 Ba 为 L_{p^*} 与 L_{p_0} 的 θ- 型内插空间.

引理 7 在定理 2 的条件下，设 $F(x)\in Ba\,[0,1]$, 令

$$T_n(F,x)=(n+1)K_{n,s}\Big(\int_t^x\big(g(u)-g(t)\big)F(u)\,\mathrm{d}u,x\Big),$$

则 $\big\|T_n(F,x)\big\|_{Ba}=O\left(\|F\|_{Ba}\right)$, 其中 $g(t)=\ln(t)-\ln(1-t)$.

证 令 $Q(n,t,x)=\sum\limits_{k=0}^n q_{n,k,s}(x)(n+1)\chi_{I_k}(t)$, 其中 χ_{I_k} 为 I_k 上的特征函数，记

$$\big(g(u)-g(t)\big)_+=\begin{cases}g(u)-g(t), & 0\le t\le u;\\ 0, & u<t\le 1,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\big\|T_n(f,\cdot)\big\|_1&=\int_0^1\big|T_n(F,x)\big|\,\mathrm{d}x=\int_0^1(n+1)\Big|K_{n,s}\Big(\int_t^x\big(g(u)-g(t)\big)F(u)\,\mathrm{d}u,x\Big)\Big|\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1(n+1)\Big|\sum_{k=0}^n q_{n,k,s}(x)(n+1)\int_{I_k}\int_t^x\big(g(u)-g(t)\big)F(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\Big|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\int_0^1 (n+1)\Big|\int_0^1 Q(n,t,x)\int_t^x \big(g(u)-g(t)\big)F(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\Big|\,\mathrm{d}x\\
&\le \int_0^1 (n+1)\int_0^x Q(n,t,x)\int_t^x \big(g(u)-g(t)\big)\,|F(u)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_0^1 (n+1)\Big|\int_x^1 Q(n,t,x)\int_t^x \big(g(u)-g(t)\big)F(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\Big|\,\mathrm{d}x\\
&=(n+1)\Big\{\int_0^1\int_0^x\int_0^u Q(n,t,x)\big(g(u)-g(t)\big)\,\mathrm{d}t|F(u)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_0^1\int_x^1\int_u^1 Q(n,t,x)\big(g(t)-g(u)\big)\,\mathrm{d}t|F(u)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x\Big\}\\
&\le(n+1)\int_0^1\Big\{\int_u^1\int_0^u Q(n,t,x)\big(g(u)-g(t)\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_0^u\int_u^1 Q(n,t,x)\big(g(u)-g(t)\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\Big\}|F(u)|\,\mathrm{d}u\\
&=(n+1)\int_0^1\Big\{\int_u^1 K_{n,s}\big((g(u)-g(\cdot))_+,x\big)\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_0^u K_{n,s}\big((g(\cdot)-g(u))_+,x\big)\,\mathrm{d}x\Big\}|F(u)|\,\mathrm{d}u\\
&\le\frac{(n+1)^2}{n-s+1}\int_0^1\Big\{\int_0^u\big|K_{n,s}\big(g(\cdot)-g(u),x\big)-\big(g(x)-g(u)\big)\big|\,\mathrm{d}x\Big\}|F(u)|\,\mathrm{d}u\\
&\le\frac{(n+1)^2}{n-s+1}\int_0^1\Big\{\int_0^u\big|K_{n,s}(g,x)-g(x)\big|\,\mathrm{d}x\Big\}|F(u)|\,\mathrm{d}u\\
&\le\frac{(n+1)^2}{n-s+1}O\Big(\frac{1}{n}\Big)\int_0^1|F(u)|\,\mathrm{d}u=O\big(\|F\|_1\big).
\end{aligned}$$

上述证明中的倒数第一个不等式用到了 $\|K_{n,s}(g)-g\|_1=O\left(\frac{1}{n}\right)$ (见 [7, 引理 3]), 倒数第三个不等式用到了如下结论：

$$\begin{aligned}
&\int_u^1 K_{n,s}\big((g(u)-g(\cdot))_+,x\big)\,\mathrm{d}x\\
\le&\int_0^u K_{n,s}\big(g(x)-g(u),x\big)\,\mathrm{d}x+\frac{n+1}{n-s+1}\int_0^u\big(g(u)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

这是因为

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 K_{n,s}\big((g(u)-g(\cdot))_+,x\big)\,\mathrm{d}x\le\frac{n+1}{n-s+1}\int_0^u\big(g(u)-g(x)\big)_+\,\mathrm{d}x\\
=&\frac{n+1}{n-s+1}\int_0^u\big(g(u)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

又由于

$$\big|T_n(F,x)\big|=(n+1)\Big|K_{n,s}\Big(\int_t^x\big(g(u)-g(t)\big)F(u)\,\mathrm{d}u,x\Big)\Big|$$

$$
\begin{aligned}
&=(n+1)\Big|\sum_{k=0}^{n} q_{n,k,s}(x)\int_{I_k}\int_t^x \big(g(u)-g(t)\big)F(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\Big| \\
&=(n+1)\Big|\int_0^1 Q(n,t,x)\int_t^x \big(g(u)-g(t)\big)F(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\le\|F\|_\infty(n+1)\int_0^1 Q(n,t,x)\int_t^x \big|g(u)-g(t)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \\
&=\|F\|_\infty(n+1)\big\{x\big(\ln x-K_{n,s}(\ln(\cdot),x)\big)+(1-x)\big(\ln(1-x)-K_{n,s}(\ln(1-\cdot),x)\big)\big\} \\
&=\|F\|_\infty(n+1)O\left(\frac{1}{n}\right)=O\left(\|F\|_\infty\right).
\end{aligned}
$$

于是，由 M. Riesz-Thorin 定理及引理 6 知，对 $F(x)\in Ba\,[0,1]$ 有 $\big\|T_n(F,x)\big\|_{Ba}=O\left(\|F\|_{Ba}\right)$. 引理 7 得证.

3 定理的证明

定理 1 的证明 (1) 先设 $f''(x)\in Ba\,[0,1]$, 由微分中值定理知，存在 $\xi\in(x,t)$ 使 $f(t)-f(x)=(t-x)f'(\xi)$. 故由引理 1, 并注意到 $\max\limits_{0\le x\le 1}|1-2x|=1$, $\max\limits_{0\le x\le 1}|x(1-x)|=\frac{1}{4}$, 对充分大的 n 有

$$
\begin{aligned}
\big|K_{n,s}(f,x)-f(x)\big| &=\Big|(n+1)\sum_{k=0}^{n} q_{n,k,s}(x)\int_{I_k}\big(f(t)-f(x)\big)\,\mathrm{d}t\Big| \\
&=\Big|(n+1)\sum_{k=0}^{n} q_{n,k,s}(x)\int_{I_k}(t-x)f'(\xi)\,\mathrm{d}t\Big| \\
&=\Big|(n+1)\sum_{k=0}^{n} q_{n,k,s}(x)\int_{I_k}\big\{(t-x)f'(x)+(t-x)\big(f'(\xi)-f'(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}t\Big| \\
&=\Big|(n+1)\sum_{k=0}^{n} q_{n,k,s}(x)\int_{I_k}\Big\{(t-x)f'(x)+\frac{(t-x)^2}{t-x}\int_x^\xi f''(u)\,\mathrm{d}u\Big\}\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\le\Big|(n+1)\sum_{k=0}^{n} q_{n,k,s}(x)\int_{I_k}(t-x)\,\mathrm{d}t\Big|\cdot|f'(x)| \\
&\quad+\Big|(n+1)\sum_{k=0}^{n} q_{n,k,s}(x)\int_{I_k}(t-x)^2\,\mathrm{d}t\Big|\cdot\big|\theta_{f''}(x)\big| \\
&=|K_{n,s}(t-x,x)|\cdot|f'(x)|+K_{n,s}\big((t-x)^2,x\big)\,\big|\theta_{f''}(x)\big| \\
&=\frac{|1-2x|}{2(n+1)}|f'(x)|+\Big|\frac{1}{3(n+1)^2}+\frac{n+s^2-s-1}{(n+1)^2}x(1-x)\Big|\cdot|\theta_{f''}(x)| \\
&\le\frac{1}{2(n+1)}|f'(x)|+\frac{n+s^2-s-1}{(n+1)^2}\big|\theta_{f''}(x)\big|.
\end{aligned}
$$

由此，并利用引理 2 可推出

$$
\|K_{n,s}(f)-f\|_{p_m}\le\frac{1}{2(n+1)}\|f'\|_{p_m}+\frac{n+s^2-s-1}{(n+1)^2}\|\theta_{f''}\|_{p_m}
$$

$$\le\frac{1}{2r(n+1)}\|f'\|_{Ba}+\frac{n+s^2-s-1}{r(n+1)^2}\|\theta_{f''}\|_{Ba}$$
$$\le\frac{1}{2r(n+1)}\|f'\|_{Ba}+\frac{q(n+s^2-s-1)}{2r(n+1)^2}\frac{p_0}{p_0-1}\|f''\|_{Ba}.$$

从而

$$\|K_{n,s}(f)-f\|_{Ba}\le\inf\Big\{\alpha>0:\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{\alpha^m}\|K_{n,s}(f)-f\|_{p_m}^m\le 1\Big\}$$
$$\le\inf\Big\{\alpha>0:\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{\alpha^m}\Big\{\frac{1}{2r(n+1)}\|f'\|_{Ba}+\frac{q(n+s^2-s-1)}{2r^2(n+1)^2}\frac{p_0}{p_0-1}\|f''\|_{Ba}\Big\}^m\le 1\Big\}$$
$$\le\inf\Big\{\alpha>0:\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^m}\Big\{\frac{q}{2r(n+1)}\|f'\|_{Ba}+\frac{q^2(n+s^2-s-1)}{2r^2(n+1)^2}\frac{p_0}{p_0-1}\|f''\|_{Ba}\Big\}^m\le 1\Big\}$$
$$\le\frac{q}{r(n+1)}\|f'\|_{Ba}+\frac{q^2(n+s^2-s-1)}{r^2(n+1)^2}\frac{p_0}{p_0-1}\|f''\|_{Ba}.$$

(2) 对于一般的 $f(x)\in Ba\,[0,1]$, 利用 (1) 的证明及引理 1 与引理 3 可推出

$$\|K_{n,s}(f)-f\|_{Ba}=\|K_{n,s}(f-f_h)+K_{n,s}(f_h)-f_h+f_h-f\|_{Ba}$$
$$\le\|K_{n,s}(f-f_h)\|_{Ba}+\|K_{n,s}(f_h)-f_h\|_{Ba}+\|f_h-f\|_{Ba}$$
$$\le\Big(1+\frac{q}{4r}\Big)\frac{q}{r}\omega_2(f,h)_{Ba}+\frac{q}{r(n+1)}\frac{2q}{hr}\omega_2(f,h)_{Ba}+\frac{4q^3(n+s^2-s-1)}{r^3h(n+1)^2}\frac{p_0}{p_0-1}\omega_2(f,h)_{Ba}.$$

取 $h=\sqrt{\frac{n+s^2-s-1}{(n+1)^2}}$, $C(r,q,p_0)=\big(1+\frac{q}{4r}\big)\frac{q}{r}+\frac{2q^2}{r^2}+\frac{4q^3}{r^3}\frac{p_0}{p_0-1}$, 则

$$\|K_{n,s}(f)-f\|_{Ba}=C(r,q,p_0)\omega_2\big(f,\sqrt{(n+s^2-s-1)/(n+1)^2}\big)_{Ba}.$$

定理 1 得证.

定理 2 的证明　由引理 4 和引理 5 知，当 $f(x)\in C^2[0,1]\cap Ba\,[0,1]$ 时，对于任意的 $g(x)\in C^2[0,1]$, 有

$$\lim_{n\to\infty}A_n(f,g)=\lim_{n\to\infty}n\int_0^1\big(K_{n,s}(f,x)-f(x)\big)g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\lim_{n\to\infty}n\big(K_{n,s}(f,x)-f(x)\big)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\big(x(1-x)f'(x)\big)'g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\big(x(1-x)g'(x)\big)'f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因为 $C^2[0,1]\cap Ba\,[0,1]$ 在 $Ba\,[0,1]$ 中稠密，所以

$$\lim_{n\to\infty}A_n(f,g)=\int_0^1\big(x(1-x)g'(x)\big)'f(x)\,\mathrm{d}x,$$

对一切的 $f(x)\in Ba\,[0,1]$ 成立.

(i) 若 $\|K_{n,s}(f)-f\|_{Ba}=o\left(\frac{1}{n}\right)$, 则 $\int_0^1(x(1-x)g'(x))'f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 由此易得 $f'(x)=0$ (a.e.), 所以 $f(x)=\text{const}$.

反之， $f(x)=\text{const.}$ 时，显然有 $\|K_{n,s}(f)-f\|_{Ba}=o\left(\frac{1}{n}\right)$.

(ii) 若 $\|K_{n,s}(f)-f\|_{Ba}=O\left(\frac{1}{n}\right)$, 由 [4, 定理 1] 与 [4, 引理 7] 知, 存在 $h(x)\in Ba\,[0,1]$ 使

$$\int_0^1 \big(x(1-x)g'(x)\big)' f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)h(x)\,\mathrm{d}x.$$

解此积分方程得

$$f(x)=\text{const.}+\int_0^x \frac{1}{t(1-t)}\int_0^t h(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t,$$

且有 $\int_0^1 h(u)\,\mathrm{d}u=0$. 即 $f(x)\in S_B$.

(iii) 若 $f(x)\in S_B$, 则 $f'(x)=\frac{1}{x(1-x)}\int_0^x h(u)\,\mathrm{d}u$, 因此

$$x(1-x)f'(x)=\int_0^x h(u)\,\mathrm{d}u.$$

由 $\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x=0$ 知 $\int_0^x h(u)\,\mathrm{d}u=\int_1^x h(u)\,\mathrm{d}u$, 从而由 $h(x)\in Ba\,[0,1]$ 和引理 2 有

$$(1-x)f'(x),\qquad xf'(x)\in Ba\,[0,1],$$

又由 $(1-2x)f'(x)+x(1-x)f''(x)=h(x)$ 知 $x(1-x)f''(x)\in Ba\,[0,1]$.

令 $g(t)=\ln t-\ln(1-t)$, 则

$$f(t)-f(x)=-\int_t^x f'(u)\,\mathrm{d}u=x(1-x)f'(x)\big(g(t)-g(x)\big)+\int_t^x \big(g(u)-g(t)\big)\,\mathrm{d}\big(u(1-u)f'(u)\big).$$

故

$$\begin{aligned}K_{n,s}(f,x)-f(x)=&x(1-x)f'(x)\big(K_{n,s}(g,x)-g(x)\big)\\&+K_{n,s}\Big(\int_t^x \big(g(u)-g(t)\big)\,\mathrm{d}\big(u(1-u)f'(u)\big),x\Big).\end{aligned}$$

而由 [7, 引理 3] 知 $\|K_{n,s}(g)-g\|_1=O(\frac{1}{n})$, 所以

$$\big\|x(1-x)\big(K_{n,s}(g,x)-g(x)\big)\big\|_1=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

又仿 [8, 引理 1] 的证明方法易得

$$\big\|x(1-x)\big(K_{n,s}(g,x)-g(x)\big)\big\|_\infty=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

于是由 Riesz-Thorin 定理及引理 6 知

$$\big\|x(1-x)\big(K_{n,s}(g,x)-g(x)\big)\big\|_{Ba}=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

构作线性算子

$$T_n(F,x)=(n+1)K_{n,s}\Big(\int_t^x \big(g(u)-g(t)\big)F(u)\,\mathrm{d}u,x\Big).$$

对 $F(x) \in Ba\,[0,1]$, 由引理 7 知 $\|T_n(F,x)\|_{Ba} = O\left(\|F\|_{Ba}\right)$. 取 $F(x) = \big(x(1-x)f'(x)\big)'$, 则

$$\begin{aligned}&\Big\|(n+1)K_{n,s}\Big(\int_t^x \big(g(u)-g(t)\big)\big(u(1-u)f'(u)\big)'\,\mathrm{d}u, x\Big)\Big\|_{Ba}\\ =&O\left(\big\|x(1-x)f''(x)\big\|_{Ba} + \big\|(1-2x)f'(x)\big\|_{Ba}\right),\end{aligned}$$

即

$$\Big\|K_{n,s}\Big(\int_t^x \big(g(u)-g(t)\big)\big(u(1-u)f'(u)\big)'\,\mathrm{d}u, x\Big)\Big\|_{Ba} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

综上可得 $\|K_{n,s}(f) - f\|_{Ba} = O\left(\frac{1}{n}\right)$. 定理 2 得证.

致谢 衷心感谢审稿者对本文初稿提出的宝贵修改意见.

参 考 文 献

1 Ding Xiaqi, Luo Peizhu. Ba Spaces and some Estimates of Laplace Operator. *J. Sys. Sci. & Math. Sci.,* 1981, 1(1): 9–33

2 Chen Guangrong, Meng Boqin. Interpolation of Ba Spaces. *Math. Acta Sci.,* 1988, 8(1): 1–10

3 庄亚栋，俞鑫泰. Ba 空间的一些性质. *数学物理学报*, 1989, 9(4): 407–413
(Zhuang Yadong, Yu Xintai. Some Properties of Ba Spaces. *Math. Acta Sci.,* 1989, 9(4): 407–413)

4 盛保怀. Ba 空间中 Kantorovich 算子的饱和性. *数学杂志*, 1992, 12(2): 146–154
(Sheng Baohuai. The Saturation of Kantorovich Operators in Ba Spaces. *J. of Math. (PRC),* 1992, 12(2): 146–154)

5 吴嘎日迪，陈广荣. Ba 空间中 Kantorovich 算子的逼近. *内蒙古师范大学学报*, 1996, 1: 7–11
(Wu Garidi, Chen Guangrong. Approximation by Kantorovich Operators in Ba Spaces. *J. of Inner Mongolia Normal University*, 1996, 1: 7–11)

6 Ditzian Z, May C P. L_p Saturation and Inverse Theorems for Modified Bernstein Polynomials. *Indiana Univ. Math. J.,* 1976, 25: 733–751

7 赵静辉. Stancu-Kantorovich 算子在 L_p 的饱和性. *数学杂志*, 1988, 8(3): 257–262
(Zhao Jinghui. The L_p Saturation of Stancu-Kantorovich Operators. *J. of Math. (PRC),* 1988, 8(3): 257–262)

8 Riemenschneider S D. The L_p-saturation of the Bernstein-Kantorovich Polynomials. *J. of Approx. Theory*, 1978, 23: 158–162

APPROXIMATION BY STANCU-KANTOROVICH OPERATORS IN Ba SPACES

WU Huoxiong

(*Department of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing* 100875)

ZHU Lizhi

(*Department of Mathematics, Xiangtan Normal College, Xiangtan* 411201)

Abstract The approximation problem by Stancu-Kantorovich operators in Ba spaces is studied. An estimation of degree of approximation and the saturation theorems are given.

Key words Stancu-Kantorovich operators, Ba spaces, approximation, saturation