第 26 卷 第 3 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 26 No. 3
2003 年 7 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　July, 2003

p-Laplacian 奇异半正单调问题的非负解 *

李翠哲　　葛渭高

(北京理工大学应用数学系，北京 100081)

摘　要　运用分析的方法，建立了具有 p-Laplacian 算子的二阶奇异半正单调边值问题的非负解的存在性条件.

关键词　奇异边值问题，半正单调问题，p-Laplacian 算子，非负解

1　引言

本文讨论下列奇异边值问题的非负解

$$\begin{cases} \big(\phi_p(y')\big)' = \mu q(t) f(t,y), & 0<t<1, \\ y(0)=a>0, & y(1)=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\mu \geq 0$ 为常数，$\phi_p(y) = |y|^{p-2}y$，$p>1$ 为 p-Laplacian 算子. 对于 $f(t,y) \leq 0$，$(t,y) \in [0,1]\times(0,\infty)$ (正单调问题)，当 $p=2$ 时，受到了广泛的关注 [1−3]，然而对于 $f(t,y)\geq 0$，$(t,y)\in[0,1]\times(0,\infty)$ (半正单调问题) 研究尚不多见 [2,4]. 研究半正单调问题的困难在于建立非负解的存在性时，零解不是问题的下解，而正单调问题的零解是下解. 最近 [4] 研究了当 $p=2$，$\mu<\mu_0$ 时半正单调问题的非负解的存在性. 由于近年来，对带 p-Laplacian 算子的微分方程的研究日益受到人们的重视，但尚未见到相关讨论，本文就讨论具有 p-Laplacian 算子的 semi-positone 问题的非负解. 本文是对 [4] 的推广，使其中的结论成为本节的特例. 同时我们所研究的边界条件的类型也比 [4] 更广泛.

2　主要结果

记 $D=\big\{u\in C[0,1],\ \phi_p(u')\in C[0,1],\ u(0)=a,\ u(1)=b\big\}$，取其上范数为 $\|u\| = \max\limits_{t\in[0,1]}\big\{|u(t)|\big\}$. 显然 D 是线性赋泛空间.

首先建立一个重要引理. 为此先考虑下列系统:

$$\begin{cases} \big(\phi_p(u')\big)' = \mu q(t) F(t,u), & 0<t<1, \\ u(0)=a, \qquad u(1)=b, \end{cases} \tag{E}$$

其中 $a,b\in\mathbb{R}$.

我们有

本文 2001 年 3 月 7 日收到. 2002 年 7 月 10 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (19871005 号)，高教博士点专项基金 (1999000722 号) 资助项目.

引理 1　假设 $F:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数；并且 $q\in C(0,1)$, 在 (0,1) 上 $q>0$, 且 $q\in L^1[0,1]$ 成立．另外，假设存在不依赖于 λ 的常数 $M>0$, 使得对每一个 $\lambda\in[0,1)$, 下列系统

$$\begin{cases} \big(\phi_p(u')\big)' = \lambda\mu q(t)F(t,u), \qquad 0<t<1, \\ u(0)=a, \qquad u(1)=b \end{cases} \tag{E$_\lambda$}$$

的解 $u\in C^1[0,1]$, $\phi_p(u')\in C^1[0,1]$ 都有 $\|u\|\le M$ 成立，则系统 (E) 有解 $u\in C^1[0,1]$, $\phi_p(u')\in C^1[0,1]$.

证　系统 $(\mathrm{E})_\lambda$ 的解等价于寻找 $u\in C^1[0,1]$ 且 $\phi_p(u')\in C^1[0,1]$ 满足

$$u(t)=a+\int_0^t \phi_p^{-1}\Big[\tau+\lambda\mu\int_0^s q(x)F\big(x,u(x)\big)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}s,$$

其中 τ 为方程

$$\int_0^1 \phi_p^{-1}\Big[\tau+\int_0^s \lambda\mu q(x)F\big(x,u(x)\big)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}s=b-a$$

的解．由于 ϕ_p 是单调增加的，从而 ϕ_p^{-1} 也是单调增加的．所以满足上述等式的 τ 是惟一确定的．

定义算子 $N_\lambda:D\to D$ 如下

$$N_\lambda u(t)=a+\int_0^t \phi_p^{-1}\Big[\tau+\lambda\int_0^s \mu q(x)F\big(x,u(x)\big)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}s.$$

因此算子方程 $N_\lambda u=u$ 在 D 中的不动点就是 $(\mathrm{E})_\lambda$ 的解．

以下我们将证明 $N_\lambda:D\to D$ 是全连续的．　N_λ 的连续性显然，故只需证 N_λ 是列紧的．为此，设 $\Omega\subseteq D$ 是有界集，即存在常数 $M_0>0$, 使得 $\|u\|\le M_0$. 由于 $F\in C\big([0,1]\times[-M_0,M_0]\big)$, 因此对任意的 $(t,u)\in[0,1]\times[-M_0,M_0]$, 都有存在 $M_1>0$, 使得 $\big|F(t,u)\big|\le M_1$ 成立．同时又因为 τ 满足方程

$$\int_0^1 \phi_p^{-1}\Big[\tau+\int_0^s \lambda\mu q(x)F\big(x,u(x)\big)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}s=b-a.$$

由积分中值定理，我们有：存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$\phi_p^{-1}\Big[\tau+\int_0^\xi \lambda\mu q(x)F\big(x,u(x)\big)\,\mathrm{d}x\Big]=b-a,$$

推出

$$\tau=\phi_p(b-a)-\int_0^\xi \lambda\mu q(x)F\big(x,u(x)\big)\,\mathrm{d}x,$$

从而就有

$$|\tau|\le\big|\phi_p(b-a)\big|+\mu M_1\int_0^1 q(r)\,\mathrm{d}r:=M_2.$$

故对任意 $u\in\Omega$, 我们就有

$$|N_\lambda u|\le|a|+\int_0^1\Big|\phi_p^{-1}\Big[M_2+\mu M_1\int_0^1 q(r)\,\mathrm{d}r\Big]\Big|\,\mathrm{d}s:=M_3.$$

因此我们得到 $N_\lambda\Omega$ 的有界性.

下面考虑 $u\in\Omega$ 及 $s,t\in[0,1]$, 则因为

$$\begin{aligned}\big|N_\lambda u(t)-N_\lambda u(s)\big|\le&\Big|\int_s^t\phi_p^{-1}\Big(\tau+\int_0^x\mu q(r)F\big(r,u(r)\big)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}x\Big|\\ \le&\phi_p^{-1}\Big(M_2+\mu M_1\int_0^1 q(r)\,\mathrm{d}r\Big)\,|t-s|.\end{aligned}$$

从上面的不等式我们有 $N_\lambda\Omega$ 是等度连续的. 因此由 Arzela-Ascoli 定理，我们有 $N_\lambda: D\to D$ 是全连续的. 令

$$U=\big\{u\in D:|u|_1<(\phi_p^{-1}(M_2)+1)M+2\big\},$$

则对任意 $u\in\partial U$, 我们有 $(I-N_\lambda)(u)\ne 0$, 则由 Leray-Schauder 度理论的同伦不变性，我们有

$$\deg\{I-N_1,U,0\}=\deg\{I-N_0,U,0\}.$$

这里 $N_0=a+\phi_p^{-1}(\tau)t=\theta(t)\big($ 设 $|a|<M+1,\ b<\phi_p^{-1}(M_2)\big)$, 我们有 $|N_0u|<(\phi_p^{-1}(M_2)+1)M+1$, 因此 $N_0u=\theta(t)\in U$, 由度的平移不变性、正规性和可解性就有

$$\deg\{I-N_1,U,0\}=\deg\big\{I,U,\theta(t)\big\}=1\ne 0$$

及 $N_1u=u$ 在 U 中有不动点，即系统 (E) 有解，且满足 $u\in C^1[0,1]$, $\phi_p(u')\in C^1[0,1]$. 证毕.

假设下列条件成立:

(H$_1$) $f\in C\big([0,1]\times(0,\infty),\mathbb{R}\big)$; $\big|f(t,y)\big|\le g(y)+h(y)$, $(t,y)\in[0,1]\times(0,\infty)$, $g\ge 0$ 在 $(0,\infty)$ 上连续单调不增， $h\ge 0$ 在 $[0,\infty)$ 上连续;

(H$_2$) $q\in C(0,1)\cap L^1[0,1]$, 在 (0,1) 上 $q>0$, q 在 [0,1] 上有界;

(H$_3$) $f(t,x)\ge 0$, $t\in[0,1]$, $0\le x\le a$;

(H$_4$) 存在 $a\ge\varepsilon>0$, 使 $\frac{h(x)}{x}$ 在 $(0,\varepsilon)$ 上单调不增，且 $\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x<\infty$;

记: $\mu_0=\dfrac{a^p}{\frac{p}{p-1}\Big[\sup\limits_{t\in[0,1]}q(t)\Big]\int_0^a\Big[g(x)+h(x)\Big]\,\mathrm{d}x}$.

定理 1 假设 (H$_1$)–(H$_4$) 成立，且 $0\le\mu<\mu_0$, 则系统 (1) 有解 $y\in C^1[0,1]$, $\phi_p(y')\in C^1[0,1]$, 且在 [0,1) 上有 $y>0$.

证 固定 $\mu\in(0,\mu_0)$, 选取 $n_0\in\{1,2,\cdots,\}$ 使 $\frac{a}{n_0}<\varepsilon$, 令 $N^+=\{n_0,n_0+1,\cdots,\}$. 为证系统 (1) 有解，先证

$$\begin{cases}\big(\phi_p(y')\big)'=\mu q(t)f(t,y), & 0<t<1,\\ y(0)=a>0, \qquad y(1)=\dfrac{a}{n}.\end{cases}\tag{2^n}$$

对每个 $n\in N^+$ 有解. 为此，考虑

$$\begin{cases}\big(\phi_p(y')\big)'=\mu q(t)f^*(t,y), & 0<t<1,\\ y(0)=a>0, \qquad y(1)=\dfrac{a}{n}, & n\in N^+,\end{cases}\tag{3^n}$$

其中

$$f^*(t,y)=\begin{cases} f(t,a)+y-a, & y>a,\\ f(t,y), & \sigma\le y\le a,\\ \dfrac{y}{\sigma}f(t,\sigma), & 0\le y\le\sigma,\\ y, & y\le 0\end{cases}$$

且

$$\sigma=\min\Big\{\frac{a}{n},a-\Big[\frac{p}{p-1}\mu\Big[\sup_{t\in[0,1]}q(t)\Big]\int_0^a\big[g(x)+h(x)\big]\,\mathrm{d}x\Big]^{\frac1p}\Big\}.$$

为证系统 $(3)^n$ 对每个 $n\in N^+$ 有解，需考虑系统

$$\begin{cases}\big(\phi_p(y')\big)'=\lambda\mu q(t)f^*(t,y), & 0<t<1,\\ y(0)=a>0,\qquad y(1)=\dfrac{a}{n}, & 0<\lambda<1.\end{cases}\tag{$4)^n_\lambda$}$$

第 1 步　证 $(4)^n_\lambda$ 的任何解 $y\in C^1[0,1]$，$\phi_p(y')\in C^1[0,1]$ 满足：

$$y(t)\ge 0,\qquad t\in[0,1].$$

假设 $y(t)\ge 0$, $t\in[0,1]$ 不成立，则存在 $s\in(0,1)$, 使得 $y(s)<0$, 则 y 在某点 $t_0\in(0,1)$ 有负的最小值，使 $y'(t_0)=0$ 且 $y''(t_0)\ge 0$. 一方面，我们有

$$\big(\phi_p(y'(t_0))\big)'=\lambda\mu q(t_0)f^*\big(t_0,y(t_0)\big)=\lambda\mu q(t_0)y(t_0)<0.$$

由于 $\phi_p(y')\in C^1$, 我们知存在 t_0 的某邻域 $N(t_0,\delta_1)$, 使得在此邻域内有 $\big(\phi_p(y'(t))\big)'<0$, 对任意 $t\in N(t_0,\delta_1)$.

另一方面，我们有存在 t_0 的某邻域 (不防设此邻域就为 $N(t_0,\delta_1)$), 使得当 $t<t_0$, $t\in N(t_0,\delta_1)$ 时，有 $y'(t)\le 0$, 当 $t>t_0$, $t\in N(t_0,\delta_1)$ 时，有 $y'(t)\ge 0$. 当然存在 $t_1<t_0$, $t_2>t_0$, $t_1,t_2\in N(t_0,\delta_1)$, 有 $y'(t_1)\le 0$, $y'(t_2)\ge 0$. 就有 $0\le\phi_p\big(y'(t_2)\big)-\phi_p\big(y'(t_1)=\big(\phi_p(y'(\xi))\big)'(t_2-t_1)$, $\xi\in(t_1,t_2)\subset N(t_0,\delta_1)$ 从而有 $\big(\phi_p(y'(\xi))\big)'>0$. 矛盾. 从而 $y(t)\ge 0$, $t\in[0,1]$.

第 2 步　证 $(4)^n_\lambda$ 的任何解 y 有：　$y(t)\le a$, $t\in[0,1]$.

假设 $y(t)\le a$, $t\in[0,1]$ 不成立，则存在 $s\in(0,1)$, 使得 $y(s)>a$, 则 $y-a$ 在 $t_1\in(0,1)$ 有一个正的最大值，因此有 $y'(t_1)=0$, $y''(t_1)\le 0$. 存在 t_1 的某个邻域 $N(t_1,\delta_2)$, 当 $t>t_1$ 时, 有 $y'(t)\le 0$. 当 $t<t_1$ 时, 有 $y'(t)\ge 0$. 故在此邻域内, 存在 $t_3>t_1$, $t_2<t_1$, $t_2,t_3\in N(t_1,\delta_2)$, 有 $y'(t_2)\ge 0$, $y'(t_3)\le 0$, 从而有 $0\ge\phi_p\big(y'(t_3)\big)-\phi_p\big(y'(t_2)\big)=\big(\phi_p(y'(\xi))\big)'(t_3-t_2)$, $\xi\in(t_2,t_3)\subset N(t_1,\delta_2)$, 有 $\big(\phi_p(y'(\xi))\big)'\le 0$. 然而,

$$\big(\phi_p(y'(t_1))\big)'=\lambda\mu q(t_1)\big[f(t_1,a)+y(t_1)-a\big]>0.$$

由于 $\phi_p(y')\in C^1$, 我们知存在 t_1 的某邻域 (不妨设为)$N(t_1,\delta_2)$, 使得在此邻域内有 $\big(\phi_p(y'(t))\big)'>0$, 对任意 $t\in N(t_1,\delta_2)$. 矛盾. 从而对 $(4)^n_\lambda$ 的任何解 y, 有 $y(t)\le a$, $t\in[0,1]$.

由第 1 步，第 2 步知 $(4)^n_\lambda$ 的任何解 y 均满足：

$$0\le y(t)\le a,\qquad t\in[0,1].$$

由引理 1 可知 $(3)^n$ 有解 $y_n \in C^1[0,1]$, $\phi(y_n') \in C^1[0,1]$.

第 3 步 证 y_n 是 $(2)^n$ 的解，即需证： $y_n(t) \geq \sigma$, $t \in [0,1]$, $n \in N^+$.

设不然， y_n 在 $t_2 \in [0,1]$ 处有全局最小值. 若 $t_2 = 1$, 则 $y_n(t) \geq y_n(t_2) = \frac{a}{n} \geq \sigma$; 若 $t_2 = 0$, 则 $y_n(t) \geq y_n(t_2) = a \geq \sigma$; 若 $t_2 \in (0,1)$, 则 $y_n'(t_2) = 0$, 假设 $y_n(t_2) < \sigma$, 则由于 $y_n(0) = a$, 所以存在 $[t_3, t_2] \subseteq [0, t_2]$, 使得 $0 \leq y_n < a$, 在 (t_3, t_2) 上，且 $y(t_3) = a$. 注意到条件 (H_3) 蕴含： $y_n'' \geq 0$, $t \in (t_3, t_2)$. 所以 $y_n' \leq 0$, $t \in (t_3, t_2)$. 以下证明下式成立

$$\big[-y_n'(t)\big]\big(\phi_p(y_n'(t))\big)' \leq \mu q(t)\big[g\big(y_n(t)\big) + h\big(y_n(t)\big)\big]\big[-y_n'(t)\big], \qquad t \in (t_3, t_2). \tag{5}$$

1) 若 $\sigma \leq y_n(t) \leq a$, 则对 $t \in (t_3, t_2)$, 有

$$\begin{aligned}\big(\phi_p(y_n'(t))\big)' =& \lambda\mu q(t) f^*\big(t, y_n(t)\big) = \lambda\mu q(t) f\big(t, y_n(t)\big) \\ \leq& \mu q(t)\big[g\big(y_n(t)\big) + h\big(y_n(t)\big)\big]\end{aligned}$$

成立，即此时 (5) 式成立.

2) 若对某个 $t \in (t_3, t_2)$, 有 $0 \leq y_n(t) \leq \sigma$, 则由条件 (H_4) $(\sigma < \varepsilon)$, 知 $\frac{y_n(t)}{\sigma} \leq 1$, 故有

$$\begin{aligned}\big(\phi_p(y_n'(t))\big)' =& \lambda\mu q(t)\frac{y_n(t)}{\sigma} f(t,\sigma) \leq \mu q(t)\Big(\frac{y_n(t)}{\sigma} g(\sigma) + \frac{y_n(t)}{\sigma} h(\sigma)\Big) \\ \leq& \mu q(t)\Big(\frac{y_n(t)}{\sigma} g\big(y_n(t)\big) + h\big(y_n(t)\big)\Big) \leq \mu q(t)\big(g\big(y_n(t)\big) + h\big(y_n(t)\big)\big),\end{aligned}$$

从而 (5) 式亦成立.

在 (5) 式两边从 t $\big(t \in (t_3, t_2)\big)$ 到 t_2 积分，得

$$\begin{aligned}&-\int_t^{t_2} y_n'(t)\big(\phi_p(y_n'(t))\big)'\,\mathrm{d}t \leq \int_t^{t_2} \mu q(t)\big[g(y_n(t)) + h(y_n(t))\big]\big[-y_n'(t)\big]\,\mathrm{d}t \\ \leq& \mu\Big[\sup_{t\in[0,1]} q(t)\Big]\int_{y_n(t_2)}^{y_n(t)} \big[g(x) + h(x)\big]\,\mathrm{d}x \leq \mu\Big[\sup_{t\in[0,1]} q(t)\Big]\int_0^a \big[g(x) + h(x)\big]\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{6}$$

而

$$-\int_t^{t_2} y_n'(t)\big(\phi_p(y_n'(t))\big)'\,\mathrm{d}t = -\int_t^{t_2} y_n'(t)\,\mathrm{d}\big([\phi_p(y_n'(t))]\big).$$

令 $u = \phi_p\big(y_n'(t)\big)$, 则有

$$\begin{aligned}-\int_t^{t_2} y_n'(t)\,\mathrm{d}\big([\phi_p(y_n'(t))]\big) =& -\int_{\phi_p(y_n'(t))}^{\phi_p(y_n'(t_2))} \phi_p^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{|y_n'(t)|^{p-2}y_n'(t)} u^{\frac{1}{p-1}}\,\mathrm{d}u \\ =& \frac{p-1}{p} u^{\frac{p}{p-1}}\Big|_0^{|y_n'(t)|^{p-2}y_n'(t)} = \frac{p-1}{p}\big(-y_n'(t)\big)^p.\end{aligned}$$

结合 (6) 式，有

$$\big(-y_n'(t)\big)^p \leq \frac{p}{p-1}\mu\Big[\sup_{t\in[0,1]} q(t)\Big]\int_0^a \big[g(x) + h(x)\big]\,\mathrm{d}x, \qquad t \in (t_3, t_2).$$

推出

$$-y_n'(t) \leq \Big\{\mu\frac{p}{p-1}\Big[\sup_{t\in[0,1]} q(t)\Big]\int_0^a \big[g(x) + h(x)\big]\,\mathrm{d}x\Big\}^{\frac{1}{p}}, \qquad t \in (t_3, t_2).$$

从 t_3 到 t_2 积分得

$$-y_n(t_2)+a\le\Big\{\mu\frac{p}{p-1}\Big[\sup_{t\in[0,1]}q(t)\Big]\int_0^a\big[g(x)+h(x)\big]\,\mathrm{d}x\Big\}^{\frac{1}{p}}.$$

推出

$$\sigma>y_n(t_2)\ge a-\Big\{\mu\frac{p}{p-1}\Big[\sup_{t\in[0,1]}q(t)\Big]\int_0^a\big[g(x)+h(x)\big]\,\mathrm{d}x\Big\}^{\frac{1}{p}}\ge\sigma,$$

矛盾. 这样 $y_n(t_2)\ge\sigma$, 因此有 $y_n(t)\ge\sigma$, $t\in[0,1]$, $n\in N^+$. 因此 y_n 就是系统 $(2)^n$ 的解，且 $\sigma\le y_n(t)\le a$, $t\in[0,1]$.

第 4 步　证明存在常数 A (独立于 n), 使 $y_n(t)\ge A(1-t)$, 对 $t\in[0,1]$, n 充分大.

为此，先证存在 $n_1\ge n_0$, 使得当 $n\ge n_1$, $t\in(0,1)$ 时，有 $y_n'(t)\le 0$. 由于对固定的 $0<\mu<\mu_0$, 存在 $\delta>0$, 使得 (由 μ_0 的定义)

$$\frac{p}{p-1}\mu\Big[\sup_{t\in[0,1]}q(t)\Big]\int_0^a\big[g(x)+h(x)\big]\,\mathrm{d}x=a^p-\delta.$$

注意到对 $t\in[0,1]$, 有

$$\sigma\le y_n(t)\le a.$$

(H_3) 意味着 $y_n''(t)\ge 0$, $t\in(0,1)$. 假设对任意 $t\in(0,1)$, $y_n'(t)\le 0$ 不成立，则必存在 $t_4\in(0,1)$, 使得在 $(0,t_4)$ 上，有 $y_n'(t)\le 0$, 在 $(t_4,1)$ 上，有 $y_n'(t)\ge 0$. 另外还有

$$\begin{aligned}&\big[-y_n'(t)\big]\big(\phi_p(y_n'(t))\big)'\le\mu q(t)\big[g(y_n(t))+h(y_n(t))\big]\big[-y_n'(t)\big],\qquad t\in(0,t_4),\\&\big[-y_n'(t)\big]^p\le\frac{p}{p-1}\mu\Big[\sup_{t\in[0,1]}q(t)\Big]\int_0^a\big[g(x)+h(x)\big]\,\mathrm{d}x=a^p-\delta,\\&\big|y_n'(t)\big|\le[a^p-\delta]^{\frac{1}{p}},\qquad t\in(0,t_4),\end{aligned}$$

同样可证

$$\big|y_n'(t)\big|\le[a^p-\delta]^{\frac{1}{p}},\qquad t\in(t_4,1).$$

因此有

$$\big|y_n'(t)\big|\le[a^p-\delta]^{\frac{1}{p}},\qquad t\in(0,1).\tag{7}$$

另一方面，由拉格朗日中值定理有，存在 $\eta_n\in(0,1)$, 使得

$$y_n'(\eta_n)=\frac{a}{n}-a.$$

推出

$$\big|y_n'(\eta_n)\big|=a-\frac{a}{n},$$

与 (7) 式矛盾 (当 n 充分大时). 这样，就证明了存在 $n_1\ge n_0$, 当 $n\ge n_1$ 时，对 $t\in[0,1)$, 有 $y_n'(t)\le 0$. 另外，当 $n\ge n_1$ 时，有

$$-y_n'(t)\big[\phi_p(y_n'(t))\big]'\le\mu q(t)\big[g(y_n(t))+h(y_n(t))\big]\big[-y_n'(t)\big],\qquad t\in[0,1).$$

从 η_n 到 1 积分得

$$\frac{p-1}{p}\left\{|y_n'(\eta_n)|^p-|y_n'(1)|^p\right\}\le\mu\Big[\sup_{t\in[0,1]}q(t)\Big]\int_0^a\big[g(x)+h(x)\big]\,\mathrm{d}x=\frac{(p-1)(a^p-\delta)}{p}.$$

推出

$$\big(-y_n'(1)\big)^p\ge\Big(a-\frac{a}{n}\Big)^p-(a^p-\delta).$$

推出存在 $n_2\ge n_1$, 使得当 $n\ge n_2$ 时，有

$$\big(-y_n'(1)\big)^p\ge\frac{\delta}{2^p},$$

即 $-y_n'(1)\ge\frac{\delta^{\frac{1}{p}}}{2}$, 这样，因为当 $n\ge n_2$ 时，有 $y_n''\ge0$, $y_n'\le0$, 所以有 $-y_n'(t)\ge\frac{\delta^{\frac{1}{p}}}{2}$, 对 $t\in(0,1)$, 当 $n\ge n_2$. 因此取 $A=\frac{\delta^{\frac{1}{p}}}{2}$, 有 $y_n(t)\ge\frac{\delta^{\frac{1}{p}}}{2}(1-t)$, 对 $t\in[0,1]$, 当 $n\ge n_2$ 时.

现在令 $N^*=\{n_2,n_2+1,\cdots,\}$, 及 $n\in N^*$, 有

$$\frac{\delta^{\frac{1}{p}}}{2}(1-t)\le y_n(t)\le a,\qquad t\in[0,1].\tag{8}$$

另外，对 $n\in N^*$, 有

$$\big|\big(\phi_p(y_n'(t))\big)'\big|\le\mu\Big[\sup_{t\in[0,1]}q(t)\Big]\Big\{g\Big(\frac{\delta^{\frac{1}{p}}}{2}(1-t)+M_0\Big\},\qquad t\in(0,1),$$

其中 $M_0=\sup\limits_{u\in[0,a]}h(u)$, 以上就意味着 $\{y_n\}_{n\in N^*}$, $\big\{\phi_p(y_n')\big\}_{n\in N^*}$ 在 $[0,1]$ 上一致有界，等度连续，由 Arzela-Ascoli 定理，存在 $S\subset N^*$ 及函数 $y\in C^1[0,1]$, $\phi_p(y')\in C^1[0,1]$, 使得 $n\to\infty$, $n\in S$ 时，在 $[0,1]$ 上一致地有 $y_n\to y$, $\phi_p(y_n)\to\phi_p(y)$. 显然 $y>0$, 在 $[0,1]$ 上 (因为由 (8) 有 $y(t)\ge\frac{\delta^{\frac{1}{p}}}{2}(1-t)$, $t\in[0,1)$), 且有 $y(1)=0$, $y(0)=a$. 又当 $n\in S$ 时， y_n 满足积分方程

$$y_n(t)=a+\int_0^t\phi_p^{-1}\Big[\phi_p\big(y_n'(0)\big)+\int_0^s\mu q(x)f\big(x,y_n(x)\big)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}s.$$

固定 $t\in(0,1)$, 令 $n\to\infty$, $n\in S$, 得

$$y(t)=a+\int_0^t\phi_p^{-1}\Big[\phi_p\big(y'(0)\big)+\int_0^s\mu q(x)f\big(x,y(x)\big)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}s.$$

这说明 $y(t)$ 是满足定理 1 的条件的解. 证毕.

注 在此定理中，若令 $p=2$, 即为 [4] 中定理 2.1 的结果.

例 考虑 BVP

$$\begin{cases}\big[\phi_p(y'(t))\big]'=\mu\big(\big[y(t)\big]^{-\alpha}+\big[y(t)\big]^{\beta}+1\big), & 0<t<1,\\ y(0)=a>0,\qquad y(1)=0\end{cases}\tag{9}$$

且 $0<\alpha<1$, $\beta\geq 0$,

$$0<\mu<\frac{(p-1)(\beta+1)(1-\alpha)a^p}{p\big[(\beta+1)a^{1-\alpha}+(1-\alpha)a^{\beta+1}+(1-\alpha)(\beta+1)a\big]},$$

则 BVP(9) 有解 $y\in C^1[0,1]$, $\phi_p(y')\in C^1[0,1]$, 且在 $[0,1)$ 上 $y>0$.

证　显然 $\big|f(t,y)\big|\leq |y|^{-\alpha}+|y|^{\beta}+1$, 令 $g(y)=y^{-\alpha}$, $h(y)=y^{\beta}+1$, $q(t)=1$. 显然 (H_1)–(H_4) 满足，故由定理 1 知结论成立.

考虑边值问题：

$$\begin{cases}\big(\phi_p(y'(t))\big)'=\mu q(t)f\big(t,y(t)\big), & 0<t<1,\\ y(0)=0, \qquad y(1)=a>0\end{cases}\tag{10}$$

有

定理 2　若 (H_1)–(H_4) 成立，且 $0\leq\mu<\mu_0$, 则系统 (10) 有解 $y\in C^1[0,1]$, $\phi_p(y')\in C^1[0,1]$, 且在 $(0,1]$ 上有 $y>0$.

证　作变换，令 $t=1-s$, 并记 $y(t)=y(1-s)=u(s)$, 则有 $y'(t)=-y'_s(1-s)=u'(s)$, 且系统 (10) 变为

$$\begin{cases}\big(\phi_p(u'(s))\big)'=\mu q^*(s)f^*\big(s,u(s)\big), & 0<s<1,\\ u(0)=a>0, \qquad u(1)=0,\end{cases}\tag{11}$$

其中 $q^*(s)=q(1-s)$, $f^*\big(s,u(s)\big)=f\big(1-s,y(1-s)\big)$. 易验证对系统 (11) 条件 (H_1)–(H_4) 成立，由定理 1 知定理 2 结论成立.

下面讨论更一般的问题：

$$\begin{cases}\big(\phi_p(y'(t))\big)'=\mu q(t)f\big(t,y(t),y'(t)\big), & 0<t<1,\\ y(0)=a>0, \qquad y(1)=0.\end{cases}\tag{12}$$

假设：

(G_1) $f\in C\big([0,1]\times(0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R}\big)$; $\big|f(t,y,v)\big|\leq\big[g(y)+h(y)\big]\psi\big(|v|\big)$, 在 $[0,1]\times(0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上，且 $g\geq 0$ 在 $(0,\infty)$ 连续单调不增， $h\geq 0$ 在 $[0,\infty)$ 上连续， $\psi>0$ 在 $[0,\infty)$ 上连续.

(G_2)　$q\in C(0,1)\cap L^1[0,1]$, 在 $(0,1)$ 上 $q>0$, q 在 $[0,1]$ 上有界；

(G_3)　$f(t,y,v)\geq 0$, $t\in[0,1]$, $0\leq y\leq a$, $v\in\mathbb{R}$.

(G_4)　存在 $\varepsilon>0$, $\frac{h(x)}{x}$ 在 $(0,\varepsilon)$ 上非增，且 $\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x<\infty$.

(G_5)　$I(z)=\int_0^z\frac{\phi_p^{-1}(u)}{\psi(\phi_p^{-1}(u))}\,\mathrm{d}u$, $z\geq 0$.

记

$$\mu_0=\frac{I(a^{p-1})}{\frac{p}{p-1}\Big[\sup\limits_{t\in[0,1]}q(t)\Big]\int_0^a\big[g(x)+h(x)\big]\,\mathrm{d}x}.$$

定理 3　假设条件 (G_1)–(G_5) 成立，且 $0<\gamma<\mu_0$, 则

$$\frac{p}{p-1}\gamma\Big[\sup_{t\in[0,1]}q(t)\Big]\int_0^a\big[g(x)+h(x)\big]\,\mathrm{d}x\in\mathrm{dom}\,(I^{-1}).$$

若 $0\leq\mu<\mu_0$, 则系统 (12) 有解 $y\in C^1[0,1]$, $\phi_p(y')\in C^1[0,1]$, 且在 $[0,1)$ 上 $y>0$.

注 在定理 3 的证明中只需取

$$\sigma=\min\Big\{\frac{a}{n},a-\phi_p^{-1}\Big[I^{-1}\Big(\frac{p}{p-1}\Big[\sup_{t\in[0,1]}q(t)\Big]\int_0^a\big[g(x)+h(x)\big]\,\mathrm{d}x\Big)\Big]\Big\}$$

即可.

注 定理 3 是 [4] 中定理 2.2 的直接推广.

对边值问题:

$$\begin{cases}\big(\phi_p(y'(t))\big)'=\mu q(t)f\big(t,y(t),y'(t)\big), & 0<t<1,\\ y(0)=0, \qquad y(1)=a>0\end{cases}\tag{13}$$

有

定理 4 若条件 (G_1)–(G_5) 成立, 且 $0<\gamma<\mu_0$, 则

$$\frac{p}{p-1}\gamma\Big[\sup_{t\in[0,1]}q(t)\Big]\int_0^a\big[g(x)+h(x)\big]\,\mathrm{d}x\in\mathrm{dom}\,(I^{-1}).$$

若 $0\le\mu<\mu_0$, 则系统 (13) 有解 $y\in C^1[0,1]$, $\phi_p(y')\in C^1[0,1]$, 且在 $(0,1]$ 上 $y>0$.

注 定理 2, 定理 4 是 [4] 所没有的.

参 考 文 献

1 Gatica J A, Oliker V, Waltman P. Singuler Nonlinear Boundray Value Problems for Second Order Differential Equations. *J. D. E.*, 1989, 79: 62–78

2 O'Regan Donal. Existence Theory for Nonlinear Ordinary Differential Equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997

3 O'Regan D. Theory of Singular Boundary Value Problems. Singapore: World Scientific Press, 1994

4 Agarwal Ravi P, O'Regan D. A Note on Existence of Nonnegative Solutions to Singular Semi-positone Problems. *Nonlinear Analysis*, 1999, 36: 615–622

EXISTENCE OF NONNEGATIVE SOLUTIONS TO SINGULAR SEMI-POSITONE PROBLEMS WITH p-LAPLACIAN

LI Cuizhe GE Weigao

(*Department of Applied Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081)

Abstract By using a direct analysis technique, the existence of nonnegative solutions was established for singular semi-positone problems with p-Laplacian.

Key words Semi-positone, singular boundary value problem, p-Laplacian, nonnegative solutions