第 26 卷 第 3 期 应用数学学报 Vol. 26 No. 3
2003 年 7 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA July, 2003

一维 P-Laplacian 方程正解的三解定理 *

贺小明
(中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100080)

葛渭高
(北京理工大学应用数学系, 北京 100081)

摘 要 本文应用 Leggett-Williams 不动点定理, 研究具有 P-Laplacian 算子的非线性边值问题 $(\varphi(u'))'+a(t)f(u)=0,\ \alpha\varphi(u(0))-\beta\varphi(u'(0))=0,\ \gamma\varphi(u(1))+\delta\varphi(u'(1))=0$ 正解的存在性, 其中 $\varphi(s):=|s|^{p-2}s,\ p>1$. 我们建立了该问题至少存在三个正解的充分条件.

关键词 P-Laplacian 边值问题, 正解, 锥, Leggett-Williams 不动点定理

1 引言

本文考虑如下 P-Laplacian 边值问题

$$\big(\varphi(u')\big)'+a(t)f(u)=0,\qquad 0<t<1, \tag{1}$$
$$\alpha\varphi\big(u(0)\big)-\beta\varphi\big(u'(0)\big)=0,\qquad \gamma\varphi\big(u(1)\big)+\delta\varphi\big(u'(1)\big)=0 \tag{2}$$

正解的存在性, 其中 $\varphi(s):=|s|^{P-2}s,\ P>1$. 全文总设

(A) $\alpha>0,\ \beta\geq 0,\ \gamma>0,\ \delta\geq 0$;

(B) $f\in C\big([0,\infty),[0,\infty)\big)$;

(C) $a\in C\big([0,1],[0,\infty)\big)$ 且 $a(t)$ 在 (0, 1) 的任何子区间上不恒为零.

关于方程 (1) 在满足 Dirichlet 边值条件 $u(0)=0=u(1)$ 之下正解的存在性, 已有一些结果, 参见 [1–5] 及相关文献. 主要是通过使用 Leray-Schauder 非线性抉择 [2,3] 及上下解方法 [3] 建立的. 1997 年, 王俊禹在 [1] 中讨论了方程 (1) 在满足边值条件

$$u(0)-B_0\big(u'(0)\big)=0,\qquad u(1)+B_2\big(u'(1)\big)=0, \tag{3}$$

时正解的存在性. 其中 $B_i(v),\ i=0,1$, 都是非减的奇函数, 且存在常数 $m>0$ 使得 $B_i(v)\leq mv$, 对于所有 $v\geq 0,\ i=0$, 或 $i=1$ 成立. 在 f 是超线性, 即 $f_0=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(u)}{u^{p-1}}=0,\ f_\infty=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(u)}{u^{p-1}}=+\infty$ 和次线性, 即 $f_0=+\infty,\ f_\infty=0$ 两种情形之下, Wang[1] 利用正解的凹性和 Kransnoselskii 不动点定理, 建立了问题 (1), (3) 存在正解的充分条件.

本文 2001 年 4 月 20 日收到.
* 国家自然科学基金 (19871005) 和教育部博士点专项基金 (1999000722) 资助项目.

最近，孙伟平和葛渭高在 [4] 中讨论了方程 (1) 在满足边值条件

$$\alpha u(0)-\beta u'(0)=0,\qquad \gamma u(1)+\delta u'(1)=0 \tag{4}$$

时正解的存在性. 取消了 f 是超线性和次线性的限制，主要方法是应用锥不动点指标定理 [4]. 易见边值条件 (4) 是 (2) 的特殊情形.

本文的方法不同于以上文献，我们利用凹函数的性质及 Leggett-Williams 不动点定理，建立了 (1), (2) 存在至少三个正解的充分条件. 近来，这个不动点定理已被用来证明二阶和高阶常微分方程边值问题三解的存在性，例如 [6–8]. 但用此方法讨论边值问题 (1), (2) 正解的存在性，迄今尚未见到任何结果.

2　预备知识

本节我们先介绍一些锥理论的基本概念和记号，先叙述锥的定义.

定义 2.1　设 $E=\big(E,\|\cdot\|\big)$ 是一个 Banach 空间，　$P\subset E$ 非空，且满足

(i)　$\alpha u+\beta v\in P$, 对 $\forall u,v\in P$, $\alpha,\beta\ge 0$ 成立,

(ii)　如果 $-u,u\in P$, 必有 $u=0$,

则称 P 是 E 中一个锥.

定义 2.2　称映射 ψ 是一个锥 P 上的非负连续凹泛函，如果满足 $\psi:P\to[0,\infty)$ 是连续的且

$$\psi\big(tu+(1-t)v\big)\ge t\psi(u)+(1-t)\psi(v)$$

对于 $\forall u,v\in P$ 和 $0\le t\le 1$ 成立.

由锥 P 及凹泛函 ψ 的定义，我们引入下面的记号. 令 $0<a<b$, $r>0$. 定义 $P_r=\big\{u\in P\big|\|u\|<r\big\}$, 以及 $P(\psi,a,b)=\big\{u\in P\big|a\le\psi(u),\|u\|\le r\big\}$.

下面我们叙述 Leggett-Williams 不动点定理 [6], 这是本文主要结果的理论依据.

引理 2.1[6−8]　设 $T:\overline{P}_c\to\overline{P}_c$ 是全连续的且 ψ 是 P 上的非负连续凹泛函，满足 $\psi(u)\le\|u\|$, $\forall u\in\overline{P}_c$. 又设存在常数 $0<a<b<d\le c$ 使得下面的条件成立：

(C1)　$\big\{u\in P(\psi,b,d)\big|\psi(u)>b\big\}\ne\emptyset$, 且 $\psi(Tu)>b$, 对于 $\forall u\in P(\psi,b,d)$;

(C2)　$\|Tu\|<a$, 当 $\|u\|\le a$;

(C3)　$\psi(Tu)>b$, 对于 $u\in P(\psi,b,c)$ 且 $\|Tu\|>d$.

那么 T 至少存在三个不动点 u_1,u_2 和 u_3 满足

$$\|u_1\|<a, b<\psi(u_2),\qquad \|u_3\|>a\ \text{ 且 } \psi(u_3)<b.$$

3　三个正解的存在性

由 (C) 可知，存在常数 $\eta\in(0,\frac{1}{2})$ 使得

$$0<\int_\eta^{1-\eta}a(t)\,\mathrm{d}t<\infty. \tag{5}$$

因此函数

$$L(x):=G\Big(\int_\eta^x a(t)\,\mathrm{d}t\Big)+G\Big(\int_x^{1-\eta} a(t)\,\mathrm{d}t\Big)$$

在 $[\eta,1-\eta]$ 上是非负连续的，其中 $G(v):=|v|^{\frac{1}{p-1}}\operatorname{sgn} v$ 是 φ 的反函数. 为方便，记 $L=\min\limits_{\eta\le x\le 1-\eta} L(x)$, $\lambda=G\big(\frac{\beta}{\alpha}\int_0^1 a(r)\,\mathrm{d}r\big)+\int_0^1 G\big(\int_s^1 a(r)\,\mathrm{d}r\big)\,\mathrm{d}s$.

设 $E=C[0,1]$ 被赋予模 $\|u\|=\sup\limits_{0\le t\le 1}\big|u(t)\big|$, $u\in P$, 则 E 为 Banach 空间. 定义锥 $P\subset E$ 为

$$P=\big\{u\in E\big|u \text{ 是 } [0,1] \text{ 上的非负凹函数}\big\}.$$

由锥 P 的定义可得下面的结论

引理 3.1[1] 令 $u\in P$, $\eta\in(0,1/2)$ 则有

(i) $u(t)\ge\eta\|u\|$, 对 $\forall\, t\in[\eta,1-\eta]$,

(ii) $u(t)\ge\begin{cases}\|u\|t/\sigma, & 0\le t\le\sigma,\\ \|u\|\,(1-t)/(1-\sigma), & \sigma\le t\le 1,\end{cases}$

其中 η 如 (5) 中所定义，常数 $\sigma\in[0,1]$ 满足 $u(\sigma)=\|u\|$.

最后，我们定义非负连续凹泛函 $\psi:P\to[0,\infty)$ 为

$$\psi(u)=\frac{u(\eta)+u(1-\eta)}{2},\qquad \forall\, u\in P.$$

易见 $\psi(u)\le\|u\|$, 对 $\forall\, u\in P$.

本文的主要结论如下:

定理 3.1 假设存在常数 $0<a<\eta b<b<d$ 使得下列条件成立:

(H1) $f(w)<\varphi(\frac{a}{\lambda})$, 对 $0\le w\le a$;

(H2) 下列情形之一满足

(i) $\limsup\limits_{w\to\infty}\frac{f(w)}{w^{p-1}}<\varphi(1/\lambda)$;

(ii) 存在一个常数 $q>d$ 使得

$$f(w)\le\varphi(q/\lambda),\qquad \text{当 } 0\le w\le q;$$

(H3) $f(w)>\varphi(2b/\eta L)$, 当 $\eta b\le w\le d$.

那么边值问题 (1), (2) 至少存在三个正解 u_1,u_2, 和 u_3 满足

$$\|u_1\|<a,\qquad \psi(u_2)>b,\qquad \|u_3\|>a\qquad \text{且}\qquad \psi(u_3)<b.$$

证 我们定义映射 $T:P\to E$ 为

$$W(t)=(Tu)(t):=\begin{cases}G\Big(\dfrac{\beta}{\alpha}\displaystyle\int_0^\sigma a(r)f\big(u(r)\big)\,\mathrm{d}r\Big)+\displaystyle\int_0^t G\Big(\int_s^\sigma a(r)f\big(u(r)\big)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s,\\ \qquad \text{当 } 0\le t\le\sigma,\\ G\Big(\dfrac{\delta}{\gamma}\displaystyle\int_\sigma^1 a(r)f\big(u(r)\big)\,\mathrm{d}r\Big)+\displaystyle\int_t^1 G\Big(\int_\sigma^s a(r)f\big(u(r)\big)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s,\\ \qquad \text{当 } \sigma\le t\le 1,\end{cases}\tag{6}$$

由 T 的定义及 (A)–(C), 按 [1] 的步骤易证 $T(P)\subset P$, $W(\sigma)=\|Tu\|$, 且 T 是全连续映射， T 在 P 中的每一个不动点，就是 (1), (2) 的正解 (参见 [1]).

下面我们验证引理 2.1 的所有条件都满足．首先，我们证明由 (H2) 蕴含着存在一个常数 $c(>d)$ 使得

$$T:\overline{P}_c\to\overline{P}_c. \tag{7}$$

假设 (H2) 中的 (ii) 成立，那么对于 $\forall\, u\in\overline{P_q}$, 有

$$\begin{aligned}\|W\| =&W(\sigma)\le G\Big(\frac{\beta}{\alpha}\int_0^\sigma a(r)\,\mathrm{d}r\cdot\varphi(q/\lambda)\Big)+\int_0^\sigma G\Big(\int_s^\sigma a(r)\,\mathrm{d}r\cdot\varphi(q/\lambda)\Big)\,\mathrm{d}s\\ \le&\frac{q}{\lambda}\Big[G\Big(\frac{\beta}{\alpha}\int_0^1 a(r)\,\mathrm{d}r\Big)+\int_0^1 G\Big(\int_s^1 a(r)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s\Big]=\frac{q}{\lambda}\lambda=q.\end{aligned}$$

因此当 $c=q$ 时 (7) 式成立．若设 (H2) 中的 (i) 成立，则存在 $D>0$ 和 $\varepsilon<\varphi(1/\lambda)$ 使得

$$\frac{f(w)}{w^{p-1}}\le\varepsilon,\qquad \text{当 } w\ge D. \tag{8}$$

记 $M=\max\big\{f(w)\big|0\le w\le D\big\}$, 则由 (8) 可得

$$f(w)\le M+\varepsilon w^{p-1},\qquad \text{对于 } w\ge 0. \tag{9}$$

现在我们选取常数 $c>0$ 满足

$$\varphi(c)>\max\big\{\varphi(d),\ M(\varphi(1/\lambda)-\varepsilon)^{-1}\big\}. \tag{10}$$

那么，对 $\forall\, u\in\overline{P_c}$, 由 (9), (10) 可得

$$\begin{aligned}\|Tu\| \le&G\Big(\frac{\beta}{\alpha}\int_0^\sigma a(r)\big(M+\varepsilon(u(r))^{p-1}\big)\,\mathrm{d}r\Big)\\ &+\int_0^\sigma G\Big(\int_s^\sigma a(r)\big(M+\varepsilon(u(r))^{p-1}\big)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s\\ \le&\Big[G\Big(\frac{\beta}{\alpha}\int_0^1 a(r)\,\mathrm{d}r\Big)+\int_0^1 G\Big(\int_s^1 a(r)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s\Big]G\big(\varepsilon c^{p-1}+\varphi(c)\big(\varphi(1/\lambda)-\varepsilon\big)\big)\\ =&\lambda\frac{c}{\lambda}=c.\end{aligned}$$

所以 (7) 式成立. 特别地, 如取 $u\in\overline{P}_a$, 则由 (H1) 和上面的讨论, 我们推得 $\|Tu\|<a$. 从而引理 2.1 中的条件 (C2) 满足.

我们接着验证引理 2.1 中的 (C1). 易见 $u(t)\equiv\frac{b+d}{2}(>b)$ 是 $P(\psi,b,d)$ 中的一元素，且 $\psi(u)=\psi\big(\frac{b+d}{2}\big)>b$, 因此 $\big\{u\in P(\psi,b,d)\big|\psi(u)>b\big\}\neq\emptyset$. 当取 $u\in P(\psi,b,d)$ 时，那么 $\psi(u)=\big(u(\eta)+u(1-\eta)\big)/2\ge b$, 故 $b\le\|u\|\le d$. 再由引理 3.1 中的 (i), 可知 $\eta b\le\eta\|u\|\le u(s)\le d,\ s\in[\eta,1-\eta]$. 由 (H3) 知 $f\big(u(s)\big)>\varphi(2b/\eta L)$, 对于 $\eta b\le u(s)\le d,\ \eta\le s\le 1-\eta$. 下面我们分 (a) $\sigma<\eta$, (b) $\sigma>1-\eta$ 和 (c) $\sigma\in[\eta,1-\eta]$ 三种情形分别加以讨论.

若情形 (a) 发生，则有

$$\begin{aligned}\psi(Tu) =&\big(Tu(\eta)+Tu(1-\eta)\big)/2\ge Tu(1-\eta)\ge\int_{1-\eta}^1 G\Big(\int_\sigma^s a(r)f\big(u(r)\big)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s\\ \ge&\int_{1-\eta}^1 G\Big(\int_\eta^{1-\eta} a(r)f\big(u(r)\big)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s>\eta G\Big(\int_\eta^{1-\eta} a(r)\varphi(2b/\eta L)\,\mathrm{d}r\Big)\end{aligned}$$

$$=\eta G\Big(\int_{\eta}^{1-\eta} a(r)\,\mathrm{d}r\Big)\frac{2b}{\eta L} \ge 2b > b.$$

若情形 (b) 发生，则有

$$\psi(Tu) = \big(Tu(\eta) + Tu(1-\eta)\big) \ge Tu(\eta) \ge \int_0^{\eta} G\Big(\int_s^{\sigma} a(r) f\big(u(r)\big)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s$$
$$\ge \int_0^{\eta} G\Big(\int_{\eta}^{1-\eta} a(r) f\big(u(r)\big)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s > \eta G\Big(\int_{\eta}^{1-\eta} a(r)\varphi(2b/\eta L)\,\mathrm{d}r\Big) \ge 2b > b.$$

若情形 (c) 发生，则有

$$\begin{aligned}2\psi(Tu) =& Tu(\eta) + Tu(1-\eta)\\
&\ge \int_0^{\eta} G\Big(\int_s^{\sigma} a(r) f\big(u(r)\big)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s + \int_{1-\eta}^{1} G\Big(\int_{\sigma}^{s} a(r) f\big(u(r)\big)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s\\
&\ge \eta\Big[G\Big(\int_{\eta}^{\sigma} a(r) f\big(u(r)\big)\,\mathrm{d}r\Big) + G\Big(\int_{\sigma}^{1-\eta} a(r) f\big(u(r)\big)\,\mathrm{d}r\Big)\Big]\\
&> \eta\Big[G\Big(\int_{\eta}^{\sigma} a(r)\varphi(2b/\eta L)\,\mathrm{d}r\Big) + G\Big(\int_{\sigma}^{1-\eta} a(r)\varphi(2b/\eta L)\,\mathrm{d}r\Big)\Big]\\
&\ge \eta\Big[G\Big(\int_{\eta}^{\sigma} a(r)\,\mathrm{d}r\Big) + G\Big(\int_{\sigma}^{1-\eta} a(r)\,\mathrm{d}r\Big)\Big]\frac{2b}{\eta L} \ge 2b.\end{aligned}$$

所以，对于 $\forall u \in P(\psi, b, d)$ 有 $\psi(Tu) > b$, 从而引理 2.1 的 (C1) 成立．最后，我们验证引理 2.1 的 (C3) 成立．为此，我们取 $d \ge b/\eta$, 设 $u \in P(\psi, b, c)$ 满足 $\|Tu\| > d$. 那么由引理 3.1 可得

$$\psi(Tu) = \big(Tu(\eta) + Tu(1-\eta)\big)/2 \ge \eta\|Tu\| > \eta d \ge b.$$

从而引理 2.1 中的 (C3) 亦成立．所以由引理 2.1 知定理 3.1 成立．证毕.

由定理 3.1 我们看到, 当形如 (H1)–(H3) 的假设适度地加之于 f, 可以得到问题 (1), (2) 存在更多的正解，具体地说，我们有下面的结论

定理 3.2 设存在常数 $0 < a_1 < \eta b_1 < b_1 < d_1 < a_2 < \eta b_2 < b_2 < d_2 < \cdots < a_n,\ n \in N$, 使得下列条件成立

(S1) $f(w) < \varphi(a_i/\lambda),\ 0 \le w \le a_i,\ 1 \le i \le n$,

(S2) $f(w) > \varphi(2b_i/\eta L),\ \eta b_i \le w \le d_i,\ 1 \le i \le n-1$,

那么问题 (1), (2) 至少存在 $2n-1$ 个正解.

证 用归纳法．当 $n = 1$ 时，由定理 3.1 的证明及 (S1) 可知 $T : \overline{P}_{a_1} \to P_{a_1} \subset \overline{P_{a_1}}$, 又 T 是全连续的, 所以由 Schauder 不动点定理知 T 在 $\overline{P}_{a_1}$ 至少存在一个不动点 $u_1 \in \overline{P}_{a_1}$.

当 $n = 2$ 时, 我们由 (S1) 和 (S2) 知定理 3.1 成立 (相当于 $a = a_1,\ b = b_1,\ d = d_1,\ q = a_2$), 故我们至少可得三个正解 u_1, u_2, 和 u_3 满足 $\|u_1\| < a_1,\ \psi(u_2) > b_1,\ \|u_3\| > a_1$ 且 $\psi(u_3) < b_1$. 照此步骤进行下去，由归纳法原理知定理 3.2 成立.

最后，我们举一个例子来说明本文的主要结果.

例 在边值问题 (1), (2) 中，若设 $p = 3,\ \alpha = \gamma = \delta = 1,\ \beta = 0,\ \eta = \frac{1}{4},\ a(t) = 2t$, 且

$$f(u) = \begin{cases} u^2, & \le u \le 1,\\ 8192u - 8191, & u \ge 1,\end{cases}$$

则 (1), (2) 至少存在三个正解.

证 易见条件 (A)–(C) 满足．我们做一些简单的计算得到

$$\lambda = \int_0^1 G\Big(\int_s^1 2r\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (1-s^2)^{\frac12}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{4},$$
$$L = \min_{1/4\le x\le 3/4} (x^2-1/16)^{\frac12} + (9/16-x^2)^{\frac12} = L(1/4) = L(3/4) = \sqrt{2}/2.$$

现取 $a=1,\ b=8,\ d=50$, 那么有

$$f(u) = u^2 < \varphi(4/\pi) = \frac{16}{\pi^2}, \qquad \text{对 } 0\le u\le 1 \text{ 成立},$$
$$f(u) = 8192u - 8191 > 8192 = \varphi\left(\frac{2b}{\eta L}\right), \qquad \text{对 } 2\le u\le 50,$$

并且

$$\lim\sup_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u^2} = 0 < \varphi(1/\lambda) = \frac{16}{\pi^2},$$

这就是说定理 3.1 中的 (H1), (H2) 中的 (i) 和 (H3) 满足，故由定理 3.1 知本例至少存在三个正解 u_1, u_2 和 u_3 满足

$$\|u_1\| < 1, \qquad \psi(u_2) > 8, \qquad \|u_3\| > 1 \qquad \text{且} \qquad \psi(u_3) < 8.$$

证毕.

注 在本例中，易见 f 即非超线性的，也非次线形的 (在 $u=0$ 和 $u=+\infty$), 故 [1,4,5] 的主要结论是无法判断本例是否存在正解的.

参 考 文 献

1 Wang Junyu. The Existence of Positive Solutions for the One-dimensional p -Laplacian. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 1997, 125: 2275–2283

2 Yang Zuodong. Existence of Positive Solutions to a Nonlinear Singular Two-point Boundary Value Problem. *Apllied Mathematics and Mechanics*, 1996, 17(5): 445–454 (in Chinese)

3 Yao Qingliu, Lu Haishen. Positive Solutions for a Singular Equation of the One-dimensional P-Laplacian. *Acta Mathematica Sinica*, 1998, 14(6): 1255–1264 (in Chinese)

4 Sun Weiping, Ge Weigao. On the Existence of Positive Solutions for a Nonlinear System with p-Laplacian Operator. *Acta Math. Sinica*, 2001, 44(4): 577–580 (in Chinese)

5 Ben-Naoum A K, De Coster C. On the p-Laplacian Separated Boundary Value Problem. *Differential and Integral Equations,* 1997, 10(6): 1093–1112

6 Henderson J, Thompson H B. Multiple Symmetric Positive Solutions for a Second Order Boundary Value Problem. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 2000, 128: 2373–2379

7 Leggett R W, Williams L R. Multiple Positive Fixed Points of Nonlinear Operators on Ordered Banach Spaces. *Indiana University Math. J,* 1979, 28: 673–688

8 Davis J M, Henderson J. Triple Positive Symmetric Solutions and Dependence on Higher Derivatives. *J. Math. Anal. Appl.,* 1999, 237: 710–720

9 Ma Ruyun. Positive Solutions of a Singular Second-order Boundary Value Problem. *Acta Mathematica Sinica*, 1998, 41(6): 1225–1230 (in Chinese)

10 Guo Dajun, Lakshmikantham V. Nonlinear Problems in Abstract Cones. San Diego, CA: Academic Press, 1988

AN THEOREM ABOUT TRIPLE POSITIVE SOLUTIONS FOR THE ONE-DIMENSIONAL P-LAPLACIAN EQUATIONS

HE Xiaoming

(*Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

GE Weigao

(*Department of Applied Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081)

Abstract By means of the Leggtt-Williams fixed-point theorem in cones, we study the existence of positive solutions for the nonlinear p-Laplacian boundary value problem, $\big(\varphi(u')\big)'+a(t)f(u)=0,\ \alpha\varphi\big(u(0)\big)-\beta\varphi\big(u'(0)\big)=0,\ \gamma\varphi\big(u(1)\big)+\delta\varphi\big(u'(1)\big)=0$, where $\varphi(s):=|s|^{p-2}s$, $p>1$. Sufficient conditions are established which guarantee the existence of at least three positive solutions of this problem.

Key words p-Laplacian boundary value problem, positive solutions, cone, Leggett-Williams fixed-point theorem