第 28 卷 第 1 期 应用数学学报 Vol. 28 No. 1
2005 年 1 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Jan., 2005

变系数线性结构关系 EV 模型的参数估计*

欧阳光
(湘南学院数学系, 郴州 423000)
(E-mail: ouyangguanghn@163.com)

摘 要 利用加权正交回归最小二乘法给出了变系数一维线性结构关系 EV 模型中的参数估计, 证明了估计的弱相合性和强相合性.

关键词 变系数线性结构关系 EV 模型; 加权正交回归最小二乘法; 相合性
MR(2000) 主题分类 62J05; 62H12
中图分类 O212.1

1 背景与模型

EV (Errors-in-Variables) 模型具有很长的研究历史, 特别是线性 EV 模型 (见 [1–7] 和它们所引的文献). 在许多实际问题中, 线性 EV 模型中系数往往是随时间或温度等因素的变化而变化. 另一方面, 变系数线性回归模型也有不少学者研究过, 并且有着广泛的应用 [8]. 但在许多实际问题中, 自变量的观测值存在着不可忽视的误差 (如测量工具等因素引起的误差). 例如, 经济中的投入与产出的关系, 林业中的树木平均胸围与树高的关系, 股票市场中小盘指数与大盘指数的关系, 在某时刻 t 通常都是线性的, 其中线性系数随时间的变化而变化. 这就提出了一个新的研究方向: 变系数线性结构关系 EV 模型.

假定在参变量 t 处自变量 x 与因变量 y 满足一元线性关系

$$y = a(t) + b(t)x, \tag{1.1}$$

这里 x, y 是随机变量, t 是实变量, $a(t), b(t)$ 是有界连续函数, 且 $b(t) \neq 0$, 称 $a(t), b(t)$ 为变系数. 假定 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是 $(0, 1)$ 中的 n 个设计点, 在每个点 t_i 处作观测, 获得样本观测值 (t_i, X_i, Y_i), $i = 1, 2, \cdots, n$. 设 X_i 的真值为 x_i, Y_i 的真值为 y_i, x_i, y_i 是不能直接观测的随机变量. 本文的模型是

$$\begin{cases} y_i = a(t_i) + b(t_i)x_i, \\ X_i = x_i + u_i, \\ Y_i = y_i + e_i, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ iid, Ex, Ex^2 存在, 测量误差 (u_i, e_i) iid, $E(u_i, e_i) = 0$, $\mathrm{cov}\left[(u_i e_i)^\tau\right] =$

本文 2003 年 1 月 7 日收到. 2004 年 9 月 21 日收到修改稿.
* 湖南省教育厅科学研究 (03C007) 资助项目.

$\sigma^2\Sigma$ ($\sigma^2>0$, $\Sigma>0$), x_i 与 u_i, y_i 与 e_i, x_i 与 e_i, 都不相关, $i=1,2,\cdots,n$. 称 (1.2) 为变系数线性结构关系 EV 模型.

注 只要对 (1.2) 作变换

$$(X_i^*,Y_i^*)^\tau=\Sigma^{-\frac12}(X_i,Y_i)^\tau,\qquad (x_i^*,y_i^*)^\tau=\Sigma^{-\frac12}(x_i,y_i)^\tau,\qquad (u_i^*,e_i^*)^\tau=\Sigma^{-\frac12}(u_i,e_i)^\tau,$$

则 $\mathrm{cov}\left[(u_i^*,e_i^*)^\tau\right]=\sigma^2I_2$. 因此在 (1.2) 中以下假定 $\mathrm{cov}\left[(u_i,e_i)^\tau\right]=\sigma^2I_2$, σ^2 未知.

在模型 (1.2) 中, 令 $a(t)=a$, $b(t)=b$, a,b 未知, 就是 [1–7] 所研究的常系数线性结构关系 EV 模型. 关于变系数线性结构关系 EV 模型的讨论目前尚无人进行深入研究, 本文感兴趣的是估计模型 (1.2) 中变系数 $a(t),b(t)$ 在 $t=t_0\in(0,1)$ 处的值 $a(t_0),b(t_0)$ 和 σ^2. 文中采用加权正交回归最小二乘方法, 构造出变系数一维线性结构关系 EV 模型的参数估计, 并证明了它们具有良好的收敛性.

2 $a(t_0)$, $b(t_0)$ 和 σ^2 的估计方法

为了利用 t_i 处的观测值 (t_i,X_i,Y_i), $i=1,2,\cdots n$ 来估计 $a(t_0)$, $b(t_0)$ 和 σ^2. 下面采用加权正交回归最小二乘法.

称 $W_{ni}(t_0)$ 为权函数, $i=1,2,\cdots,n$, 满足 (i) $W_{ni}(t_0)>0$, (ii) $\sum\limits_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)=1$. 关于权函数的选择, 可先选定适当的有界概率密度函数 $k(y)$, 称之为核函数. 然后选定窗宽 $h_n\in\left(0,\frac12\right)$. 由事先确定的设计点 $0\le t_1<t_2<\cdots<t_n\le 1$ 及 $t_0\in(0,1)$. 构造权函数

$$W_{ni}(t_0)=\int_{A_i}W_n(s,t_0)\,\mathrm{d}s,\tag{2.1}$$

其中 $A_1=\left[0,\frac{t_1+t_2}{2}\right)$, $A_i=\left[\frac{t_{i-1}+t_i}{2},\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)$, $i=2,3,\cdots,n-1$, $A_n=\left[\frac{t_{n-1}+t_n}{2},1\right]$.

$$W_n(s,t)=\frac{1}{h_n}\left[k\left(\frac{s-t}{h_n}\right)+k\left(\frac{s+t}{h_n}\right)I\left\{0\le s,t\le h_n\right\}+k\left(\frac{2-s-t}{h_n}\right)I\left\{1-h_n\le s,t\le 1\right\}\right].$$

核函数 $k(y)$ 可选择为

$$1)\quad k(y)=\frac{15}{16}(1-y^2)^2I\{|y|\le 1\},\qquad 2)\quad k(y)=\frac34(1-y^2)I\{|y|\le1\}.$$

一般窗宽 h_n 随 n 增大而减少, 理论上 h_n 满足当 $n\to\infty$ 时, $h_n\to0$, $nh_n\to\infty$. 本文采用以下记号:

$$\widetilde{X^\alpha}=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)X_i^\alpha,\qquad \widetilde{Y^\alpha}=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)Y_i^\alpha,\qquad \alpha=1,2,$$

$$\widetilde{XY}=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)X_iY_i,$$

$$S_X^2=\widetilde{X^2}-(\widetilde{X})^2,\qquad S_Y^2=\widetilde{Y^2}-(\widetilde{Y})^2,\qquad S_{XY}^2=\widetilde{XY}-\widetilde{X}\widetilde{Y}.$$

考虑样本点 $\{(X_i,Y_i):i=1,2,\cdots,n\}$ 到 (t_0-h_n,t_0+h_n) 内的局部回归直线 $y-bx-a=0$ 的正交距离平方加权和

$$Q:=Q(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(Y_i-bX_i-a)^2W_{ni}(t_0)}{1+b^2}.\tag{2.2}$$

达到最小为原则来估计 $a(t_0),b(t_0)$. 即 $a(t_0),b(t_0)$ 的估计量 $\widehat{a}(t_0),\widehat{b}(t_0)$ 满足

$$Q(\widehat{a}(t_0),\widehat{b}(t_0))=\min Q(a,b).$$

为了求出 $\widehat{a}(t_0),\widehat{b}(t_0)$, 我们先对 Q 关于 a,b 求偏导数，然后令其等于零，即

$$\frac{\partial Q}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}(1+b^2)^{-1}(Y_i-bX_i-a)W_{ni}(t_0)=0,$$

解得

$$a=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)Y_i-b\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)X_i=\widetilde{Y}-b\widetilde{X}. \tag{2.3}$$

由

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial b}=&-2(1+b^2)^{-2}\sum_{i=1}^{n}\Big[(Y_i-a-bX_i)W_{ni}(t_0)X_i(1+b^2)\\&+b(Y_i-a-bX_i)^2W_{ni}(t_0)\Big]=0,\end{aligned}$$

得

$$(1-b^2)\widetilde{XY}-a(1-b^2)\widetilde{X}-b\widetilde{X^2}+b\widetilde{Y^2}-2ab\widetilde{Y}+a^2b=0.$$

将 (2.3) 代入上式整理得

$$\begin{aligned}&(1-b^2)(\widetilde{XY}-\widetilde{X}\widetilde{Y})-b(\widetilde{X^2}-(\widetilde{X})^2)+b(\widetilde{Y^2}-(\widetilde{Y})^2)=0,\\&b^2S_{XY}^2-b(S_Y^2-S_X^2)-S_{XY}^2=0,\end{aligned}$$

由此解得

$$b=\frac{S_Y^2-S_X^2}{2S_{XY}^2}\pm\sqrt{\Big(\frac{S_Y^2-S_X^2}{2S_{XY}^2}\Big)^2+1}.$$

由此便可定义 $b(t_0)$ 的加权正交回归最小二乘估计量如下.

(1) 当 $S_{XY}^2>0$ 时，

$$\widehat{b}(t_0)=\frac{S_Y^2-S_X^2}{2S_{XY}^2}+\sqrt{\Big(\frac{S_Y^2-S_X^2}{2S_{XY}^2}\Big)^2+1}, \tag{2.4.1}$$

此时 $\widehat{b}(t_0)>0$.

(2) 当 $S_{XY}^2<0$ 时，

$$\widehat{b}(t_0)=\frac{S_Y^2-S_X^2}{2S_{XY}^2}-\sqrt{\Big(\frac{S_Y^2-S_X^2}{2S_{XY}^2}\Big)^2+1}, \tag{2.4.2}$$

此时 $\widehat{b}(t_0)<0$. 由 (2.3) 便可得到 $a(t_0)$ 的加权正交回归最小二乘估计量

$$\widehat{a}(t_0)=\widetilde{Y}-\widehat{b}(t_0)\widetilde{X}. \tag{2.5}$$

利用 $Q\big(\widehat{a}(t_0),\widehat{b}(t_0)\big)$ 定义 σ^2 的加权正交回归最小二乘估计量

$$\widehat{\sigma^2}(t_0)=\big[1+\big(\widehat{b}(t_0)\big)^2\big]^{-1}\sum_{i=1}^{n}\big(Y_i-\widehat{a}(t_0)-\widehat{b}(t_0)X_i\big)^2W_{ni}(t_0). \tag{2.6}$$

3 主要结果

本文不妨假定核权函数 $\{W_{ni}(t_0)\}_{i=1}^{n}$ 由 (2.1) 给出，其中核函数 $k(\cdot)$ 是具有紧支撑 $[-1,1]$ 的有界概率密度函数，设计点满足 $0\le t_1<t_2<\cdots<t_n\le 1$ 且满足条件

$$\max_{1\le i\le n}\big\{|t_{i+1}-t_i|\big\}=O\Big(\frac{\log n}{n}\Big). \tag{3.1}$$

条件 (3.1) 保证了 $[0,1]$ 内的 n 个设计点不能过于聚集在某点的附近 (否则， t_0 的选取会影响到估计的性质和精度) 在这些条件下，本文得到了如下主要结果:

定理 1 当 $\frac{nh_n}{\log n}\to\infty\ (n\to\infty)$ 时， $\widehat{a}(t_0),\widehat{b}(t_0)$ 和 $\widehat{\sigma^2}(t_0)$ 分别是 $a(t_0),b(t_0)$ 和 σ^2 的弱相合估计，当 $n\to\infty$ 时,

$$\widehat{a}(t_0)\xrightarrow{P}a(t_0),\qquad \widehat{b}(t_0)\xrightarrow{P}b(t_0),\qquad \widehat{\sigma^2}(t_0)\xrightarrow{P}\sigma^2 \tag{3.2}$$

定理 2 当 $\frac{\sqrt{n}h_n}{(\log n)^2}\to\infty\ (n\to\infty)$ 时， $\widehat{a}(t_0),\widehat{b}(t_0)$ 和 $\widehat{\sigma^2}(t_0)$ 分别是 $a(t_0),b(t_0)$ 和 σ^2 的强相合估计，当 $n\to\infty$ 时,

$$\widehat{a}(t_0)\longrightarrow a(t_0),\quad \text{a.s.},\qquad \widehat{b}(t_0)\longrightarrow b(t_0),\quad \text{a.s.},\qquad \widehat{\sigma^2}(t_0)\longrightarrow\sigma^2,\quad \text{a.s.} \tag{3.3}$$

4 定理的证明

为了讨论 $\widehat{a}(t_0),\widehat{b}(t_0),\widehat{\sigma^2}(t_0)$ 的收敛性，先证明以下几个引理.

引理 1 $\{W_{ni}(t_0)\}_{i=1}^{n}$ 具有以下性质:

1) 对于任意的正数 ε, $n\to\infty$ 时

$$\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)I\big\{|t_i-t_0|\ge\varepsilon\big\}\longrightarrow 0; \tag{4.1}$$

2) 存在正常数 A, 使得

$$\max_{1\le i\le n}W_{ni}(t_0)\le\frac{A\log n}{nh_n}. \tag{4.2}$$

证 首先因 $\max\limits_{1\le i\le n}\big\{|t_{i+1}-t_i|\big\}=O\big(\frac{\log n}{n}\big)$, 则存在 $C>0$ 使得 $\max\limits_{1\le i\le n}|t_{i+1}-t_i|\le\frac{C\log n}{n}$.

1) 当 $s\in A_i$ 时,

$$|s-t_i|\le\max_{1\le i\le n}|t_{i+1}-t_i|\le\frac{C\log n}{n}.$$

因而当 $s\in A_i$，$|t_i-t_0|\geq\varepsilon$ 且 n 充分大时有

$$\begin{aligned}|s-t_0|=&|t_i-t_0+s-t_i|\geq|t_i-t_0|-|s-t_i|\\ \geq&|t_i-t_0|-\frac{C\log n}{n}\geq\varepsilon-\frac{C\log n}{n}>\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

故

$$I\{|t_i-t_0|\geq\varepsilon\}\cap\{s\in A_i\}\leq I\Big\{|s-t_0|\geq\frac{\varepsilon}{2}\Big\}\bigcap\{s\in A_i\},\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

又由于 $h_n\to 0\ (n\to\infty)$, 因而当 $|s-t_0|\geq\frac{\varepsilon}{2}$ 且 n 充分大时 $\frac{|s-t_0|}{h_n}$ 充分大. 继由 $k(\cdot)$ 是具有紧支撑 $[-1,1]$ 的有界概率密度函数可知，当 $s\in A_i$，$i=1,2,\cdots,n$，$|s-t_0|\geq\frac{\varepsilon}{2}$ 时，只要 n 充分大便有 $\left|\frac{s-t_0}{h_n}\right|\geq\frac{\varepsilon}{2h_n}>1$. 所以 $k\big(\frac{s-t_0}{h_n}\big)=0$. 从而当 $s\in A_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 只要 n 充分大，便有

$$\frac{1}{h_n}k\Big(\frac{s-t_0}{h_n}\Big)I\left\{|s-t_0|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}=0.$$

不难看出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h_n}k\Big(\frac{s+t_0}{h_n}\Big)I\Big\{|s-t_0|\geq\frac{\varepsilon}{2},\ 0\leq s,t_0\leq h_n\Big\}=0;\\ &\frac{1}{h_n}k\Big(\frac{2-s-t_0}{h_n}\Big)I\left\{|s-t_0|\geq\frac{\varepsilon}{2},1-h_n\leq s,\ t_0\leq 1\right\}=0.\end{aligned}$$

这样，当 n 充分大时

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)I\{|t_i-t_0|\geq\varepsilon\}=\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}W_n(s,t_0)\,\mathrm{d}sI\{|t_i-t_0|\geq\varepsilon\}\\ =&\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}W_n(s,\,t_0)\,I\{|t_i-t_0|\geq\varepsilon\}\,\mathrm{d}s\\ \leq&\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}W_n(s,t_0)I\left\{|s-t_0|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\mathrm{d}s\\ =&\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}\frac{1}{h_n}k\Big(\frac{s-t_0}{h_n}\Big)I\left\{|s-t_0|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\mathrm{d}s\\ &+\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}\frac{1}{h_n}k\Big(\frac{s+t_0}{h_n}\Big)I\Big\{|s-t_0|\geq\frac{\varepsilon}{2},\ 0\leq s,\ t_0\leq h_n\Big\}\mathrm{d}s\\ &+\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}\frac{1}{h_n}k\Big(\frac{2-s-t_0}{h_n}\Big)I\left\{|s-t_0|\geq\frac{\varepsilon}{2},\ 1-h_n\leq s,\ t_0\leq 1\right\}\mathrm{d}s=0.\end{aligned}$$

故 (4.1) 成立.

2) 设 $k(\cdot)\leq M$, 记 $A=CM$, 则 $W_n(s,t_0)\leq\frac{M}{h_n}$.

$$\begin{aligned}\max_{1\leq i\leq n}W_{ni}(t_0)=&\max_{1\leq i\leq n}\int_{A_i}W_n(s,t_0)\,\mathrm{d}s\\ \leq&\frac{M}{h_n}\max_{1\leq i\leq n}|A_i|=\frac{M}{h_n}\max_{1\leq i\leq n}\frac{|t_i-t_{i-1}|+|t_{i+1}-t_i|}{2}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{M}{h_n} \max_{1 \leq i \leq n} |t_{i+1} - t_i| \leq \frac{CM\log n}{nh_n} = \frac{A\log n}{nh_n}.$$

(4.2) 获证.

引理 2 设 $f(t)$ 有界且在 t_0 附近连续, 则

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) f(t_i) = f(t_0). \tag{4.3}$$

证　往证

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) \big| f(t_i) - f(t_0) \big| = 0. \tag{4.4}$$

因 $f(t)$ 有界, 不妨设 $\big|f(t)\big| \leq G$. 又因 $f(t)$ 在 t_0 附近连续. 因此对于任意小的正数 ε, 存在充分小的 $\delta > 0$, 当 $|t_i - t_0| < \delta$ 时, $\big|f(t_i) - f(t_0)\big| < \varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)\big|f(t_i) - f(t_0)\big| &= \sum_{|t_i - t_0| < \delta} W_{ni}(t_0)\big|f(t_i) - f(t_0)\big| + \sum_{|t_i - t_0| \geq \delta} W_{ni}(t_0)\big|f(t_i) - f(t_0)\big| \\
&< \varepsilon \sum_{|t_i - t_0| < \delta} W_{ni}(t_0) + 2G \sum_{|t_i - t_0| \geq \delta} W_{ni}(t_0) \\
&< \varepsilon \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) + 2G \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) I\big\{|t_i - t_0| \geq \delta\big\} \\
&= \varepsilon + 2G \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) I\big\{|t_i - t_0| \geq \delta\big\}.
\end{aligned}$$

由 (4.1) 及 ε 的任意性, 可知 (4.4) 成立.

引理 3 设 $f(t)$ 为有界函数. 随机变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ iid. 存在有限数 D, 使得 $\mathrm{Var}\,(\xi_i) \leq D$.

1) 若 $\frac{nh_n}{\log n} \to \infty$ ($n \to \infty$ 时), 则当 $n \to \infty$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) f(t_i)(\xi_i - E\xi_i) \xrightarrow{P} 0. \tag{4.5}$$

2) 若 $\frac{\sqrt{n}h_n}{(\log n)^2} \to \infty$ ($n \to \infty$ 时), 则当 $n \to \infty$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) f(t_i)(\xi_i - E\xi_i) \longrightarrow 0, \qquad \text{a.s.} \tag{4.6}$$

证　设 $\sup\limits_t \big|f(t)\big| = G$. 1) 只须证明: 当 $n \to \infty$ 时,

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) f(t_i)(\xi_i - E\xi_i) \right) \longrightarrow 0. \tag{4.7}$$

事实上，由 (4.2) 有

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^n W_{ni}(t_0)f(t_i)(\xi_i-E\xi_i)\Big)=\sum_{i=1}^n W_{ni}^2(t_0)f^2(t_i)\mathrm{Var}(\xi_i)\le DG^2\sum_{i=1}^n W_{ni}^2(t_0)$$
$$\le DG^2\max_{1\le i\le n}W_{ni}(t_0)\le\frac{DG^2A\log n}{nh_n}.$$

由条件 $\frac{nh_n}{\log n}\to\infty(n\to\infty))$ 可知 (4.7) 成立.

2) 记 $W_{ni}^*=W_{ni}(t_0)f(t_i)$, $\xi_i^*=\xi_i-E\xi_i$, 则 $E\xi_i^*=0$, $E(\xi_i^*)^2=\mathrm{Var}(\xi_i^*)=\mathrm{Var}(\xi_i)\le D$. 且 $\xi_1^*,\xi_2^*,\cdots,\xi_n^*$ iid. 由 (4.2) 有

$$\max_{1\le i\le n}|W_{ni}^*|=\max_{1\le i\le n}\big|f(t_i)\big|W_{ni}(t_0)\le G\max_{1\le i\le n}W_{ni}(t_0)\le GA\frac{\log n}{nh_n}:=\frac{A^*\log n}{nh_n}. \tag{4.8}$$

要证明 (4.6) 成立，转化为证明：当 $\frac{\sqrt{n}h_n}{(\log n)^2}\to\infty$ 时，

$$\sum_{i=1}^n W_{ni}^*\xi_i^*\longrightarrow 0,\qquad \text{a.s.} \tag{4.9}$$

为证 (4.9), 对于任意给定的正数 ε, 记

$$\xi_i^{(1)}=\xi_i^*I\{|\xi_i^*|\le\varepsilon^2\sqrt{i}\},\qquad \xi_i^{(2)}=\xi_i^*I\{|\xi_i^*|>\varepsilon^2\sqrt{i}\},$$

则 $\xi_i^*=\xi_i^{(1)}+\xi_i^{(2)}$, $E\xi_i^{(1)}=-E\xi_i^{(2)}$, $\{|\xi_i^{(2)}|-E|\xi_i^{(2)}|\}_{i=1}^n$ 是零均值的独立随机变量．由于

$$E|\xi_i^{(2)}|=E|\xi_i^*|I\{|\xi_i^*|>\varepsilon^2\sqrt{i}\}=\int_{-\infty}^{\infty}|x|I\{|x|>\varepsilon^2\sqrt{i}\}\,\mathrm{d}F(x)=\int_{|x|>\varepsilon^2\sqrt{i}}|x|\,\mathrm{d}F(x)$$
$$<\int_{|x|>\varepsilon^2\sqrt{i}}\frac{x^2}{\varepsilon^2\sqrt{i}}\,\mathrm{d}F(x)<\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\varepsilon^2\sqrt{i}}\,\mathrm{d}F(x)=\varepsilon^{-2}i^{-\frac12}E(\xi_i^*)^2\le\varepsilon^{-2}i^{-\frac12}D.$$

所以当 n 充分大时有

$$\sum_{i=1}^n E|\xi_i^{(2)}|\le\varepsilon^{-2}D\sum_{i=1}^n i^{-\frac12}\le 2\sqrt{n}D\varepsilon^{-2}<\frac12\varepsilon\sqrt{n}\log n. \tag{4.10}$$

(这里用到了当 n 充分大时有 $4D<\varepsilon^3\log n$). 由于 $\{\xi_i^*\}_{i=1}^n$ iid 且 $E(\xi_i^*)^2<+\infty$. 所以

$$\max_{1\le i\le n}|\xi_i^{(2)}|=\max_{1\le i\le n}|\xi_i^*|I\{|\xi_i^*|>\varepsilon^2\sqrt{i}\}\le\max_{1\le i\le n}|\xi_i^*|\le\varepsilon^2\sqrt{n},\qquad \text{a.s.}$$

从而

$$\max_{1\le i\le n}\big||\xi_i^{(2)}|-E|\xi_i^{(2)}|\big|\le\max_{1\le i\le n}\big(|\xi_i^{(2)}|+E|\xi_i^{(2)}|\big)\le\max_{1\le i\le n}|\xi_i^{(2)}|+\max_{1\le i\le n}E|\xi_i^{(2)}|$$
$$\le\varepsilon^2\sqrt{n}+\varepsilon^2\sqrt{n}\le 2\varepsilon^2\sqrt{n},\qquad \text{a.s.}$$

又 $E\big(|\xi_i^{(2)}|-E|\xi_i^{(2)}|\big)^2\le E|\xi_i^{(2)}|^2\le E|\xi_i^*|^2\le D$, 从而

$$\sum_{i=1}^n E\big(|\xi_i^{(2)}-E|\xi_i^{(2)}|\big)^2\le nD.$$

由 (4.10) 及 [9, 引理 3.3] (Bennett 指数不等式) 有

$$\begin{aligned}P\Big(\sum_{i=1}^n|\xi_i^{(2)}|\ge\varepsilon\sqrt{n}\log n\Big)=&P\Big\{\sum_{i=1}^n\big(|\xi_i^{(2)}|-E|\xi_i^{(2)}|\big)\ge\varepsilon\sqrt{n}\log n-\sum_{i=1}^n E|\xi_i^{(2)}|\Big\}\\ \le&P\Big\{\Big|\sum_{i=1}^n\big(|\xi_i^{(2)}|-E|\xi_i^{(2)}|\big)\Big|\ge\frac12\varepsilon\sqrt{n}\log n\Big\}\\ \le&2\exp\Big\{-\frac{n(\frac12\varepsilon\frac{1}{\sqrt{n}}\log n)^2}{2(D+2\varepsilon^2\sqrt{n}\frac12\varepsilon\frac{1}{\sqrt{n}}\log n)}\Big\}\\ \le&2\exp\Big\{-\frac{\log n}{10\varepsilon}\Big\}\le 2n^{-2}\quad(\text{只要}\ \ \varepsilon<\frac{1}{20}).\end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^\infty n^{-2}<\infty$, 故

$$\sum_{n=1}^\infty P\Big(\sum_{i=1}^n|\xi_i^{(2)}|\ge\varepsilon\sqrt{n}\log n\Big)<\infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理有

$$\sum_{i=1}^n|\xi_i^{(2)}|<\varepsilon\sqrt{n}\log n,\qquad \text{a.s.}\tag{4.11}$$

由 (4.8), (4.10), (4.11) 可得

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{i=1}^n W_{ni}^*(\xi_i^{(2)}-E\xi_i^{(2)})\Big|\le\max_{1\le i\le n}|W_{ni}^*|\Big(\sum_{i=1}^n|\xi_i^{(2)}|+\sum_{i=1}^n E|\xi_i^{(2)}|\Big)\\ \le&\frac{A^*\log n}{nh_n}(\varepsilon\sqrt{n}\log n+\frac12\varepsilon\sqrt{n}\log n)=\frac32\varepsilon A^*\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}h_n},\qquad\text{a.s.}\end{aligned}$$

由条件 $\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}h_n}\to 0(n\to\infty)$, 故当 $n\to\infty$ 时,

$$\sum_{i=1}^n W_{ni}^*(\xi_i^{(2)}-E\xi_i^{(2)})\longrightarrow 0,\qquad\text{a.s.}\tag{4.12}$$

记 $Z_{ni}:=W_{ni}^*(\xi_i^{(1)}-E\xi_i^{(1)})$, $b_n:=\max\limits_{1\le i\le n}|W_{ni}^*|\le\frac{A^*\log n}{nh_n}$, 则 $\{Z_{ni}\}_{i=1}^n$ 是零均值相互独立的随机变量序列, 且

$$\begin{aligned}&\max_{1\le i\le n}|Z_{ni}|=\max_{1\le i\le n}|W_{ni}^*||\xi_i^{(1)}-E\xi_i^{(1)}|\le D\sqrt{n}b_n\varepsilon,\\ &\mathrm{Var}\,(Z_{ni})=\mathrm{Var}\,\big(W_{ni}^*(\xi_i^{(1)}-E\xi_i^{(1)})\big)=|W_{ni}^*|^2\mathrm{Var}\,(\xi_i^{(1)})\\ \le&\Big(\max_{1\le i\le n}|W_{ni}^*|\Big)^2\mathrm{Var}\,(\xi_i^*)\le b_n^2D.\end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$, 由 Bennett 指数不等式及 $n \to \infty$ 时, $\frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}h_n} \to 0$ 及 $\frac{1}{\log n} \to 0$. 并记 $B := 2DA^*(A^*+1)$ 有

$$\begin{aligned}
P\Big\{\Big|\sum_{i=1}^n Z_{ni}\Big| \geq \varepsilon\Big\} &\leq 2\exp\Big\{-\frac{\varepsilon^2}{2Dnb_n^2 + 2D\varepsilon^2\sqrt{n}b_n}\Big\}\\
&\leq 2\exp\Big\{-\frac{\varepsilon^2}{2D(A^*)^2\frac{\log^2 n}{nh_n^2} + 2DA^*\varepsilon^2\frac{\log n}{\sqrt{n}h_n}}\Big\}\\
&= 2\exp\Big\{-\frac{\varepsilon^2}{2D(A^*)^2\Big(\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}h_n}\Big)^2\frac{1}{\log^2 n} + 2DA^*\varepsilon^2\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}h_n}\frac{1}{\log n}}\Big\}\\
&\leq 2\exp\Big\{-\frac{\varepsilon^2}{B\varepsilon^3/\log n}\Big\}\\
&= \frac{2}{n^{1/(B\varepsilon)}} < \frac{2}{n^2}\ \ (\text{当}\ \varepsilon < \frac{1}{2B}),
\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\Big|\sum_{i=1}^n Z_{ni}\Big| \geq \varepsilon\Big) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理有 $\sum\limits_{i=1}^n Z_{ni} \to 0$, a.s., 即

$$\sum_{i=1}^n W_{ni}^*(\xi_i^{(1)} - E\xi_i^{(1)}) \longrightarrow 0, \qquad \text{a.s.} \tag{4.13}$$

由 (4.12), (4.13) 及 $E\xi_i^{(1)} + E\xi_i^{(2)} = 0$ 有

$$\sum_{i=1}^n W_{ni}^*(\xi_i^{(1)} + \xi_i^{(2)}) \longrightarrow 0, \qquad \text{a.s.}$$

故 $\sum\limits_{i=1}^n W_{ni}^*\xi_i^* \to 0$, a.s., 即 (4.6) 成立. 证毕.

推论 1 设随机变量 $\xi, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ iid $E\xi$, $E\xi^2$ 存在, 随机变量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ iid., $Ee_1 = 0$, $Ee_1^2 = \sigma^2 < \infty$. $f(t)$ 有界且在 t_0 附近连续. 若 $\frac{nh_n}{\log n} \to \infty$ $(n \to \infty)$, 则当 $n \to \infty$ 时,

$$\sum_{i=1}^n W_{ni}(t_0) f(t_i)\xi_i \xrightarrow{P} f(t_0)E\xi, \tag{4.14}$$

$$\sum_{i=1}^n W_{ni}(t_0)\xi_i \xrightarrow{P} E\xi. \tag{4.15}$$

特别地

$$\sum_{i=1}^n W_{ni}(t_0) f(t_i) e_i \xrightarrow{P} 0, \qquad \sum_{i=1}^n W_{ni}(t_0) e_i \xrightarrow{P} 0. \tag{4.16}$$

证 仅证 (4.14), 其余显然. 由 (4.5), (4.3) 可知, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) f(t_i) \xi_i \xrightarrow{P} E\xi \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) f(t_i) \to f(t_0) E\xi.$$

推论 2 设随机变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 相互独立, 随机变量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 相互独立. $E(e_i|\xi_i) = 0$, $Ee_i^2 = \sigma^2 < +\infty$, $f(t)$ 有界且在 t_0 附近连续. 若 $\frac{nh_n}{\log n} \to \infty$ $(n \longrightarrow \infty)$, 则当 $n \to \infty$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) f(t_i) \xi_i e_i \xrightarrow{P} 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) \xi_i e_i \xrightarrow{P} 0.$$

推论 3 设随机变量 $\xi, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ iid, $E\xi$, $E\xi^2$ 存在, 随机变量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ iid., $Ee_1 = 0$, $Ee_1^2 = \sigma^2 < \infty$. $f(t)$ 有界且在 t_0 附近连续. 若 $\frac{\sqrt{n} h_n}{(\log n)^2} \to \infty$ $(n \to \infty)$, 则当 $n \to \infty$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) f(t_i) \xi_i \longrightarrow f(t_0) E\xi, \quad \text{a.s.}, \qquad \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) \xi_i \longrightarrow E\xi, \quad \text{a.s.}$$

特别地

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) f(t_i) e_i \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.}, \qquad \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) e_i \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.}$$

推论 4 设随机变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 相互独立, 随机变量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 相互独立. $E(e_i|\xi_i) = 0$, $Ee_i^2 = \sigma^2 < +\infty$, $f(t)$ 有界且在 t_0 附近连续. 若 $\frac{\sqrt{n} h_n}{(\log n)^2} \to \infty$ $(n \to \infty)$, 则当 $n \longrightarrow \infty$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) f(t_i) \xi_i e_i \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.}, \qquad \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) \xi_i e_i \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.}$$

下面证明本文的主要结果.

定理 1 的证明 首先假定 $\frac{nh_n}{\log n} \to \infty$ $(n \to \infty)$. 由推论 1, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned}
\widetilde{X} &= \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) X_i \xrightarrow{P} EX_i = Ex, \\
\widetilde{X^2} &= \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) X_i^2 \xrightarrow{P} EX_i^2 \\
&= \mathrm{Var}\,(X_i) + (EX_i)^2 = \mathrm{Var}\,(x) + \sigma^2 + (Ex)^2 = \sigma^2 + Ex^2.
\end{aligned}$$

故

$$S_X^2 = \widetilde{X^2} - (\widetilde{X})^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 + Ex^2 - (Ex)^2 = \sigma^2 + \mathrm{Var}\,(x). \tag{4.17}$$

下面讨论 S_Y^2 的收敛性. 由于 $y_i = a(t_i) + x_i b(t_i)$, 所以由引理 2 和推论 1, 有 $n \to \infty$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) y_i = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) a(t_i) + \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) b(t_i) x_i \xrightarrow{P} a(t_0) + b(t_0) Ex.$$

由上式及推论 1 可知，当 $n\to\infty$ 时，

$$\widetilde{Y}=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)Y_i=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)y_i+\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)e_i\xrightarrow{P}a(t_0)+b(t_0)Ex. \tag{4.18}$$

由于 $y_i^2=a^2(t_i)+x_i^2b^2(t_i)+2x_ia(t_i)b(t_i)$ 及引理 2 和推论 1 可知，当 $n\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{i1}^{n}W_{ni}(t_0)y_i^2=&\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)a^2(t_i)+\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)b^2(t_i)x_i^2+2\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)a(t_i)b(t_i)x_i\\&\xrightarrow{P}a^2(t_0)+b^2(t_0)Ex^2+2a(t_0)b(t_0)Ex.\end{aligned}$$

由推论 1 和推论 2 知，当 $n\to\infty$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)y_ie_i=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)a(t_i)e_i+\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)b(t_i)x_ie_i\xrightarrow{P}0.$$

又由推论 1 可知，当 $n\to\infty$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)e_i^2\xrightarrow{P}\sigma^2.$$

从而，$n\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}\widetilde{Y^2}&=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)Y_i^2=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)(y_i+e_i)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)y_i^2+2\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)y_ie_i+\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)e_i^2\\&\xrightarrow{P}a^2(t_0)+b^2(t_0)Ex^2+2a(t_0)b(t_0)Ex+\sigma^2.\end{aligned}$$

故，当 $n\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}S_Y^2=&\widetilde{Y^2}-(\widetilde{Y})^2\xrightarrow{P}a^2(t_0)+b^2(t_0)Ex^2+2a(t_0)b(t_0)Ex+\sigma^2-(a(t_0)+b(t_0)Ex)^2\\=&\sigma^2+b^2(t_0)\mathrm{Var}\,(x).\end{aligned} \tag{4.19}$$

最后讨论 S_{XY}^2 的收敛性，由于

$$\begin{aligned}\widetilde{XY}&=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)X_iY_i=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)(x_i+u_i)(y_i+e_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)y_iu_i+\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)x_ie_i+\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)u_ie_i.\end{aligned}$$

注意到 $\mathrm{Cov}\left[(u_i,e_i)^\tau\right]=\sigma^2I_2$, 由推论 1 和推论 2 知，当 $n\to\infty$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)x_ie_i\xrightarrow{P}0,\qquad\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)u_ie_i\xrightarrow{P}0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)y_iu_i = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)a(t_i)u_i + \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)b(t_i)x_iu_i \xrightarrow{P} 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)x_iy_i = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)a(t_i)x_i + \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)b(t_i)x_i^2 \xrightarrow{P} a(t_0)Ex + b(t_0)Ex^2.$$

故当 $n \to \infty$ 时， $\widetilde{XY} \xrightarrow{P} a(t_0)Ex + b(t_0)Ex^2$.

$$S_{XY}^2 = \widetilde{XY} - \widetilde{X}\widetilde{Y} \xrightarrow{P} a(t_0)Ex + b(t_0)Ex^2 - (Ex)\big[a(t_0) + b(t_0)Ex\big] = b(t_0)\mathrm{Var}\,(x). \quad (4.20)$$

从而由 (4.17), (4.19) 和 (4.20) 可知，当 $n \to \infty$ 时

$$\frac{S_Y^2 - S_X^2}{2S_{XY}^2} \xrightarrow{P} \frac{\sigma^2 + b^2(t_0)\mathrm{Var}\,(x) - \big[\sigma^2 + \mathrm{Var}\,(x)\big]}{2b(t_0)\mathrm{Var}\,(x)} = \frac{b^2(t_0) - 1}{2b(t_0)}.$$

这样

$$\sqrt{\Big(\frac{S_Y^2 - S_X^2}{2S_{XY}^2}\Big)^2 + 1} \xrightarrow{P} \sqrt{\Big(\frac{b^2(t_0) - 1}{2b(t_0)}\Big)^2 + 1} = \Big|\frac{b^2(t_0) + 1}{2b(t_0)}\Big|.$$

且由 (4.20) 可以看出：当 $S_{XY}^2 > 0$ 时， $b(t_0) > 0$; 当 $S_{XY}^2 < 0$ 时， $b(t_0) < 0$.

下面证明：当 $n \to \infty$ 时， $\widehat{b}(t_0) \xrightarrow{P} b(t_0)$. 分两种情况：

(1) 当 $S_{XY}^2 > 0$ 时，有 $b(t_0) > 0$. 由 (2.4.1), 当 $n \to \infty$ 时,

$$\widehat{b}(t_0) = \frac{S_Y^2 - S_X^2}{2S_{XY}^2} + \sqrt{\Big(\frac{S_Y^2 - S_X^2}{2S_{XY}^2}\Big)^2 + 1} \xrightarrow{P} \frac{b^2(t_0) - 1}{2b(t_0)} + \Big|\frac{b^2(t_0) + 1}{2b(t_0)}\Big| = b(t_0).$$

(2) 当 $S_{XY}^2 < 0$ 时，有 $b(t_0) < 0$. 由 (2.4.2), 当 $n \to \infty$ 时,

$$\widehat{b}(t_0) = \frac{S_Y^2 - S_X^2}{2S_{XY}^2} - \sqrt{\Big(\frac{S_Y^2 - S_X^2}{2S_{XY}^2}\Big)^2 + 1} \xrightarrow{P} \frac{b^2(t_0) - 1}{2b(t_0)} - \Big|\frac{b^2(t_0) + 1}{2b(t_0)}\Big| = b(t_0).$$

又

$$\widehat{a}(t_0) = \widetilde{Y} - \widehat{b}(t_0)\widetilde{X} \xrightarrow{P} a(t_0) + b(t_0)Ex - b(t_0)Ex = a(t_0).$$

并且

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma^2}(t_0) =& \big[1 + (\widehat{b}(t_0))^2\big]^{-1}\big[\widetilde{Y^2} + (\widehat{a}(t_0))^2 + (\widehat{b}(t_0))^2\widetilde{X^2} - 2\widehat{a}(t_0)\widetilde{Y} - 2\widehat{b}(t_0)\widetilde{XY} + 2\widehat{a}(t_0)\widehat{b}(t_0)\widetilde{X}\big] \\ =& \big[1 + \big(\widehat{b}(t_0)\big)^2\big]^{-1}\big[S_Y^2 + (\widehat{b}(t_0))^2 S_X^2 - 2\widehat{b}(t_0)S_{XY}^2\big] \\ &\xrightarrow{P} (1 + b^2(t_0))^{-1}\big[\sigma^2 + b^2(t_0)\mathrm{Var}\,(x) + b^2(t_0)\big(\sigma^2 + \mathrm{Var}\,(x)\big) - 2b^2(t_0)\mathrm{Var}\,(x)\big] = \sigma^2.\end{aligned}$$

证毕.

利用推论 3 和推论 4, 同理可证明定理 2.

致谢 本人在北京师范大学数学系访学期间得到了崔恒建教授的悉心指导，在此表示衷心感谢. 并且审稿人诚恳地指出了初稿主要结论和引理 3 证明中的两处错误，在此表示衷心感谢.

参 考 文 献

1 Cui Hengjian, He Xuming, Zhu Lixing. On Regression Estimators with De-noised Variables. *Statistica Sinica*, 2002, 12: 1191–1205

2 Cui Hengjian, Li Rongcai. On Parameter Estimation for Semi-linear Errors-in-variables Models. *J. of Multivariate Analysis*, 1998, 64: 1–24

3 Fuller W A. Measurement Error Models. New York: Wiley, 1987

4 Kendall M, Struart A. The Advanced Theory of Statistics, Vol 2. Charles Griffin, 1979

5 He X, Liang H. Quantile Regression Estimates for a Class of Linear and Partially Linear Errors-in-variables Models. *Statistica Sinica*, 2000, 10: 129–140

6 张三国, 陈希孺. 有重复观测时 EV 模型修正极大似然估计的相合性. 中国科学 (A 辑), 2000, 6: 522–528
(Zhang Sanguo, Chen Xiru. Consistency of Modified MLE in EV Model with Replicated Observations. *Science in China* (Series A), 2000, 6: 522–528 (in Chinese)

7 李勇. 结构关系度量误差模型的参数估计. 北京师范大学学报 (自然科学版), 1998, 34(2): 143–146
(Li Yong. The Parameter Estimator of Structural Error-in-variable Models. *Journal of Beijing Normal University* (Natural Science), 1998, 34(2): 134–146 (in Chinese)

8 Fan J, Yao O, Cai Z. Adaptive Varying-coefficient Linear Models. *Journal of Royal Statistical Society B.*, 2003, 65: 57–80

9 陈希孺, 赵林城. 线性模型中的 M 方法. 上海: 上海科学技术出版社, 1996
(Chen Xiru, Zhao Lincheng. M-method in Linear Models. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1996 (in Chinese)

ON PARAMETER ESTIMATION FOR LINEAR VARYING-COEFFICIENTS STRUCTURAL EV MODELS

OUYANG GUANG

(*Department of Mathematics, Xiangnan University, Chenzhou* 423000)

(*E-mail: ouyangguanghn@163.com*)

Abstract In this paper, a linear varying-coefficients structural EV model is given. The estimators of parameters of linear coefficient at $t = t_0$ are constructed by using the weighted orthogonal regression least square method. The weak and strong consistency of estimators are also obtained.

Key words varying-coefficient linear structure EV models; weighted orthogonal regression least square method; consistency

MR(2000) Subject Classification 62J05; 62H12

Chinese Library Classification O212.1