第 27 卷 第 1 期　　应用数学学报　　Vol. 27 No. 1
2004 年 1 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Jan., 2004

# 平稳 NA 随机变量序列中偏差的下界估计*

董志山　　杨小云
(吉林大学 (前卫校区) 数学研究所，长春 130012)

**摘　要**　本文在比较一般的条件下得到了平稳 NA 序列的中偏差下界估计，进而得到平稳 NA 序列的中偏差原理.

**关键词**　NA 随机变量，中偏差原理

## 1　引言

假设 $\{\xi_i,\ i\geq 1\}$ 为实随机变量序列，记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i,\ n\geq 1$, 设 $\{x_n,\ n\geq 1\}$ 为一正实数列，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=+\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0,\ I(x)$ 为一非负下紧函数. 称 $\{P(\frac{S_n}{x_n}\in\cdot),\ n\to\infty\}$ 满足速率函数为 $I(x)$ 的中偏差原理，若 $\{P(\frac{S_n}{x_n}\in\cdot),\ n\to\infty\}$ 满足速率函数为 $I(x)$, 速度为 $\frac{n}{x_n^2}$ 的大偏差原理，即对 $R$ 中任意开集 $G$, 闭集 $F$, 下面两式同时成立

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{x_n}\in G\Big)\geq-\inf_{x\in G}I(x),\tag{1.1}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{x_n}\in F\Big)\leq-\inf_{x\in F}I(x).\tag{1.2}$$

中偏差原理在统计力学、随机微分方程、动力系统、统计等众多领域中都有广泛的应用. 本文将主要讨论平稳 NA 随机变量序列中偏差的下界估计，即 (1.1) 式成立，进而得到平稳 NA 序列的中偏差原理.

记 $\sigma$- 代数 $\mathcal{F}_{a,b}=\sigma(\xi_i,a\leq i\leq b),1\leq a\leq b<+\infty$, 对正整数 $k\geq 1$, 定义

$$\psi_-(k)=\inf\Big\{\frac{P(A\bigcap B)}{P(A)P(B)},\ A\in\mathcal{F}_{1,l},\ B\in\mathcal{F}_{l+k,+\infty},\ P(A)P(B)>0,\ l\geq 1\Big\}.\tag{1.3}$$

对中偏差的研究，前人已经进行得比较深入，但是大多数是针对 i.i.d. 随机变量情形证明的，如 [1–3]. 对实平稳 NA 列情形， [4] 在 $E\xi_1=0,\ \sigma^2\triangleq E\xi_1^2+2\sum\limits_{k=2}^{\infty}E\xi_k\xi_1>0$, 存在 $\delta_0>0$, 使 $Ee^{\delta_0|\xi_1|}<+\infty$ 及存在 $N_0\geq 1$, 使得 $\psi_-(N_0)=1$ 的条件下证明了 (1.1), (1.2)

本文 2001 年 1 月 31 日收到. 2001 年 1 月 18 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (10271049 号) 资助项目.

式成立，即 $\{P(\frac{S_n}{x_n}\in\cdot),\ n\to\infty\}$ 满足速率函数为 $I(x)$ 的中偏差原理，这里 $I(x)=\frac{x^2}{2\sigma^2}$. 但定理中条件 $\psi_-(N_0)=1$ 似乎太强且不易办到. 本文将采用与上述定理不同的证明方法把这个条件减弱为存在 $N_0\ge 1$, 使得 $\psi_-(N_0)>0$, 从而使得定理得到更广泛的应用.

在定理证明之前我们先给出下面引理.

**引理 1** ([2] 中引理 2.1 及 $P_{706}$ 的说明) 设 $\{X(t),\ t>0\}$ 为 Wiener 过程，满足 $X(1)\sim N(0,\sigma^2)$, 对 $\forall x\in R,\ r>0$, 则下面的极限存在,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log P\Big(\frac{X(t)}{t}\in B(x,r)\Big)=-\inf_{v\in B(x,r)}I(v),$$

这里 $I(x)=\sup\limits_{y\in R}\Big(xy-\frac{y^2\sigma^2}{2}\Big)=\frac{x^2}{2\sigma^2}$, $B(x,r)$ 是以 $x$ 为圆心半径为 $r$ 的开圆.

**引理 2** 设 $\{\xi_n,\ n\ge1\}$ 为一实平稳随机变量列, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i,\ n\ge1,\ \psi_-(k)$ 记号同 (1.3) 式，若存在 $N_0\ge1$, 使得 $\psi_-(N_0)>0,\ C\subset R$ 为凸集，则对任意的 $m\ge2$ 及单调增的 $n_i,\ i=1,2,\cdots,m,\ n_0=-N_0,\ n_{i+1}>n_i+N_0,\ i=1,2,\cdots,m-1$

$$\begin{aligned}&P\Big(\frac{\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k+\sum_{k=n_1+N_0+1}^{n_2}\xi_k+\cdots+\sum_{k=n_{m-1}+N_0+1}^{n_m}\xi_k}{m}\in C\Big)\\ \ge&\big(\psi_-(N_0)\big)^{m-1}\prod_{i=0}^{m-1}P\left(S_{n_{i+1}-n_i-N_0}\in C\right).\end{aligned}$$

证 由 $C\subset R$ 的凸性可知

$$\bigcap_{i=0}^{m-1}\Big\{\sum_{k=n_i+N_0+1}^{n_{i+1}}\xi_k\in C\Big\}\subset\Big\{\frac{\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k+\sum_{k=n_1+N_0+1}^{n_2}\xi_k+\cdots+\sum_{k=n_{m-1}+N_0+1}^{n_m}\xi_k}{m}\in C\Big\}.$$

由 [5] 中 (3.1) 式及 $\{\xi_n,\ n\ge1\}$ 的平稳性可得,

$$\begin{aligned}&P\Bigg(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n_1}\xi_k+\sum\limits_{k=n_1+N_0+1}^{n_2}\xi_k+\cdots+\sum\limits_{k=n_{m-1}+N_0+1}^{n_m}\xi_k}{m}\in C\Bigg)\\ \ge&P\Big(\bigcap_{i=0}^{m-1}\Big\{\sum_{k=n_i+N_0+1}^{n_{i+1}}\xi_k\in C\Big\}\Big)\\ =&EI_{\{S_{n_1}\in C\}}I_{\{\bigcap\limits_{i=1}^{m-1}\{\sum\limits_{k=n_i+N_0+1}^{n_{i+1}}\xi_k\in C\}\}}\\ =&E\Big(I_{\{\bigcap\limits_{i=1}^{m-1}\{\sum\limits_{k=n_i+N_0+1}^{n_{i+1}}\xi_k\in C\}\}}E\big(I_{\{S_{n_1}\in C\}}\big|\mathcal{F}_{n_1+N_0+1,n_m}\big)\Big))\\ \ge&\psi_-(N_0)P(S_{n_1}\in C)P\Big(\bigcap_{i=1}^{m-1}\Big\{\sum_{k=n_i+N_0+1}^{n_{i+1}}\xi_k\in C\Big\}\Big)\\ \ge&\cdots\end{aligned}$$

$$\geq\big(\psi_{-}(N_0)\big)^{m-1}\prod_{i=0}^{m-1}P(S_{n_{i+1}-n_i-N_0}\in C).$$

于是引理成立.

## 2　主要结果

首先，我们讨论平稳 NA 列的中偏差下界估计.

**定理 1**　设 $\{\xi_n,\ n\geq 1\}$ 为一平稳的 NA 随机变量列，若 $E\xi_1=0$, $\sigma^2\triangleq E\xi_1^2+2\sum\limits_{k=2}^{\infty}E\xi_k\xi_1>0$, 并且存在 $\delta_0>0$, 使 $Ee^{\delta_0|\xi_1|}<+\infty$, 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$, $n\geq 1$, $\{x_n,\ n\geq 1\}$ 为一正实数列，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$, $\psi_{-}(k)$ 记号同 (1.3) 式，存在 $N_0\geq 1$, 使得 $\psi_{-}(N_0)>0$, 则 $\big\{P\big(\frac{S_n}{x_n}\in\cdot\big),\ n\to\infty\big\}$ 在 $R$ 上满足速率函数为 $\frac{x^2}{2\sigma^2}$, 速度为 $\frac{n}{x_n^2}$ 的大偏差下界，即对任意开集 $G\subset R$, 有

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{x_n}\in G\Big)\geq-\inf_{x\in G}\frac{x^2}{2\sigma^2}.\tag{2.1}$$

证　$\forall x\in G$, $\exists r>0$, 使得 $B(x,2r)\subset G$. 由 [6] 中推论 2.2 可以知道，对任意的 $t>0$, $\frac{S_n}{t\sqrt{n}}\xrightarrow{\mathcal{L}}N(0,\frac{\sigma^2}{t^2})$, 故由弱收敛的性质

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{t^2}\log P\Big(\frac{S_n}{t\sqrt{n}}\in B(x,r/2)\Big)\geq\frac{1}{t^2}\log P\Big(\frac{X(1)}{t}\in B(x,r/2)\Big),\tag{2.2}$$

此处，$\big\{X(t),\ t>0\big\}$ 定义同引理 1. 记 $I(x)=\frac{x^2}{2\sigma^2}$, 由引理 1 可知,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log P\Big(\frac{X(t)}{t}\in B(x,r/2)\Big)=-\inf_{v\in B(x,r/2)}I(v)\geq-I(x).\tag{2.3}$$

下面往证 (2.1) 式成立. 首先证明可以取定一实数列 $t_n\uparrow\infty$, 满足

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{t_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{t_n\sqrt{n}}\in B(x,r/2)\Big)\geq-I(x).\tag{2.4}$$

由 (2.3) 式可知存在 $a_m\downarrow 0$, 使得

$$\frac{1}{m^2}\log P\Big(\frac{X(1)}{m}\in B(x,r/2)\Big)=\frac{1}{m^2}\log P\Big(\frac{X(m^2)}{m^2}\in B(x,r/2)\Big)\geq-I(x)-a_m.\tag{2.5}$$

取定正实数列 $b_m\downarrow 0$, 由 (2.2), (2.5) 两式，对固定的 $m$, 存在 $n(m)\uparrow\infty$, $m\to\infty$, 使得当 $n\geq n(m)$ 时,

$$\frac{1}{m^2}\log P\Big(\frac{S_n}{m\sqrt{n}}\in B(x,r/2)\Big)\geq-I(x)-a_m-b_m.\tag{2.6}$$

令 $t_n=m$, $n(m)\leq n<n(m+1)$, $t_n=1$, $1\leq n\leq n(1)$. 于是对于 $n(m)\leq n<n(m+1)$,

有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{t_n\sqrt{n}}\in B(x,r/2)\Big)\\=&\frac{1}{m^2}\log P\Big(\frac{S_n}{m\sqrt{n}}\in B(x,r/2)\Big)\geq -I(x)-a_m-b_m,\end{aligned}$$

从而 (2.4) 式成立.

其次证明，对任意满足定理 1 中条件的实数列 $\{x_n,\ n\geq 1\}$, 如果 $x_n\leq t_n\sqrt{n}$, 则可以得到

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{x_n}\in B(x,2r)\Big)\geq -I(x). \tag{2.7}$$

而为完成上式证明，我们只需证明

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{x_n}\in B(x,r)\Big)\geq -I(x). \tag{2.8}$$

事实上，若上式不成立，则存在一列 $\{n_i,\ i\geq 1\}$, 使得 $\frac{x_{n_i}}{\sqrt{n_i}}\uparrow +\infty$, 并且

$$\lim_{i\to\infty}\frac{n_i}{x_{n_i}^2}\log P\Big(\frac{S_{n_i}}{x_{n_i}}\in B(x,r)\Big)< -I(x). \tag{2.9}$$

对每个 $n_i$, 都有 $m_i\in N$ 使得 $m_i\leq\frac{x_{n_i}}{\sqrt{n_i}}<m_i+1$, 由于 $\frac{x_{n_i}}{\sqrt{n_i}}\leq t_{n_i}$, 所以由 $t_n$ 的选取方式可知 $n_i\geq n(m_i)$, 定义 $t'_n=\frac{x_{n_i}}{\sqrt{n_i}}$, $n_i\leq n<n_{i+1}$. 注意到当 $n_i$ 充分大后

$$\begin{aligned}\Big\{\frac{\sqrt{n_i}S_n}{x_{n_i}\sqrt{n}}\in B(x,r)\Big\}=&\Big\{\frac{x_{n_i}}{\sqrt{n_i}m_i}(x-r)<\frac{S_n}{m_i\sqrt{n}}<\frac{x_{n_i}}{\sqrt{n_i}m_i}(x+r)\Big\}\\ \supset&\Big\{\frac{S_n}{m_i\sqrt{n}}\in B(x,r/2)\Big\},\end{aligned} \tag{2.10}$$

从而应用 (2.6), (2.10) 式可得，当 $n(m_i)\leq n_i\leq n<n_{i+1}$ 时

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t_n'^2}\log P\Big(\frac{S_n}{t'_n\sqrt{n}}\in B(x,r)\Big)\\=&\frac{n_i}{x_{n_i}^2}\log P\Big(\frac{\sqrt{n_i}S_n}{x_{n_i}\sqrt{n}}\in B(x,r))\Big)\\ \geq&\frac{n_i}{x_{n_i}^2}\log P\Big(\frac{S_n}{m_i\sqrt{n}}\in B(x,r/2)\Big)\\ \geq&\frac{1}{m_i^2}\log P\Big(\frac{S_n}{m_i\sqrt{n}}\in B(x,r/2)\Big)\\ \geq&-I(x)-a_{m_i}-b_{m_i},\end{aligned}$$

故

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{t_n'^2}\log P\Big(\frac{S_n}{t'_n\sqrt{n}}\in B(x,r)\Big)\geq -I(x), \tag{2.11}$$

同时注意到 $\{\frac{x_{n_i}}{\sqrt{n_i}},\ i\geq 1\}$ 为 $\{t'_n,\ n\geq 1\}$ 的子列，于是 (2.11) 式与 (2.9) 式矛盾，故 (2.8) 式成立.

再次证明，对任意满足定理 1 中条件的正实数列 $\{x_n,\ n\geq 1\}$, 如果 $x_n > t_n\sqrt{n}$, 则仍然可以得到

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{x_n}\in B(x,2r)\Big)\geq -I(x). \tag{2.12}$$

选取正实数列 $\alpha(n)$ 满足以下条件： $\frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}}\uparrow+\infty,\ \frac{\alpha(n)}{n}\downarrow 0,\ \alpha(n)=o(t_n\sqrt{n})$. 令

$$\begin{aligned}
&k(n)=\min\Big\{n,\sup\Big\{i\geq 1;\ \frac{\alpha(i)}{i}\geq\frac{x_n}{n}\Big\}\Big\}\\
&m(n)=\big[n/k(n)\big],\qquad y(n)=x_n/m(n),\qquad l(n)=n-m(n)k(n).
\end{aligned}$$

由上面的定义可知， $k(n)\to+\infty,\ n\to\infty,\ l(n)<k(n)$. 我们选取实数列 $M(n)$, 满足

$$\lim_{n\to\infty}M(n)=+\infty,\qquad \limsup_{n\to\infty}\frac{M(n)\alpha(n)}{t_n\sqrt{n}}\leq\frac{1}{2}.$$

利用 $x_n>t_n\sqrt{n}$ 及 $\alpha(n)=o\,(t_n\sqrt{n})$ 可知， $n$ 充分大后 $\frac{x_n}{n}>\frac{\alpha(n)}{n}$, 此时 $k(n)=\sup\big\{i\geq 1;\ \frac{\alpha(i)}{i}\geq\frac{x_n}{n}\big\}\leq n$. 对 $n\in\big\{n:m(n)+1\leq M(n)\big\}$, $n$ 充分大后，由 $k(n)$ 的定义及 $\alpha(n)$ 的选取，有

$$\begin{aligned}
x_n\leq&\alpha\big(k(n)\big)\cdot\frac{n}{k(n)}\leq\alpha\big(k(n)\big)\cdot\big(m(n)+1\big)\leq\alpha\big(k(n)\big)M(n)\\
=&\frac{\alpha(k(n))}{\sqrt{k(n)}}M(n)\sqrt{k(n)}\leq\frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}}M(n)\sqrt{n}=\alpha(n)M(n)\leq t_n\sqrt{n}.
\end{aligned}$$

注意到本部分的假设，可以知道 $\big\{n:m(n)+1\leq M(n)\big\}$ 为有限集合．下面我们只考虑 $m(n)>M(n)-1$ 情形，这时 $m(n)\to+\infty$. 对任意的正整数 $n$ 有下面的关系式

$$S_n=\sum_{j=1}^{m(n)-1}\sum_{i=1}^{k(n)-N_0}\xi_{(j-1)k(n)+i}+\sum_{i=(m(n)-1)k(n)+1}^{n}\xi_i+\sum_{j=1}^{m(n)-1}\sum_{i=1}^{N_0}\xi_{jk(n)-N_0+i},$$

于是

$$\begin{aligned}
&\Big\{\frac{\sum_{j=1}^{m(n)-1}\sum\limits_{i=1}^{k(n)-N_0}\xi_{(j-1)k(n)+i}+\sum\limits_{i=(m(n)-1)k(n)+1}^{n}\xi_i}{x_n}\in B(x,r)\Big\}\\
\subset&\Big\{\frac{S_n}{x_n}\in B(x,2r)\Big\}\bigcup\Big\{\frac{\sum\limits_{j=1}^{m(n)-1}\sum\limits_{i=1}^{N_0}\xi_{jk(n)-N_0+i}}{x_n}\notin B(0,r)\Big\}.
\end{aligned}\tag{2.13}$$

为完成 (2.12) 式的证明，只需证明

$$-I(x)\leq\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Bigg(\frac{\sum\limits_{j=1}^{m(n)-1}\sum\limits_{i=1}^{k(n)-N_0}\xi_{(j-1)k(n)+i}+\sum\limits_{i=(m(n)-1)k(n)+1}^{n}\xi_i}{x_n}\in B(x,r)\Bigg)$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{x_n^2} \log P\Big(\frac{S_n}{x_n} \in B(x, 2r)\Big). \tag{2.14}$$

由引理 2 及 $\{\xi_k,\ k \geq 1\}$ 的平稳性，可以知道

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{x_n^2} \log P\Bigg(\frac{\sum\limits_{j=1}^{m(n)-1}\sum\limits_{i=1}^{k(n)-N_0} \xi_{(j-1)k(n)+i} + \sum\limits_{i=(m(n)-1)k(n)+1}^{n} \xi_i}{x_n} \in B(x,r)\Bigg) \\
=&\frac{n}{x_n^2} \log P\Bigg(\frac{\sum\limits_{j=1}^{m(n)-1}\sum\limits_{i=1}^{k(n)-N_0} \xi_{(j-1)k(n)+i}/y(n) + \sum\limits_{i=(m(n)-1)k(n)+1}^{n} \xi_i/y(n)}{m(n)} \in B(x,r)\Bigg) \\
\geq&\frac{n}{x_n^2} \cdot \Bigg[\big(m(n)-1\big)\log \psi_-(N_0) + \log P\Bigg(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k(n)+l(n)} \xi_i}{y(n)} \in B(x,r)\Bigg) \\
&+ (m(n)-1)\log P\Bigg(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k(n)-N_0} \xi_i}{y(n)} \in B(x,r)\Bigg)\Bigg].
\end{aligned} \tag{2.15}$$

前述证明已表明 $n$ 充分大后， $k(n) = \sup\big\{i \geq 1;\ \alpha(i)/i \geq \frac{x_n}{n}\big\}$, 故 $n\alpha(k(n)+1)/(k(n)+1) < x_n \leq n\alpha(k(n))/k(n)$, 于是利用 $\alpha(n)$ 的性质

$$\begin{aligned}
y(n) \leq& \frac{n\alpha(k(n))}{m(n)k(n)} = \frac{n\alpha(k(n))}{k(n)[n/k(n)]} \leq 2\alpha\big(k(n)\big) \\
\leq& \frac{2\alpha(k(n))}{\sqrt{k(n)}}\sqrt{k(n)+l(n)} \leq 2\alpha\big(k(n)+l(n)\big), \\
y(n) \geq& \frac{n\alpha(k(n)+1)}{m(n)(k(n)+1)} \geq \frac{1}{2}\alpha\big(k(n)+1\big),
\end{aligned} \tag{2.16}$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{y(n)}{\sqrt{k(n)-N_0}} = \lim_{n\to\infty} \frac{y(n)}{\sqrt{k(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{y(n)}{\sqrt{k(n)+l(n)}} = +\infty, \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{y(n)}{k(n)-N_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{y(n)}{k(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{y(n)}{k(n)+l(n)} = 0.
\end{aligned}$$

注意到 $t_n = O(t_{n-N_0})$ 及 $\alpha(n) = o(t_n\sqrt{n})$, 可知 $n$ 充分大后， $y(n) \leq 2\alpha(k(n)) \leq t_{k(n)-N_0}\sqrt{k(n)-N_0}$, $y(n) \leq 2\alpha\big(k(n)+l(n)\big) \leq t_{k(n)+l(n)}\sqrt{k(n)+l(n)}$, 于是由 (2.8) 式可知

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{k(n)-N_0}{y(n)^2} \log P\Big(\frac{S_{k(n)-N_0}}{y(n)} \in B(x,r)\Big) \geq -I(x), \tag{2.17}$$

及

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{k(n)+l(n)}{y(n)^2} \log P\Big(\frac{S_{k(n)+l(n)}}{y(n)} \in B(x,r)\Big) \geq -I(x). \tag{2.18}$$

成立．再注意到 (2.16) 式， $m(n)$ 的定义以及 $m(n)\to\infty$ 的事实， $n$ 充分大后有

$$\begin{aligned}0\le&\frac{n(m(n)-1)}{x_n^2}=\frac{n(m(n)-1)}{y(n)^2m(n)^2}\le\frac{4n(m(n)-1)}{\alpha(k(n)+1)^2m(n)^2}\\ \le&\frac{8(k(n)+1)(m(n)-1)}{\alpha(k(n)+1)^2m(n)},\end{aligned}$$

于是由 $\alpha(n)$ 的定义及 $m(n)\to\infty$ 立得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(m(n)-1)}{x_n^2}=0. \tag{2.19}$$

综合 (2.15)–(2.19) 式可有

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\frac{\sum\limits_{j=1}^{m(n)-1}\sum\limits_{i=1}^{k(n)-N_0}\xi_{(j-1)k(n)+i}+\sum\limits_{i=(m(n)-1)k(n)+1}^{n}\xi_i}{x_n}\in B(x,r)\Big)\\ \ge&\lim_{n\to\infty}\frac{n(m(n)-1)}{x_n^2}\log\psi_-(N_0)+\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\Big\{\log P\Big(\frac{\sum_{i=1}^{k(n)+l(n)}\xi_i}{y(n)}\in B(x,r)\Big)\\ &+\big(m(n)-1\big)\log P\Big(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k(n)-N_0}\xi_i}{y(n)}\in B(x,r)\Big)\Big\}\\ \ge&-I(x)\liminf_{n\to\infty}\frac{ny(n)^2}{x_n^2}\Big[\frac{1}{k(n)+l(n)}+\frac{m(n)-1}{k(n)-N_0}\Big].\end{aligned}$$

注意到 $k(n)\to\infty$, $m(n)\to\infty$, $n\to\infty$ 及 $k(n)$, $y(n)$, $m(n)$ 和 $l(n)$ 的取法，我们可以知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ny(n)^2}{x_n^2}\Big[\frac{1}{k(n)+l(n)}+\frac{m(n)-1}{k(n)-N_0}\Big]=1,$$

于是 (2.14) 式中第一个不等号成立．下面证明 (2.14) 式中第二个不等号成立．记 $\xi_n^+=\xi_nI_{\{\xi_n\ge0\}}$，$\xi_n^-=-\xi_nI_{\{\xi_n<0\}}$，$n\ge1$. 由 [7] 中性质 $P_6$ 可知 $\{\xi_n^+,\ n\ge1\}$，$\{\xi_n^-,\ n\ge1\}$ 均为 NA 列，再由 NA 列的性质及 $\{\xi_k,\ k\ge1\}$ 的平稳性并利用 Markov 不等式， Holder 不等式，有

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\Big|\frac{\sum_{j=1}^{m(n)-1}\sum_{i=1}^{N_0}\xi_{jk(n)-N_0+i}}{x_n}\Big|\ge r\Big)\\ \le&\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log\exp\Big\{-\frac{\delta_0rx_n}{2}\Big\}\cdot E\exp\Big\{\frac{\delta_0}{2}\cdot\sum_{j=1}^{m(n)-1}\sum_{i=1}^{N_0}|\xi_{jk(n)-N_0+i}|\Big\}\\ \le&\limsup_{n\to\infty}\Big\{\frac{-\delta_0rn}{2x_n}+\frac{nN_0(m(n)-1)}{2x_n^2}\log E\exp\{\delta_0\xi_1^+\}+\frac{nN_0(m(n)-1)}{2x_n^2}\log E\exp\{\delta_0\xi_1^-\}\Big\}\\ \le&\limsup_{n\to\infty}\Big\{\frac{-\delta_0rn}{2x_n}+\frac{nN_0(m(n)-1)}{x_n^2}\log E\exp\{\delta_0|\xi_1|\}\Big\}=-\infty,\end{aligned} \tag{2.20}$$

上式中等号成立是由于 (2.19) 式及 $\frac{x_n}{n}\to 0$. 由 (2.20), (2.13) 式及 $\{x_n,\ n\ge 1\}$ 的性质可知

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Bigg(\frac{\sum\limits_{j=1}^{m(n)-1}\sum\limits_{i=1}^{k(n)-N_0}\xi_{(j-1)k(n)+i}+\sum\limits_{i=(m(n)-1)k(n)+1}^{n}\xi_i}{x_n}\in B(x,r)\Bigg)\\
\le&\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log\Bigg\{P\Bigg(\Bigg|\frac{\sum\limits_{j=1}^{m(n)-1}\sum\limits_{i=1}^{N_0}\xi_{jk(n)-N_0+i}}{x_n}\Bigg|\ge r\Bigg)+P\Big(\frac{S_n}{x_n}\in B(x,2r)\Big)\Bigg\}\\
\le&\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log\Bigg\{P\Bigg(\Bigg|\frac{\sum_{j=1}^{m(n)-1}\sum_{i=1}^{N_0}\xi_{jk(n)-N_0+i}}{x_n}\Bigg|\ge r\Bigg)\Bigg\}\\
&\bigvee\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{x_n}\in B(x,2r)\Big)\\
=&\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{x_n}\in B(x,2r)\Big),
\end{aligned}
$$

于是 (2.14) 式中第二个不等号成立，从而 (2.12) 式成立.

最后说明 (2.1) 式成立．事实上，对任意满足定理条件的正实数列 $\{x_n,\ n\ge 1\}$, 令 $N_1=\{n:x_n\le t_n\sqrt{n}\}$，$N_2=\{n:x_n>t_n\sqrt{n}\}$. 由 (2.7), (2.12) 式可知

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{N_1\ni n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{x_n}\in B(x,2r)\Big)\ge -I(x),\\
&\liminf_{N_2\ni n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{x_n}\in B(x,2r)\Big)\ge -I(x),
\end{aligned}
$$

于是

$$
\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{x_n}\in G\Big)\ge\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{x_n}\in B(x,2r)\Big)\ge -I(x).
$$

由 $x\in G$ 任意，可知 (2.1) 式成立，定理得证.

文章最后，我们给出平稳 NA 序列的中偏差原理.

**定理 2** 设 $\{\xi_n,\ n\ge 1\}$ 为一平稳的 NA 随机变量列，若 $E\xi_1=0$，$\sigma^2\triangleq E\xi_1^2+2\sum\limits_{k=2}^{\infty}E\xi_k\xi_1>0$, 并且存在 $\delta_0>0$, 使 $Ee^{\delta_0|\xi_1|}<+\infty$, 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$，$n\ge 1$, $\{x_n,\ n\ge 1\}$ 为一正实数列，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$，$\psi_(k)$ 记号同 (1.3) 式，存在 $N_0\ge 1$, 使得 $\psi_-(N_0)>0$, 则 $\big\{P\big(\frac{S_n}{x_n}\in\cdot\big),\ n\to\infty\big\}$ 在 $R$ 上满足速率函数为 $\frac{x^2}{2\sigma^2}$, 速度为 $\frac{n}{x_n^2}$ 的大偏差原理，即对 $R$ 中任意开集 $G$, 闭集 $F$, 有

$$
\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{x_n}\in G\Big)\ge -\inf_{x\in G}\frac{x^2}{2\sigma^2},\tag{2.21}
$$

$$
\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{x_n}\in F\Big)\le -\inf_{x\in F}\frac{x^2}{2\sigma^2}.\tag{2.22}
$$

证　由定理 1 可知 (2.21) 成立，下面只证 (2.22) 式成立．记

$$\Lambda(y)=\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log E\exp\big(y\frac{S_nx_n}{n}\big),\qquad \forall\, y\in R,$$
$$\Lambda^*(x)=\sup\big\{xy-\Lambda(y)\mid y\in R\big\},\qquad \forall\, x\in R.$$

由 [4] 中 (2.4) 式可以知道 $\Lambda(y)\le\frac{\sigma^2y^2}{2}<+\infty$. 应用 [1] 中 271 页命题 1.1 可知 $\big\{P\big(\frac{S_n}{x_n}\in\cdot\big),\ n\to\infty\big\}$ 在 $R$ 上满足速率函数为 $\Lambda^*(x)$, 速度为 $\frac{n}{x_n^2}$ 的大偏差上界，此时 $\Lambda^*(x)\ge\sup\big\{xy-\frac{\sigma^2y^2}{2}\mid y\in R\big\}=\frac{x^2}{2\sigma^2}$, 于是对任意的闭集 $F\subset R$, 有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\log P\Big(\frac{S_n}{x_n}\in F\Big)\le-\inf_{x\in F}\Lambda^*(x)=-\inf_{x\in F}\frac{x^2}{2\sigma^2},$$

即 (2.22) 式成立，从而定理得证.

**注** 在本文的定理中, 我们利用 NA 随机变量列的中心极限定理及弱收敛的性质证明中偏差原理, 这是一种不同于 [4] 中定理证明的方法. 另外, 本文的条件显然弱于 [4] 中定理的条件，故本文定理可作为 [4] 中定理的推广.

## 参　考　文　献


1 Yan J A, Peng S G, Fang S Z, Wu L M. Selected Lecture of Stochastic Analysis. Beijing: Science Press, 1997 (in Chinese)

2 Borovkov A A.,Mogul'skii A A. Probabilities of Large Deviations in Topological Spaces. *Siberian Math. J.,* 1978, 19: 697–709

3 Chen Xia. Moderate Deviation for Independent $B$-valued Random Variables. *Chinese Ann. Math.* (A 辑), 1990, 11(5): 621–629

4 Tan Yuanxing, Zhang Feng, Hu Yijun. Moderate Deviations Principle for Stationary Negatively Associated Sequences. *J. Math.,* 2000, 20(2): 222–226

5 Bryc W. On Large Deviations for Uniformly Strong Mixing Sequences. *Stochastic Process Appl.,* 1992, 41: 191–202

6 Su Chun, Chi Xiang. Some Results on CLT for Nonstationary NA Sequences. *Acta Math. Appl. Sinica*, 1998, 21(1): 9–21

7 Joag-Dev K, Proschan F. Negative Association of Random Variables with Appilications. *Ann. Statist.,* 1983, 11: 286–295


# THE LOWER BOUND ESTIMATE OF MODERATE DEVIATION FOR NA RANDOM VARIABLES WITH STATIONARY DISTRIBUTION


DONG Zhishan　　YANG Xiaoyun

(*Institute of Mathematics, Jilin University (Qianwei Campus), Changchun* 130012)



**Abstract** In this article, we establish the lower bound estimate of moderate deviation for NA random variables with stationary distribution,and then we establish the moderate deviation principle for NA random variables with stationary distribution.



**Key words** NA random variables, Moderate deviation principle