第 27 卷 第 2 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 27 No. 2
2004 年 5 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA May, 2004

研究简报

# 非线性灰色时滞离散系统的稳定性 *

周宗福　　郑祖庥
(安徽大学数学系，合肥 230039)

## 1 引言

本文研究非线性灰色时滞离散系统

$$\begin{aligned} x(k+1) =& A(\otimes)x(k) + f\big(k, x(\tau);\ \tau = k, k-1, \cdots, k-l\big) \\ \triangleq& A(\otimes)x(k) + f(k, x_k) \end{aligned} \tag{1}$$

以及

$$\begin{aligned} x(k+1) =& A(\otimes)x(k) + \sum_{h=1}^{l} A_h(\otimes)x(k-h) + f\big(k, x(\tau); \tau = k, k-1, \cdots, k-l\big) \\ \triangleq& A(\otimes)x(k) + \sum_{h=1}^{l} A_h(\otimes)x(k-h) + f(k, x_k) \end{aligned} \tag{2}$$

的零解的稳定性, 其中 $k \in Z$ ($Z$ 为全体整数之集), $l$ 为一确定的自然数； $x \in R^n$, $f : Z \times C \to R^n$, $C$ 为所有从 $\{-l, -l+1, \cdots, 0\}$ 到 $R^n$ 的映射组成的集合，$x_k \in C$, $x_k = x_k(r) = x(k+r)$ $(r = -l, -l+1, \cdots, 0)$; $A(\otimes) = \big(a_{ij}(\otimes)\big)$ 及 $A_k(\otimes) = \big(a_{ij}^{(h)}(\otimes)\big)$ $(h = 1, 2, \cdots, l)$ 为 $n \times n$ 矩阵，它们的元素不确知，只知其上、下界，即

$$p_{ij} \le a_{ij}(\otimes) \le q_{ij}, \qquad p_{ij}^{(h)} \le a_{ij}^{(h)}(\otimes) \le q_{ij}^{(h)},$$

$p_{ij}, q_{ij}, p_{ij}^{(h)}, q_{ij}^{(h)}$ 为已知常数； $f(k, 0) \equiv 0$, $f$ 的表达式中也可能含有灰数.

关于不含时滞的灰色离散系统的零解稳定性已有不少文献进行了讨论. [1–3] 讨论了线性灰色离散系统

$$x(k+1) = A(\otimes)x(k), \qquad x(0) = x_0$$

的稳定性, [4] 讨论了非线性灰色离散系统

$$x(k+1) = A(\otimes)x(k) + f\big(k, x(k)\big), \qquad x(0) = x_0$$

本文 2000 年 4 月 26 日收到. 2003 年 5 月 7 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (10241005 号) 和安徽省教育厅自然科学重点基金 (2003KJ005zd) 资助项目.

的稳定性. 但是对于灰色时滞离散系统的稳定性, 目前还研究得不多, 本文将对这一问题进行研究. 我们将先对一般的时滞差分方程给出两个方便实用的稳定性判别结论 (即本文引理 2 与引理 3), 再由此建立非线性灰色时滞离散系统 (1) 及 (2) 的稳定性代数判别准则.

对于系统 (1), (2), 令 $P=(p_{ij})_{n\times n}$, $Q=(q_{ij})_{n\times n}$, $P_h=(p_{ij}^{(h)})_{n\times n}$, $Q_h=(q_{ij}^{(h)})_{n\times n}$ $(h=1,2,\cdots,l)$, $N(P,Q)=\{A:A=(a_{ij})_{n\times n},\ p_{ij}\le a_{ij}\le q_{ij},\ i,j=1,2,\cdots,n\}$, $N(P_h,Q_h)=\{A_h:A_h=(a_{ij}^{(h)})_{n\times n},\ p_{ij}^{(h)}\le a_{ij}^{(h)}\le q_{ij}^{(h)},\ i,j=1,2,\cdots,n\}$ $(h=1,2,\cdots,l)$. $N(P,Q)$ 及 $N(P_h,Q_h)$ 均称为区间矩阵.

**定义 1** 如果对任意的 $A\in N(P,Q)$, 时滞差分系统

$$x(k+1)=Ax(k)+f(k,x_k) \tag{3}$$

的零解一致渐近稳定 (或全局一致渐近稳定), 则称系统 (1) 的零解一致渐近稳定 (或全局一致渐近稳定).

类似定义系统 (2) 的稳定性.

在下面讨论中, 我们约定 $k,r$ 均取整数.

## 2 一些引理

**引理 1**[5] 设 $A$ 为 $n\times n$ 矩阵, 若 $A$ 的谱半径 $r(A)<1$, 则对任意给定的 $n$ 阶对称矩阵 $Y$, 矩阵方程 $A^TBA-B=-Y$ 有唯一解 $B$ ($B$ 亦为对称阵), 且如果 $Y$ 为正定的, 则 $B$ 也是正定的.

**注 1** $A$ 的谱半径 $r(A)$ 定义为 $A$ 的所有特征值的模的最大者.

考虑一般时滞差分系统

$$x(k+1)=F\big(k,x(\tau);\tau=k,k-1,\cdots,k-l\big)\triangleq F(k,x_k), \tag{4}$$

其中 $F:Z\times C\to R^n$, $F(k,0)\equiv 0$.

**引理 2** 假设 $u,v:R_+\to R_+$ 连续 ($R_+=[0,+\infty)$), 严格单调增加, $u(0)=v(0)=0$; $w_1,w_2:R_+\to R_+$ 连续, $w_2(0)=0$, 当 $s>0$ 时, $w_1(s)>0$, $w_2(s)<s$. 如果存在函数 $V:Z\times R^n\to R_+$, 满足

(i) $u(|x|)\le V(k,x)\le v(|x|)(\forall\, k\in Z,\ \forall\, x\in R^n)$;

(ii) 存在 $H>0$, 当 $\|x_k\|=\max\limits_{-l\le r\le 0}|x(k+r)|\le H$ 时,

$$\Delta V_{(4)}\big(k,x(k)\big)\le G\Big[V\big(k,x(k)\big),\ \max_{-l\le r\le 0}V\big(k+r,x(k+r)\big)\Big],$$

其中 $G:R_+\times R_+\to R$ 连续, 当 $s>0$ 时, $G(s,s)=-w_1(s)$, 当 $q\ge s$ 时, $G(s,q)\le w_2(q-s)$, 则系统 (4) 的零解一致渐近稳定.

**注 2** 函数 $V(k,x)$ 沿系统 (4) 的差分定义为:

$$\Delta V_{(4)}\big(k,x(k)\big)=V\big(k+1,x(k+1)\big)-V\big(k,x(k)\big).$$

**引理 3** 若函数 $u,v,w_1,w_2,G$ 如引理 2 所设, 且设 $\lim\limits_{s\to+\infty}u(s)=+\infty$. 如果存在函数

$V: Z\times R^n\to R_+$, 满足

$$\text{(i)}\qquad u\big(|x|\big)\le v(k,x)\le v\big(|x|\big)(\forall\, k\in Z,\ \forall\, x\in R^n);$$

$$\text{(ii)}\qquad \Delta V_{(4)}\big(k,x(k)\big)\le G\left[V\big(k,x(k)\big),\ \max_{-l\le r\le 0}V\big(k+r,x(k+r)\big)\right],$$

则系统 (4) 的零解全局一致渐近稳定.

引理 2 及引理 3 的证明因篇幅所限，略去.

## 3 主要结果

对于系统 (1) 及系统 (2), 令 $M=(m_{ij})_{n\times n}$, $M_h=(m_{ij}^{(h)})_{n\times n}\,(h=1,2,\cdots,l)$, $m_{ij}=\max\big\{|p_{ij}|,|q_{ij}|\big\}$, $m_{ij}^{(h)}=\max\big\{|p_{ij}^{(h)}|,|q_{ij}^{(h)}|\big\}$, $i,j=1,2,\cdots,n$.

**定理 1** 若 $r(M)<1$, 且 $\big|f(k,\varphi)\big|=o\big(\|\varphi\|\big)$ 对 $k$ 一致成立 $\big((k,\varphi)\in Z\times C\big)$, 则灰色时滞离散系统 (1) 的零解一致渐近稳定 ($r(M)$ 表示 $M$ 的谱半径).

证 任取 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in N(P,Q)$, 下面证明系统 (3) 的零解为一致渐近稳定的.

由 [1] 的引理 1 知， $r(A)\le r(M)<1$. 再根据本文引理 1, 令 $Y=I$ ($I$ 为 $n$ 阶单位阵), 则存在唯一的正定矩阵 $B$, 满足 $A^TBA-B=-Y=-I$.

取 $V(k,x)=x^TBx\big((k,x)\in Z\times R^n\big)$. 用 $\lambda_1,\lambda_2$ 分别表示 $B$ 的最小、最大特征值，则 $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_1|x|^2=\lambda_1x^Tx\le x^TBx\le\lambda_2x^Tx=\lambda_2|x|^2$ $(\forall\, x\in R^n)$.

$$\Delta V_{(3)}\big(k,x(k)\big)=-x^T(k)x(k)+2x^T(k)A^TBf(k,x_k)+f^T(k,x_k)Bf(k,x_k).$$

又 $\big|f(k,x_k)\big|=o\big(\|x_k\|\big)$ 对 $k$ 一致成立，由此可以证明：存在 $H>0$, 当 $\|x_k\|\le H$ 时,

$$\begin{aligned}\Delta V_{(3)}\big(k,x(k)\big)\le&-\frac{3}{4(1+\lambda_2)}V\big(k,x(k)\big)+\frac{1}{2(1+\lambda_2)}\max_{-l\le r\le 0}V\big(k+r,x(k+r)\big)\\=&G\Big[V\big(k,x(k)\big),\ \max_{-l\le r\le 0}V\big(k+r,x(k+r)\big)\Big],\end{aligned}$$

其中 $G(s,q)=-\frac{3s}{4(1+\lambda_2)}+\frac{q}{2(1+\lambda_2)}$ $(s\ge 0,\ q\ge 0)$. 所以由引理 2 知系统 (3) 的零解一致渐近稳定．再由 $A$ 的任意性及定义 1 知灰色时滞离散系统 (1) 的零解一致渐近稳定.

由定理 1 及 [4, 定理 3] 的证明可以得到：

**定理 2** 对于系统 (1), 若 $P$ 为非负不可约矩阵， $\big|f(k,\varphi)\big|=o\big(\|\varphi\|\big)$ 对 $k$ 一致成立 $\big((k,\varphi)\in Z\times C\big)$, 且存在 $n$ 个正数 $r_1,r_2,\cdots,r_n$, 使得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{q_{ij}r_j}{r_i}\le 1,\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

这 $n$ 个不等式中至少有一个为严格小于的不等式，则系统 (1) 的零解为一致渐近稳定的.

**注 3** [4] 的定理 1 与定理 3 分别是本文定理 1 与定理 2 的特殊情形.

利用引理 2 及引理 3, 可得系统 (2) 如下的稳定性定理：

**定理 3** 对于灰色时滞离散系统 (2), 如果 $\big(\sum\limits_{i,j=1}^{n}m_{ij}^2\big)^{\frac12}+\sum\limits_{h=1}^{l}\Big[\sum\limits_{i,j=1}^{n}(m_{ij}^{(h)})^2\Big]^{\frac12}<1$, 且 $\big|f(k,\varphi)\big|=o\big(\|\varphi\|\big)$ 对 $k$ 一致成立 $\big((k,\varphi)\in Z\times C\big)$, 则系统 (2) 的零解一致渐近稳定.

**定理 4** 对于系统 (2), 如果存在 $\beta_0 > 0$, 使得 $\left|f(k,\varphi)\right| \leq \beta_0\|\varphi\|$ 对 $k$ 一致成立 $\big((k,\varphi) \in Z \times C\big)$, 且

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \sum_{h=1}^{l}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}(m_{ij}^{(h)})^2\Big]^{\frac{1}{2}} + \beta_0 < 1,$$

则系统 (2) 的零解全局一致渐近稳定.

**注 4** 定理 3 和定理 4 分别推广了 [4] 的定理 2 和定理 4.

**注 5** 由于系统 (1) 是系统 (2) 的特殊情形, 所以定理 3 与定理 4 也可用于系统 (1), 但很明显定理 3 并没有包含定理 1 和定理 2.

## 参 考 文 献

1 Zhou Chaoshun, Deng Julong, et al. Sufficient Criteria for the Stability of Grey Discrete-time System. *J. Huazhong Uni. of Sci. & Tech.*, 1988, 16(4): 141–145 (in Chinese)

2 Peng Xiaolin, Luo Xiao. The Algebraic Criteria for the Stability and Instability of Grey Discretic System. *Mathematica Applicata*, 1991, 4(2): 76–80 (in Chinese)

3 Huang Tingzhu, Cheng Xiaoyu, et al. The Stability of Grey Discrete Systems. *Control Theory and Applications*, 1999, 16(2): 244–247 (in Chinese)

4 Chen Jufang. Stability of Trivial Solution on Nonlinear Gray Discrete Dynamic System. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1995, 18(1): 123–128 (in Chinese)

5 Wang Lian, Wang Moqiu. Ordinary Difference Equations. Wulumuqi: Xinjiang University Press, 1991 (in Chinese)