第 27 卷 第 2 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 2
2004 年 5 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　May, 2004

再论一类二次系统的无界双中心周期环域的Poincare分支 *

谭欣欣
(大连理工大学应用数学系，大连 116024);　(大连大学信息工程学院，大连 116022)
冯恩民
(大连理工大学应用数学系，大连 116024)
沈伯骞
(辽宁师范大学数学系，大连 116029)

摘　要　本文再一次讨论了具有双曲线与赤道弧为边界的双中心周期环域的二次系统的 Poincare 分支, 并构造出了此系统出现极限环的 (0,3) 分布或出现一个三重极限环的具体例子.

关键词　二次系统， Poincare 分支， Abel 积分，三重极限环

1　引言

[1] 证明了二次系统从具有两个无界的中心周期环域的可积系统

$$\dot{x} = -y - 2x^2 + y^2, \qquad \dot{y} = x(1 - 2y). \tag{1}$$

出发的 Poincare 分支可以出现极限环的 $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$ 分布并有出现二重极限环或三重极限环的可能, 并给出了它们完整的分支示意图和相图 (可参看 [1] 中的图 2), 但这是纯理论上的证明，不具有构造性. 为解决构造性问题那就必须依赖于 Abel 积分的计算.

我们现在来继续研究 [2] 所研究过的如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + \mu(\ell_1 x^2 + m_1 xy + n_1 y^2 + p_1 x + q_1 y) = P(x,y,\mu), \\ \dot{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 + \mu(\ell_2 x^2 + m_2 xy + n_2 y^2 + p_2 x + q_2 y) = Q(x,y,\mu). \end{cases} \tag{2}$$

本文 2002 年 4 月 25 日收到. 2003 年 8 月 11 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (19871009 号) 和辽宁省高校科研基金 (A990311010 号) 资助项目.

2 系统 (2) 的 Abel 积分

系统 (2) ($\mu=0$) 与系统 (1) 本质相同，系统 (2) 的 Abel 积分为

$$A_i(h)=\oint_{\Gamma_i(h)}\Big[(P_{\mu 0}Q_0-Q_{\mu 0}P_0)\exp\Big(-\int_0^t(P_{x0}+Q_{y0})\,dt\Big)\Big]\,\mathrm{d}t,\qquad i=1,2,$$

$A_1(h)$ 和 $A_2(h)$ 分别表示右左两半平面上周期环域的 Abel 积分．积分曲线 $\Gamma_1(h)$ 是系统 (2)($\mu=0$) 围绕 $A(1,0)$ 的闭轨，其方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-h}{[(1-h)^2+(2h-h^2)\cos t]^{1/2}}=x(t,h),\\ y=\dfrac{(2h-h^2)\sin t}{2[(1-h)^2+(2h-h^2)\cos t]}=y(t,h). \qquad 0<h<1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

注意，以上的 (3) 式在 [2] 中有笔误，已纠正.

当 $h=0$ 时， (3) 式变成孤立点 $A(1,0)$, $B(-1,0)$. 当 $h=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时， (3) 式变成

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{(1+\cos t)^{1/2}},\\ y(t)=\dfrac{\sin t}{2(1+\cos t)}, \end{cases}$$

即双曲线 $2x^2-4y^2=1$.

[2] 已经计算了系统 (2) 的 Abel 积分为

$$\begin{aligned} A_{1,2}(h)=&\frac{1}{12}\big\{\big[6(2-k^2)^2\ell_1-2(2-k^2)^2m_2+(k^4-16k^2+16)n_1\big]E(k)\\ &-4(1-k^2)(2-k^2)(3\ell_1-m_2+2n_2)K(k)\\ &\pm\frac{3\pi(4p_1-q_2)}{4\sqrt{2}}k^4\sqrt{2-k^2}\big\},\qquad 0<k<1, \end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$k^2=2h(2-h),\qquad E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,\qquad K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

(4) 的最后一项带正负号，正号对应于 $A_1(h)$, 负号对应于 $A_2(h)$.

令 $\rho=k^2$，$\ell=3\ell_1-m_2$，$n=n_1$，$\lambda=4p_1-q_2$, 则 $A_1(h)$ 可写成

$$\begin{aligned} A_1(h)=\overline{A}_1(\rho)=&\frac{1}{12}\Big\{\big[(2\ell+n)\rho^2-8(\ell+2n)\rho+8(\ell+2n)\big]E(\sqrt{\rho})\\ &-4(\ell+2n)(1-\rho)(2-\rho)K(\sqrt{\rho})+\frac{3\pi\lambda\rho^2\sqrt{2-\rho}}{4\sqrt{2}}\Big\}. \end{aligned} \tag{5}$$

再令 $\ell'=2\ell+4n=6\ell_1-2m_2+4n_1$，$n'=-3n=-3n_1$，$\lambda'=\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\lambda=\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}(4p_1-q_2)$,

$\overline{A_1}(\rho)$ 还可以进一步简化成

$$\begin{aligned}\overline{A}_1(\rho) =& \frac{\rho^2}{12}\Big\{\Big[\Big(1-\frac{4}{\rho}+\frac{4}{\rho^2}\Big)E(\sqrt{\rho})-2(1-\rho)(2-\rho)\frac{1}{\rho^2}K(\sqrt{\rho})\Big]\ell' \\ &+E(\sqrt{\rho})n'+\sqrt{2-\rho}\lambda'\Big\},\end{aligned} \tag{6}$$

再将 (6) 改写成

$$\overline{A}_1(\rho)=\frac{\rho^2}{12}\left[f_1(\rho)\ell'+f_2(\rho)n'+f_3(\rho)\lambda'\right]=\frac{\rho^2}{12}\overline{\overline{A_1}}(\rho), \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}&f_1(\rho)=\Big(1-\frac{4}{\rho}+\frac{4}{\rho^2}\Big)E(\sqrt{\rho})-2(1-\rho)(2-\rho)\frac{1}{\rho^2}K(\sqrt{\rho}),\\ &f_2(\rho)=E(\sqrt{\rho}),\qquad f_3(\rho)=\sqrt{2-\rho}.\end{aligned}$$

(7) 式中 $\overline{\overline{A_1}}(\rho)$ 是线性无关的三个函数 $f_1(\rho)$, $f_2(\rho)$, $f_3(\rho)$ 关于三个独立参数 ℓ', n', λ' 的线性组合.

3　系统 (2) 至少出现极限环的 (0,2) 分布等的例子的构造方法

定理 1　在 $0<\rho<1$ 内任取两点 ρ_1,ρ_2. 设方程组

$$\begin{cases} f_1(\rho_1)\ell'+f_2(\rho_1)n'+f_3(\rho_1)\lambda'=0,\\ f_1(\rho_2)\ell'+f_2(\rho_2)n'+f_3(\rho_2)\lambda'=0.\end{cases}$$

的非零解为 $\ell'=\ell_0$, $n'=n_0$, $\lambda'=\lambda_0$. 如果系统 (2) 的参数满足以下条件

$$6\ell_1-2m_2+4n_1=\ell_0,\qquad -3n_1=n_0,\qquad \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}(4p_1-q_2)=\lambda_0,$$

则当 $0<\mu\ll 1$ 时, 系统 (2) 至少出现极限环的 (0,2) 分布. 这两个极限环分别位于右半平面上的两条闭曲线

$$x=x\Big(t,1-\frac{\sqrt{4-2\rho_i}}{2}\Big),\qquad y=y\Big(t,1-\frac{\sqrt{4-2\rho_i}}{2}\Big),\qquad i=1,2$$

的小邻域内.

证　注意到 $f_1(\rho)$, $f_2(\rho)$, $f_3(\rho)$ 线性无关, 对于 $0<\rho<1$ 内任意两点 ρ_1, ρ_2, $\overline{\overline{A_1}}(\rho)$ 在 $0<\rho<1$ 内有两个零点 ρ_1, ρ_2. 显然定理 1 的结论成立. 证毕.

定理 1 就是系统 (2) 至少出现极限环 (0,2) 分布的一个构造性定理. 由于 ρ_1 和 ρ_2 在 $0<\rho<1$ 内的任意性, 也即 h_1 和 h_2 在 $0<h<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 内的任意性, 所以这两个极限环可以随心所欲地令它们落在闭曲线族（ 3 ）的任意两条闭曲线的小邻域内.

定理 2　在 $0<\rho<1$ 内任取一点 ρ_1, 设方程组

$$\begin{cases} f_1(\rho_1)\ell'+f_2(\rho_1)n'+f_3(\rho_1)\lambda'=0,\\ f_1'(\rho_1)\ell'+f_2'(\rho_1)n'+f_3'(\rho_1)\lambda'=0.\end{cases}$$

的非零解为 $\ell' = \ell_0$，$n' = n_0$，$\lambda' = \lambda_0$, 如果系统 (2) 的参数满足以下条件

$$6\ell_1 - 2m_2 + 4n_1 = \ell_0, \qquad -3n_1 = n_0, \qquad \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}(4p_1 - q_2) = \lambda_0,$$

则当 $0 < \mu \ll 1$ 时，系统 (2) 是具有一个二重极限环的一个近似系统．此二重极限环将位于曲线族 (3) 右半平面上的一条闭曲线

$$x = x\Big(t, 1 - \frac{\sqrt{4-2\rho_1}}{2}\Big), \qquad y = y\Big(t, 1 - \frac{\sqrt{4-2\rho_1}}{2}\Big)$$

的小邻域内．

证　因这时 $\overline{\overline{A_1}}(\rho)$ 在 $0 < \rho < 1$ 内有一个二重零点 $\rho = \rho_1$, 根据 [3] 知：定理 2 结论成立．证毕．

定理 2 就是系统 (2) 出现一个二重环的一个构造性定理．而且此二重环也具有位置上的任意性．如果在定理 2 中令 $\rho_1 = 1$, 则根据 [4] 知系统 (2) 成为一个有二阶细分界线环系统的一个近似系统．此二阶分界线环将位于右半平面上的闭曲线

$$x = x\Big(t, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big), \qquad y = y\Big(t, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big),$$

也即双曲线 $2x^2 - 4y^2 = 1$ 的小邻域内．

如果我们将定理 1 中的方程组改写成

$$\begin{cases} f_1(\rho_1)\ell' + f_2(\rho_1)n' + f_3(\rho_1)\lambda' = 0, \\ f_1(\rho_2)\ell' + f_2(\rho_2)n' - f_3(\rho_2)\lambda' = 0. \end{cases}$$

所得到的将是系统 (2) 极限环的至少 $(1,1)$ 分布．

4　系统 (2) 出现极限环 $(0,3)$ 分布的构造方法

$\overline{A_1}(\rho)$ 在 $0 < \rho < 1$ 内能否出现三个零点，问题在于能否找到这样的三个点 ρ_1, ρ_2, ρ_3, 使得以下方程组存在非零解 ℓ', n', λ',

$$\begin{cases} f_1(\rho_1)\ell' + f_2(\rho_1)n' + f_3(\rho_1)\lambda' = 0, \\ f_1(\rho_2)\ell' + f_2(\rho_2)n' + f_3(\rho_2)\lambda' = 0. \\ f_1(\rho_3)\ell' + f_2(\rho_3)n' + f_3(\rho_3)\lambda' = 0, \end{cases} \tag{8}$$

亦即存在 ρ_1, ρ_2, ρ_3, 使得其系数行列式

$$\Delta_1(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = \begin{vmatrix} f_1(\rho_1) & f_2(\rho_1) & f_3(\rho_1) \\ f_1(\rho_2) & f_2(\rho_2) & f_3(\rho_2) \\ f_1(\rho_3) & f_2(\rho_3) & f_3(\rho_3) \end{vmatrix} = 0.$$

为此，先来考察 $f_i(\rho)$ $(i = 1,2,3)$ 在区间 $0 < \rho < 1$ 的端点的值．易知

$$f_1(1) = \lim_{\rho_3 \to 1-0} f_1(\rho_3) = 1,$$
$$f_2(1) = \lim_{\rho_3 \to 1-0} f_2(\rho_3) = 1,$$
$$f_3(1) = \lim_{\rho_3 \to 1-0} f_3(\rho_3) = 1.$$

再将 $f_i(\rho_1)$ $(i=1,2,3)$ 分别展开为 ρ_1 的幂级数，得

$$\begin{aligned}
f_1(\rho_1) &= \Big(\frac{3}{4}-\frac{1}{32}\rho_1+o\left(\rho_1\right)\Big)\frac{\pi}{2},\\
f_2(\rho_1) &= \Big(1-\frac{1}{4}\rho_1+o(\rho_1)\Big)\frac{\pi}{2},\\
f_3(\rho_1) &= \sqrt{2}\Big(1-\frac{1}{4}\rho_1+o\left(\rho_1\right)\Big).
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
f_1(0) &= \lim_{\rho_1\to+0} f_1(\rho_1)=\frac{3}{8}\pi,\\
f_2(0) &= \lim_{\rho_1\to+0} f_2(\rho_1)=\frac{\pi}{2},\\
f_3(0) &= \lim_{\rho_1\to+0} f_3(\rho_1)=\sqrt{2},\\
\Delta_1(0,\rho_2,1) &= \begin{vmatrix} \frac{3}{8}\pi & \frac{1}{2}\pi & \sqrt{2}\\ f_1(\rho_2) & f_2(\rho_2) & f_3(\rho_2)\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\\
=&(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2})f_1(\rho_2)+(\frac{3}{8}\pi-\sqrt{2})f_2(\rho_2)+\frac{\pi}{8}f_3(\rho_2)=\overline{\Delta}_1(\rho_2).
\end{aligned}$$

现在考察函数 $\overline{\Delta}_1(\rho_2)$ 在 $0<\rho_2<1$ 内存在零点的可能性．用与以上类似的方法来考察 $\overline{\Delta}_1(\rho_2)$ 在区间 $0<\rho_2<1$ 两端的性态．首先易知 $\overline{\Delta}_1(0)=\overline{\Delta}_1(1)=0$, 将 $\overline{\Delta}_1(\rho_2)$ 展开成 ρ_2 的幂级数，得

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}_1(\rho_2) =&\Big(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}\Big)\Big(\frac{3}{4}-\frac{1}{32}\rho_2\Big)\frac{\pi}{2}+\Big(\frac{3\pi}{8}-\sqrt{2}\Big)\Big(1-\frac{1}{4}\rho_2\Big)\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\Big(1-\frac{1}{4}\rho_2\Big)+o\left(\rho_2\right)\\
=&\frac{5\pi}{128}(2\sqrt{2}-\pi)\rho_2+o\left(\rho_2\right).
\end{aligned}$$

因 $2\sqrt{2}-\pi\simeq-0.3131165528\cdots<0$, 所以 $\overline{\Delta}_1(\rho_2)$ 在点 $\rho_2=0$ 的右半小邻域内必为负．

再对 $\overline{\Delta}_1(\rho_2)$ 求导．因为

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\rho_2}E(\sqrt{\rho_2}) &= \frac{1}{2\rho_2}\big[E(\sqrt{\rho_2})-K(\sqrt{\rho_2})\big],\\
\frac{d}{d\rho_2}K(\sqrt{\rho_2}) &= \frac{1}{2\rho_2}\Big[-K(\sqrt{\rho_2}\,)+\frac{1}{1-\rho^2}E(\sqrt{\rho_2})\Big].
\end{aligned}$$

所以可计算得

$$\begin{aligned}
f_1'(\rho_2) &= \Big(\frac{1}{2\rho_2}+\frac{3}{\rho_2^2}-\frac{8}{\rho_2^3}\Big)E(\sqrt{\rho_2})+\Big(\frac{1}{2\rho_2}-\frac{7}{\rho_2^2}+\frac{8}{\rho_2^3}\Big)K(\sqrt{\rho_2}),\\
f_2'(\rho_2) &= \frac{1}{2\rho_2}\big[E(\sqrt{\rho_2})-K(\sqrt{\rho_2})\big],\\
f_3'(\rho_2) &= -\frac{1}{2\sqrt{2-\rho_2}}.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}_1'(\rho_2)=&\Big[\Big(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}\Big)\Big(\frac{1}{2\rho_2}+\frac{3}{\rho_2^2}-\frac{8}{\rho_2^3}\Big)+\Big(\frac{3\pi}{8}-\sqrt{2}\Big)\frac{1}{2\rho_2}\Big]E(\sqrt{\rho_2})\\&+\Big[\Big(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}\Big)\Big(\frac{1}{2\rho_2}-\frac{7}{\rho_2^2}+\frac{8}{\rho_2^3}\Big)-\Big(\frac{3\pi}{8}-\sqrt{2}\Big)\frac{1}{2\rho_2}\Big]K(\sqrt{\rho^2})-\frac{\pi}{16\sqrt{2-\rho^2}}.\end{aligned}$$

因

$$\lim_{\rho_2\longrightarrow 1^{-0}}K(\sqrt{\rho_2})=+\infty,\qquad \lim_{\rho_2\rightarrow 1^{-0}}E(\sqrt{\rho_2})=1.$$

所以当 $\rho_2\rightarrow 1^{-0}$ 时，$\overline{\Delta}_1'(\rho_2)$ 中的第一和第三项均有界，第二项 $K(\sqrt{\rho_2})$ 的系数趋向于

$$\Big(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}\Big)\frac{3}{2}-\Big(\frac{3\pi}{8}-\sqrt{2}\Big)\frac{1}{2}=2\sqrt{2}-\frac{15}{16}\pi\simeq-0.1168\cdots<0,$$

所以

$$\lim_{\rho_2\rightarrow\ 1^{-0}}\overline{\Delta}_1'(\rho_2)=-\infty,$$

所以 $\overline{\Delta}_1(\rho_2)$ 在点 $\rho_2=1$ 的左半邻域内必为正．从而推知 $\overline{\Delta}_1(\rho_2)$ 在 $0<\rho_2<1$ 内必存在至少一个零点．设这个零点为 $\rho_2=\rho_0$, 于是 $\overline{\overline{A_1}}(\rho)$ 存在三个零点，它们是 $\rho=0$, $\rho=\rho_0$ 和 $\rho=1$. 但是除了 $\rho=\rho_0$ 外，$\rho=0$ 和 $\rho=1$ 都不是 $\overline{\overline{A_1}}(\rho)$ 在 $0<\rho_2<1$ 的内点．不过我们总可以通过微扰，将它们都变成 $0<\rho_2<1$ 的内点．方法如下：

设 $\rho_2=\rho_0$ 是方程 $\Delta_1(0,\rho_2,1)=0$ 的单根，可知 $\Delta_1(\rho_1,\rho_2,\rho_3)=0$ 在点 $(\rho_1,\rho_2,\rho_3)=(0,\rho_0,1)$ 的邻域内，ρ_2 是 ρ_1 和 ρ_3 的隐函数 $\rho_2=\phi(\rho_1,\rho_3)$, 它在点 $(\rho_1,\rho_3)=(0,1)$ 的函数值为 $\rho_0=\phi(0,1)$. 对于给定的小正数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$, 设 $\overline{\rho}_0=\phi(\varepsilon_1,1-\varepsilon_2)$, 只要 $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ 适当小，由函数的连续性可知 $\overline{\rho}_0$ 也必位于 $0<\overline{\rho}_0<1$ 内，即 $\Delta_1(\varepsilon_1,\overline{\rho}_0,1-\varepsilon_2)=0$. 这就证明了 $\overline{\overline{A_1}}(\rho)$ 在 $0<\rho<1$ 内存在三个零点，它们是 $\rho=\varepsilon_1$, $\rho=\overline{\rho}_0$, $\rho=1-\varepsilon_2$. 于是有以下定理：

定理 3 给定充分小的正数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$, 设 $\rho=\overline{\rho}_0$ 是方程

$$\Delta_1(\rho)=\begin{vmatrix}f_1(\varepsilon_1)&f_2(\varepsilon_1)&f_3(\varepsilon_1)\\f_1(\rho)&f_2(\rho)&f_3(\rho)\\f_1(1-\varepsilon_2)&f_2(1-\varepsilon_2)&f_3(1-\varepsilon_2)\end{vmatrix}=0\tag{9}$$

的一个零点，并设方程组

$$\begin{cases}f_1(\varepsilon_1)\ell'+f_2(\varepsilon_1)n'+f_3(\varepsilon_1)\lambda'=0,\\f_1(\overline{\rho}_0)\ell'+f_2(\overline{\rho}_0)n'+f_3(\overline{\rho}_0)\lambda'=0,\\f_1(1-\varepsilon_2)\ell'+f_2(1-\varepsilon_2)n'+f_3(1-\varepsilon_2)\lambda'=0\end{cases}\tag{10}$$

的非零解为 $\ell'=\ell_0'$, $n^{'}=n_0^{'}$, $\lambda'=\lambda_0'$. 如果系统 (2) 的参数满足以下条件

$$6\ell_1-2m_2+4n_1=\ell_0',\qquad -3n_1=n_0^{'},\qquad \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}(4p_1-q_2)=\lambda_0',$$

则当 $0<\mu\ll\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 时，极限环至少有 $(0,3)$ 分布．这三个极限环分别位于右半平面上的三条闭曲线

$$x=x\Big(t,1-\frac{\sqrt{4-2\rho_i}}{2}\Big),\qquad y=y\Big(t,1-\frac{\sqrt{4-2\rho_i}}{2}\Big),\qquad i=1,2,3$$

的小邻域内，其中 $\rho_1=\varepsilon_1$，$\rho_2=\overline{\rho}_0$，$\rho_3=1-\varepsilon_2$.

证 从前面的分析已知，方程 (9) 在 $\varepsilon_1<\rho<1-\varepsilon_2$ 内必存在零点，设此零点为 $\rho=\overline{\rho}_0$, 所以方程组 (10) 存在非零解，即函数 $\overline{\overline{A}}_1(\rho)$ 至少存在三个零点 $\rho_1=\varepsilon_1$，$\rho_2=\overline{\rho}_0$，$\rho_3=1-\varepsilon_2$. 所以定理 3 的结论成立．证毕.

因对于给定了的 ε_1，$\varepsilon_2>0$, 方程 (9) 在 $\varepsilon_1<\rho<1-\varepsilon_2$ 内的实根 $\rho=\overline{\rho}_0$ 是由 ε_1 和 ε_2 的值所确定的，$\rho=\overline{\rho}_0$ 的值是可以通过计算机计算出来的．从而方程组（ 10 ）的非零解 $\ell'=\ell_0'$，$n'=n_0'$，$\lambda'=\lambda_0'$ 也是可以计算的，所以定理 3 给出了系统 (2) 极限环至少 (0,3) 分布的一种构造方法.

5 具有一个三重极限环的系统 (2) 的构造方法

谁都不怀疑二次系统有存在三重极限环的可能．其实 [1] 已在理论上给予了证明．现在我们来介绍一种构造二次系统的三重极限环的方法.

前节我们已构造出了函数 $\overline{A}_1(\rho)$ 在 $0<\rho<1$ 内至少存在三个零点 $\rho=\varepsilon_1$, $\overline{\rho}_0, 1-\varepsilon_2$ 的例子，其中 $\overline{\rho}_0$ 在 $\varepsilon_1<\rho<1-\varepsilon_2$ 内的位置取决于 ε_1 和 ε_2 的值．如果令 ε_1 和 ε_2 各自连续地增大，则 $\overline{\rho}_0$ 的位置将随之而连续地变化，最后总会出现两种可能：一种是 $\overline{\rho}_0$ 重合于 ε_1 或 $1-\varepsilon_2$, 这时 $\overline{A}_1(\rho)=0$ 出现了一个二重根和一个单根；一种是 $\overline{\rho}_0$ 始终不重合于 ε_1 或 $1-\varepsilon_2$, 最后到达极限位置，即 $\varepsilon_1, \overline{\rho}_0$ 和 $1-\varepsilon_2$ 三点重合成一个三重零点．只要适当调整 ε_1 和 ε_2 增大的相对速度，这两种情况都是有可能出现的．现在的问题是要构造出它们的具体例子．我们只考虑 $\overline{A}_1(\rho)$ 出现三重零点的情形.

考虑以下方程组

$$\begin{cases} f_1(\rho)\ell'+f_2(\rho)n'+f_3(\rho)\lambda'=0, \\ f_1'(\rho)\ell'+f_2'(\rho)n'+f_3'(\rho)\lambda'=0, \\ f_1''(\rho)\ell'+f_2''(\rho)n'+f_3''(\rho)\lambda'=0. \end{cases} \tag{11}$$

它的系数行列式为

$$\Delta(\rho)=\begin{vmatrix} f_1(\rho) & f_2(\rho) & f_3(\rho) \\ f_1'(\rho) & f_2'(\rho) & f_3'(\rho) \\ f_1''(\rho) & f_2''(\rho) & f_3''(\rho) \end{vmatrix}=0, \tag{12}$$

其中

$$f_1(\rho)=\Big(1-\frac{4}{\rho}+\frac{4}{\rho^2}\Big)E(\sqrt{\rho})-2(1-\rho)(2-\rho)\frac{1}{\rho^2}K(\sqrt{\rho}),$$

$$f_2(\rho)=E(\sqrt{\rho}),\qquad f_3(\rho)=\sqrt{2-\rho},$$

$$f_1'(\rho)=\Big(\frac{1}{2\rho}+\frac{3}{\rho^2}-\frac{8}{\rho^3}\Big)E(\sqrt{\rho})+\Big(\frac{1}{2\rho}-\frac{7}{\rho^2}+\frac{8}{\rho^3}\Big)K(\sqrt{\rho}),$$

$$f_2'(\rho)=\frac{1}{2\rho}\big[E(\sqrt{\rho})-K(\sqrt{\rho})\big],\qquad f_3'(\rho)=-\frac{1}{2\sqrt{2-\rho}},$$

$$f_1''(\rho)=\Big(-\frac{1}{4\rho^2}-\frac{19}{4\rho^3}+\frac{93}{4\rho^4}\Big)E(\sqrt{\rho})+\frac{3}{4\rho^4(1-\rho)}E(\sqrt{\rho})+\Big(-\frac{1}{2\rho^2}+\frac{19}{\rho^3}-\frac{24}{\rho^4}\Big)K(\sqrt{\rho}),$$

$$f_2''(\rho)=-\frac{1}{4\rho}E(\sqrt{\rho}),\qquad f_3''(\rho)=-\frac{1}{4(2-\rho)^{3/2}}.$$

展开行列式 $\Delta(\rho)$, 得

$$\begin{aligned}\Delta(\rho)=&f_3(\rho)\big[f_1'(\rho)f_2''(\rho)-f_2'(\rho)f_1''(\rho)\big]\\&+f_3'(\rho)\big[f_2(\rho)f_1''(\rho)-f_1(\rho)f_2''(\rho)\big]\\&+f_3''(\rho)\big[f_1(\rho)f_2'(\rho)-f_2(\rho)f_1'(\rho)\big].\end{aligned}$$

再分别将 $f_i(\rho)$, $f_i'(\rho)$,$f_i''(\rho)$ $(i=1,2,3)$ 的表达式带入上式，并令 $\Delta(\rho)=\frac{K(\sqrt{\rho})}{1-\rho}\overline{\Delta}(\rho)$, 有

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}(\rho)=&\sqrt{2-\rho}\Big\{-\frac{1}{4\rho}E(\sqrt{\rho})(1-\rho)\Big[\Big(\frac{1}{2\rho}+\frac{3}{\rho^2}-\frac{8}{\rho^3}\Big)\frac{E(\sqrt{\rho})}{K(\sqrt{\rho})}+\Big(\frac{1}{2\rho}-\frac{7}{\rho^2}+\frac{8}{\rho^3}\Big)\Big]\\&-\frac{1}{2\rho}\Big[\frac{E(\sqrt{\rho})}{K(\sqrt{\rho})}-1\Big]\Big[(1-\rho)\Big(-\frac{1}{4\rho^2}-\frac{19}{4\rho^3}+\frac{93}{4\rho^4}\Big)E(\sqrt{\rho})+\frac{3}{4\rho^4}E(\sqrt{\rho})\\&+(1-\rho)\Big(-\frac{1}{2\rho^2}+\frac{19}{\rho^3}-\frac{24}{\rho^4}\Big)K(\sqrt{\rho})\Big]\Big\}\\&-\frac{1}{2\sqrt{2-\rho}}\Big\{E(\sqrt{\rho})\Big[(1-\rho)\Big(-\frac{1}{4\rho^2}-\frac{19}{4\rho^3}+\frac{93}{4\rho^4}\Big)\frac{E(\sqrt{\rho})}{K(\sqrt{\rho})}+\frac{3}{4\rho^4}\frac{E(\sqrt{\rho})}{K(\sqrt{\rho})}\\&+(1-\rho)\Big(-\frac{1}{2\rho^2}+\frac{19}{\rho^3}-\frac{24}{\rho^4}\Big)\Big]+\frac{1}{4\rho}E(\sqrt{\rho})\Big[(1-\rho)\Big(1-\frac{4}{\rho}+\frac{4}{\rho^2}\Big)\frac{E(\sqrt{\rho})}{K(\sqrt{\rho})}\\&-2(1-\rho)^2(2-\rho)\frac{1}{\rho^2}\Big]\Big\}\\&-\frac{1}{4(2-\rho)^{3/2}}\Big\{\frac{1}{2\rho}\Big[\frac{E(\sqrt{\rho})}{K(\sqrt{\rho})}-1\Big]\Big[(1-\rho)\Big(1-\frac{4}{\rho}+\frac{4}{\rho^2}\Big)E(\sqrt{\rho})\\&-2(1-\rho)^2(2-\rho)\frac{1}{\rho^2}K(\sqrt{\rho})\Big]-E(\sqrt{\rho})\Big[(1-\rho)\Big(\frac{1}{2\rho}+\frac{3}{\rho^2}-\frac{8}{\rho^3}\Big)E(\sqrt{\rho})\\&+(1-\rho)\Big(\frac{1}{2\rho}-\frac{7}{\rho^2}+\frac{8}{\rho^3}\Big)K(\sqrt{\rho})\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

不难看出，当 $\rho\to1^{-0}$ 时， $\overline{\Delta}(\rho)$ 三项中的后二项的极限均为零，只有第一项的极限为 $\frac{3}{8}$, 所以 $\overline{\Delta}(\rho)$ 的极限为

$$\lim_{\rho\to1^{-0}}\overline{\Delta}(\rho)=\frac{3}{8}>0$$

可知 $\Delta(\rho)$ 在点 $\rho=1$ 左侧附近必为正.

再设 $\Delta(\rho)=\frac{\sqrt{2-\rho}}{(1-\rho)\rho^4}\overline{\overline{\Delta}}(\rho)$, 则

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\Delta}}(\rho)=&\Big\{-\frac{1}{4}(1-\rho)E(\sqrt{\rho})\Big[\Big(\frac{1}{2}\rho^2+3\rho-8\Big)E(\sqrt{\rho})+\Big(\frac{1}{2}\rho^2-7\rho+8\Big)K(\sqrt{\rho})\Big]\\&-\frac{1}{2\rho}\Big[E(\sqrt{\rho})-K(\sqrt{\rho})\Big]\Big[(1-\rho)\Big(-\frac{1}{4}\rho^2-19\rho+93\Big)E(\sqrt{\rho})+\frac{3}{4}E(\sqrt{\rho})\\&+(1-\rho)\Big(-\frac{1}{2}\rho^2+19\rho-24\Big)K(\sqrt{\rho})\Big]\Big\}\\&-\frac{1}{2(2-\rho)}\Big\{E(\sqrt{\rho})\Big[(1-\rho)\Big(-\frac{1}{4}\rho^2-19\rho+93\Big)E(\sqrt{\rho})+\frac{3}{4}E(\sqrt{\rho})\\&+(1-\rho)\Big(-\frac{1}{2}\rho^2+19\rho-24\Big)K(\sqrt{\rho})\Big]\\&+\frac{1}{4}(1-\rho)E(\sqrt{\rho})\Big[\rho(\rho^2-4\rho+4)E(\sqrt{\rho})-2\rho(1-\rho)(2-\rho)K(\sqrt{\rho})\Big]\Big\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4(2-\rho)^2}\Big\{\frac{1}{2}(1-\rho)\big[E(\sqrt{\rho})-K(\sqrt{\rho})\big]\\
&\cdot\big[\rho(\rho^2-4\rho+4)E(\sqrt{\rho})-2\rho(1-\rho)(2-\rho)K(\sqrt{\rho})\big]\\
&-(1-\rho)E(\sqrt{\rho})\Big[\rho\Big(\frac{1}{2}\rho^2+3\rho-8\Big)E(\sqrt{\rho})+\rho\Big(\frac{1}{2}\rho^2-7\rho+8\Big)K(\sqrt{\rho})\Big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

把 $\overline{\overline{\Delta}}(\rho)$ 展开为 ρ 的幂级数，得

$$\overline{\overline{\Delta}}(\rho)=\Big[-\frac{279}{64}\rho+o\,(\rho)\Big]\pi^2$$

可知 $\Delta(\rho)$ 在点 $\rho=0$ 右侧附近必为负，从而推知 $\Delta(\rho)$ 在 $0<\rho<1$ 内必有零点存在. 设此零点为 $\rho=\rho_0$, 则当 $\rho=\rho_0$ 时，方程组 (11) 必存在非零解. 而 $\rho=\rho_0$ 就是 $\overline{A}_1(\rho)$ 的一个三重零点. 于是有以下定理:

定理 4 设 $\rho=\rho_0$ 是函数 (12) 在 $0<\rho<1$ 内的零点，并设方程组

$$
\begin{cases}
f_1(\rho_0)\ell'+f_2(\rho_0)n'+f_3(\rho_0)\lambda'=0,\\
f_1'(\rho_0)\ell'+f_2'(\rho_0)n'+f_3'(\rho_0)\lambda'=0,\\
f_1''(\rho_0)\ell'+f_2''(\rho_0)n'+f_3''(\rho_0)\lambda'=0
\end{cases}
$$

的非零解为 $\ell'=\ell_0$, $n'=n_0$, $\lambda'=\lambda_0$. 如果系统 (2) 的参数满足以下条件

$$6\ell_1-3m_2+4n_1=\ell_0',\qquad -3n_1=n_0',\qquad \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}(4p_1-q_2)=\lambda_0',$$

则当 $0<\mu\ll 1$ 时，系统 (2) 是具有三重极限环系统的一个近似系统. 此三重极限环位于曲线

$$x=x\Big(t,\frac{1}{2}\sqrt{4-2\rho_0}\Big),\qquad y=y(t,\frac{1}{2}\sqrt{4-2\rho_0})$$

的小邻域内.

证 前面分析已知函数 (12) 在 $0<\rho<1$ 内存在零点 $\rho=\rho_0$, 这个零点就是 $\overline{A}_1(\rho)$ 的三重零点，根据 [3] 知定理 4 的结论成立. 证毕.

定理 4 就是二次系统出现三重极限环的一个具体例子. 因为系统 (2) 中 $\overline{A}_1(\rho)$ 的三重零点不具有位置上的任意性，所以系统 (2) 不可能出现三阶细分界线环. 事实上，至今无人能证明二次系统的三阶细分界线环的存在性，更谈不上构造出它的具体例子.

参 考 文 献

1 Li Chengzhi, Zhang Zifen. Unfolding of a Quadratic Intergrable System with Two Centers and Two Unbounded Heteroclinic Loops. *J. of Diff. Euq.*, 1997, 139: 146–193

2 Li Jibin, Chen Xiaoqiu. Poincare Bifurcation for a Class of Plane System. *Chinese Science Bulletin*, 1986, 16: 1213–1217 (in Chinese)

3 Shen Boqian. An Approximate System for a Differential System with a Multiple Limit Cycle. *Acta Mathematicac Applicatae Sinica*, 1998, 21: 282–287 (in Chinese)

4 Shen Boqian. An Approximate System for a Polynomial Differential System with a High Degree Separatrix Cycle. *J. of Math. Study*, 1998, 31: 404–410 (in Chinese)

STUDY ON THE POINCARE BIFURCATION OF QUADRATIC SYSTEM WITH TWO CENTERS AND TWO UNBOUNDED HETEROCLINIC LOOPS ONCE AGAIN

TAN Xinxin

(*Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian* 116024) & (*College of Information Engineering, Dalian University, Dalian* 116622)

FENG Enmin

(*Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technoligy, Dalian* 116024)

SHEN Boqian

(*Department of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian* 116029)

Abstract In this paper, we studay the Poincare bifurcation of quadratic system with two centers and two unbounded heteroclinic loops once again. There bounds are formed by the hyperbola and the equatorial arc. We construct some concrete examples, in which there are three limit cycles with (0,3) distribution or a triple limit cycle.

Key words Quadratic system, Poincare bifurcation, Abelian intergral, triple limit cycle