第28卷 第2期 应用数学学报 Vol. 28 No. 2
2005年4月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Apr., 2005

共振情况下 m 点 p–Laplacian 算子边值问题解的存在性*

廉立芳
(山东交通学院基础部，济南 250023)
(E-mail: lianlifang@163.com)

葛渭高
(北京理工大学理学院数学系，北京 100081)

摘　要　本文研究了在共振情况下 m 点 p-Laplacian 算子边值问题解的存在性问题．在非线性项 $f(t,u,v)$ 有界的条件下，根据 Mawhin 的连续定理和 m 点 p-Laplacian 算子的边值问题的上下解理论，得出共振问题解的存在的结论.

关键词　p-Laplacian 算子；共振；拓扑度；上下解
MR(2000) 主题分类　34B15
中图分类　O175.12

1　引言

考虑下面的 p-Laplacian 边值问题

$$\begin{cases} \left(\phi_p(u'(t))\right)' = f(t,u,u'), \qquad 0<t<1, \\ u'(0)=0, \qquad u(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i), \end{cases} \tag{1}$$

式中 $\phi_p(u)=|u|^{p-2}u,\ p>1,\ 0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1,\ a_i\geq 0,\ \sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i = 1.$

近年来，对于 $p=2$ 时二阶 m 点边值问题可解性的研究工作参见 [1–6]，其中 [5] 利用重合度和上下解方法研究了当 $\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i=1$ 时，二阶 m 点边值共振问题解的存在性. 本文对 $p>1$ 的一般情况，研究方程 (1) 在共振情况下的可解性．当 $p=2$ 时，就是 [5] 所得出的结论，从而本文也是 [5] 的一个推广.

由于 p-Laplacian 算子是非线性的，使直接定义二阶微分算子为线性算子 L 的方法不再可行．我们提出了先进行积分，并求解 u' 之后再分别定义线性算子 L 和非线性算

本文 2003 年 7月 22 日收到．2004 年 12 月 1 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (19871005 号) 资助项目.

子 N 的方法. 通过这种方法克服了应用重合度理论时遇到的困难. 这种新的框架，给论证 N 的 L- 紧性提出了挑战. 在严格论证这一性质后，我们给出了解存在的条件.

2　引理及证明

在本文中，假设

(H) f: $[0,1]\times R^2\to[-M,M]$, 连续，其中 $M\in(0,\infty)$, 成立.

定义　如果 $\alpha\in C^1([0,1])$, $\phi_p(\alpha')\in C^1([0,1])$ 满足

$$\big(\phi_p(\alpha'(t))\big)'>f\big(t,\alpha(t),\alpha'(t)\big),\qquad t\in(0,1),$$
$$\alpha'(0)\ge 0,\qquad \alpha(1)-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\alpha(\xi_i)\le 0,$$

则称 $\alpha(t)$ 为问题 (1) 的一个严格下解.

如果 $\beta\in C^1([0,1])$, $\phi_p(\beta')\in C^1([0,1])$ 满足

$$\big(\phi_p(\beta'(t))\big)'<f\big(t,\beta(t),\beta'(t)\big),\qquad t\in(0,1),$$
$$\beta'(0)\le 0,\qquad \beta(1)-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\beta(\xi_i)\ge 0,$$

则称 $\beta(t)$ 为问题 (1) 的一个严格上解.

问题 (1) 可等价于方程 (2)

$$\begin{cases} u'(t)=\phi_p^{-1}\Big(\int_0^t f\big(s,u(s),u'(s)\big)\,\mathrm{d}s\Big), & 0<t<1,\\ u(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_iu(\xi_i). \end{cases}\tag{2}$$

设 $X=\Big\{u\in C^1([0,1])\,\big|\,u'(0)=0,\ u(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_iu(\xi_i)\Big\}$, 其范数为 $\max\big\{\|x\|_\infty,\|x'\|_\infty\big\}$, $Y=\big\{u\in C[0,1]\,\big|\,u(0)=0\big\}$, 记 $D(L)=\big\{u\in X\mid\phi_p(u')\in C^1([0,1])\big\}$.

定义线性算子 $L:D(L)\to Y$:

$$Lu=u'$$

和定义算子 $N:X\to Y$:

$$N\big(u(t)\big)=\phi_p^{-1}\Big(\int_0^t f\big(s,u(s),u'(s)\big)\,\mathrm{d}s\Big),\qquad t\in[0,1],$$

则问题 (2) 可写成算子方程

$$Lu=Nu.\tag{3}$$

同时定义算子：　$P:X\to\operatorname{Ker}L$, $P(u)=u(0)$, $J:Y/\operatorname{Im}L\to\operatorname{Ker}L$, 自然同构算子, $K:\operatorname{Im}L\to\operatorname{Ker}P\cap D(L)\subset X$, $Ky=\int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s$. 显然由 $\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_i\xi_i<1$, 可定义

$$Q:Y\to Y/\operatorname{Im}L,\ Qy=\frac{1}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_i\xi_i}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_{\xi_i}^1 y(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中， P,Q 是两个投影算子，由于 $Y/\mathrm{Im}\,L,\mathrm{Ker}\,L$ 都是 [0,1] 上常值函数构成的线性空间，可以将它们等同于实数空间 R, 故可取 $J=I$.

引理 1[7] 设 $\Omega\subset X$ 是有界开集， L 是指标为 0 的 Fredholm 算子， N 在 $\bar\Omega$ 上 L-紧. 假设

(i) $\forall\lambda\in(0,1)$, $\forall u\in\partial\Omega$, $Lu\neq\lambda Nu$.

(ii) $\forall u\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L$, $QNu\neq 0$, 且 $\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,0\}\neq 0$, 则算子方程 (3) 在 $\mathrm{dom}\,L\cap\overline{\Omega}$ 上至少有一解.

由于

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,L=&\{u(t)=c,\ c\in R\},\\ \mathrm{Im}\,L=&\{y\in Y\mid\exists u(t)\in D(L),\ \text{s.t.}\,u'(t)=y(t)\}\\ =&\Big\{y\in Y\mid\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_{\xi_i}^1 y(s)\,\mathrm{d}s=0\Big\}.\end{aligned}$$

显然， L 是指标为 0 的 Fredholm 算子.

引理 2 N 在 $\bar\Omega$ 上是 L- 紧的.

证 由 ϕ_p 和 $f(t,u,v)$ 的连续性，易证 $QN:\bar\Omega\to Y/\mathrm{Im}\,L$ 是全连续的.

下证 $K(I-Q)N:\bar\Omega\to X$ 是全连续算子.

显然， $K(I-Q)N$ 是连续的，只要证 $K(I-Q)N(\bar\Omega)$ 为 X 中的相对紧集.

$$\begin{aligned}K(I-Q)Nu=&\int_0^t\phi_p^{-1}\Big(\int_0^s f\big(r,u(r),u'(r)\big)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s\\ &-\frac{t}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_i\xi_i}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_{\xi_i}^1\phi_p^{-1}\Big(\int_0^t f\big(s,u(s),u'(s)\big)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t\\ =&(T_1u)(t)+(T_2u)(t),\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}(T_1u)(t)&=\int_0^t\phi_p^{-1}\Big(\int_0^s f\big(r,u(r),u'(r)\big)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s,\\ (T_2u)(t)&=-\frac{t}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_i\xi_i}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_{\xi_i}^1\phi_p^{-1}\Big(\int_0^t f\big(s,u(s),u'(s)\big)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于 T_2 是有限维算子，易证： T_2 在 $\overline{\Omega}$ 上是全连续. 下证： T_1 在 $\overline{\Omega}$ 上也是全连续的.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1=\frac{\varepsilon}{\phi_p^{-1}(M)}$, 当 $|t_1-t_2|<\delta_1$ 时，不妨设 $t_1>t_2$, 由 $\big|f(t,u,u')\big|\le M$, 有

$$\begin{aligned}&\big|(T_1u)(t_1)-(T_1u)(t_2)\big|\\ =&\Big|\int_{t_2}^{t_1}\phi_p^{-1}\Big(\int_0^s f\big(r,u(r),u'(r)\big)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s\Big|\le\phi_p^{-1}(M)|t_1-t_2|<\varepsilon,\\ &\big|(T_1u)'(t_1)-(T_1u)'(t_2)\big|\\ =&\Big|\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_1}f\big(s,u(s),u'(s)\big)\,\mathrm{d}s\Big)-\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2}f\big(s,u(s),u'(s)\big)\,\mathrm{d}s\Big)\Big|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\Big|\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2} f(s,u,u')\,\mathrm{d}s+\int_{t_2}^{t_1} f(s,u,u')\,\mathrm{d}s\Big)-\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2} f(s,u,u')\,\mathrm{d}s\Big)\Big|\\
&\le \max\Big\{\Big|\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2} f(s,u,u')\,\mathrm{d}s+M(t_1-t_2)\Big)-\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2} f(s,u,u')\,\mathrm{d}s\Big)\Big|,\\
&\quad\Big|\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2} f(s,u,u')\,\mathrm{d}s-M(t_1-t_2)\Big)-\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2} f(s,u,u')\,\mathrm{d}s\Big)\Big|\Big\}.
\end{aligned}
$$

现考虑

$$
\Phi=\Big|\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2} f\big(s,u(s),u'(s)\big)\,\mathrm{d}s+M(t_1-t_2)\Big)-\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2} f\big(s,u(s),u'(s)\big)\,\mathrm{d}s\Big)\Big|.
$$

记 $x=\int_0^{t_2} f\big(s,u(s),u'(s)\big)\,\mathrm{d}s$, 则有 $|x|\le M$. 将 $\eta=M(t_1-t_2)$ 作为参量，记 $\Phi(x)=\big|\phi_p^{-1}(x+\eta)-\phi_p^{-1}(x)\big|$, 则

$$
\begin{aligned}
\Phi(x)&=\big|\phi_p^{-1}(x+\eta)-\phi_p^{-1}(x)\big|=\big|\operatorname{sgn}(x+\eta)\,|x+\eta|^{\frac{1}{p-1}}-\operatorname{sgn}x\,|x|^{\frac{1}{p-1}}\big|\\
&=\begin{cases}(x+\eta)^{\frac{1}{p-1}}-x^{\frac{1}{p-1}}, & 0\le x\le M,\\ (x+\eta)^{\frac{1}{p-1}}+(-x)^{\frac{1}{p-1}}, & -\eta\le x<0,\\ -(-x-\eta)^{\frac{1}{p-1}}+(-x)^{\frac{1}{p-1}}, & -M\le x<-\eta.\end{cases}
\end{aligned}
$$

当 $p>2$ 时， $\frac{1}{p-1}<1$,

$$
\Phi'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}((x+\eta)^{\frac{2-p}{p-1}}-x^{\frac{2-p}{p-1}})<0, & 0<x<M,\\ \dfrac{1}{p-1}((x+\eta)^{\frac{2-p}{p-1}}-(-x)^{\frac{2-p}{p-1}})<0, & -\frac{\eta}{2}<x<0,\\ \dfrac{1}{p-1}((x+\eta)^{\frac{2-p}{p-1}}-(-x)^{\frac{2-p}{p-1}})>0, & -\eta<x<-\frac{\eta}{2},\\ \dfrac{1}{p-1}((-x-\eta)^{\frac{2-p}{p-1}}-(-x)^{\frac{2-p}{p-1}})>0, & -M<x<-\eta.\end{cases}
$$

故 $\Phi(x)\le\Phi(-\frac{\eta}{2})$, $|x|\le M$. 于是，令 $\delta_2=\frac{2}{M}\phi_p(\frac{\varepsilon}{2})$, 当 $|t_1-t_2|<\delta_2$ 时,

$$
\Big|\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2} f(s,u,u')\,\mathrm{d}s+M(t_1-t_2)\Big)-\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2} f(s,u,u')\,\mathrm{d}s\Big)\Big|<\varepsilon.
$$

当 $1<p\le 2$ 时， $\frac{1}{p-1}\ge 1$.

$$
\Phi'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}((x+\eta)^{\frac{2-p}{p-1}}-x^{\frac{2-p}{p-1}})>0, & 0<x<M,\\ \dfrac{1}{p-1}((x+\eta)^{\frac{2-p}{p-1}}-(-x)^{\frac{2-p}{p-1}})>0, & -\frac{\eta}{2}<x<0,\\ \dfrac{1}{p-1}((x+\eta)^{\frac{2-p}{p-1}}-(-x)^{\frac{2-p}{p-1}})<0, & -\eta<x<-\frac{\eta}{2},\\ \dfrac{1}{p-1}((-x-\eta)^{\frac{2-p}{p-1}}-(-x)^{\frac{2-p}{p-1}})<0, & -M<x<-\eta.\end{cases}
$$

故 $\Phi(x) \le \max\big\{\Phi(M), \Phi(-M)\big\}$, $|x| \le M$. 取 $\delta_3 = \frac{(p-1)\varepsilon}{2^{\frac{2-p}{p-1}} M^{\frac{1}{p-1}}}$, 当 $|t_1 - t_2| < \delta_3$ 时,

$$\Big|\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2} f(s,u,u')\,\mathrm{d}s + M(t_1-t_2)\Big) - \phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2} f(s,u,u')\,\mathrm{d}s\Big)\Big| < \varepsilon.$$

故当 $p > 1$ 时，取

$$\delta_4 = \begin{cases} \delta_2, & p > 2, \\ \delta_3, & 1 < p \le 2, \end{cases}$$

$|t_1 - t_2| < \delta_4$ 时,

$$\Big|\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2} f(s,u,u')\,\mathrm{d}s + M(t_1-t_2)) - \phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2} f(s,u,u')\,\mathrm{d}s\Big)\Big| < \varepsilon.$$

同理可证：当 $p > 1$ 时， $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_5 > 0$, 当 $|t_1 - t_2| < \delta_5$ 时,

$$\Big|\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2} f(s,u,u')\,\mathrm{d}s - M(t_1-t_2)\Big) - \phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_2} f(s,u,u')\,\mathrm{d}s\Big)\Big| < \varepsilon.$$

故 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_4, \delta_5\}$, 当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时,

$$\big|(T_1u)(t_1) - (T_1u)(t_2)\big| < \varepsilon, \qquad \big|(T_1u)'(t_1) - (T_1u)'(t_2)\big| < \varepsilon.$$

从而 T_1 在 $\overline{\Omega}$ 上等度连续，易知 T_1 在 $\bar{\Omega}$ 上一致有界，由 Ascoli-Arzela 定理可得, $QN(\overline{\Omega}), K(I-Q)N(\overline{\Omega})$ 都是 X 中的相对紧集. 因此， N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L- 紧的.

引理 3 假设条件 (H) 成立， (3) 为问题 (2) 所对应的算子方程. 如果存在 $r > 0$, 使得

$$f(t,-r,0) < 0, \qquad f(t,r,0) > 0, \qquad \forall\, t \in [0,1],$$

则

$$\deg\{L - N, \Omega, 0\} = 1,$$

其中 $\Omega = \big\{u \in X:\, -r < u(t) < r,\ |u'(t)| < c,\ \forall\, t \in [0,1]\big\}$, $c \ge \phi_p^{-1}(M)$.

证 记

$$\widetilde{f}(t,u,v) = \begin{cases} f(t,r,v), & u > r, \\ f(t,u,v), & |u| \le r, \\ f(t,-r,v), & u < -r. \end{cases}$$

考虑算子方程

$$Lu - \widetilde{N}(u) = 0, \tag{4}$$

其中， $\tilde{N}(\cdot): X \to Y$, $\tilde{N}(u) = \phi_p^{-1}\big(\int_0^t \tilde{f}\big(s,u(s),u'(s)\big)\,\mathrm{d}s\big)$.

为了利用引理 1 的结论，我们将证明条件 (i), (ii) 成立. 只考虑 $f(t,r,0) > 0$ 的情况， $f(t,-r,0) < 0$ 类似.

(i) 假设 $\exists\, \lambda_0 \in (0,1)$， $t_0 \in [0,1]$, 使得 $u_0 = u(t_0) \in \partial\Omega$, 满足 $Lu_0 = \lambda_0 N u_0$, 则有 $\big|u(t_0)\big| = r$ 或 $\big|u'(t_0)\big| = c$ 成立.

当 $\big|u(t_0)\big| = r$ 时，不妨设 $u(t_0) = r$,

1^0. 若 $t_0 \in [0,1)$, 则 $u'(t_0) = 0$, 且有 $\delta_1 \in (0, 1-t_0)$ 使 $u'(t) \le 0$, $t \in (t_0, t_0+\delta)$. 于是 $\phi_p\big(u'(t)\big) \le 0$, $t \in (t_0, t_0+\delta)$. 但 $\phi_p\big(u'(t)\big) = \int_{t_0}^t f\big(s,u(s),u'(s)\big)\,\mathrm{d}s$, 由 $f\big(t_0,u(t_0),u'(t_0)\big) =$

$f(t_0,r,0)>0$ 及 $u\in C^1[0,1]$ 知 $\exists\,\delta_2\in(0,1-t_0)$, 当 $t\in(t_0,t_0+\delta_2)$ 时, $f\big(t,u(t),u'(t)\big)>0$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 故 $t\in(t_0,t_0+\delta)$ 时, $\phi_p\big(u'(t)\big)>0$. 矛盾.

2^0 当 $t_0=1$ 时, 此时, 由边界条件 $u(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_iu(\xi_i)$ 可知:

$$u(\xi_i)=r,\qquad \forall\, i=1,\cdots,m-2.$$

由于 $\xi_i\in(0,1)$, 由 1^0 的讨论得出矛盾.

当 $|u'(t_0)|=c$ 时, $c=|u'(t_0)|=\lambda_0\big|\phi_p^{-1}\big(\int_0^{t_0}f\big(s,u(s),u'(s)\big)\big)\,\mathrm{d}s\big|<\phi_p^{-1}(M)\le c$, 矛盾.

从而, $\forall\,\lambda\in(0,1)$, $\forall\,u\in\partial\Omega$ 都有 $Lu\neq\lambda Nu$ 成立.

(ii) $\forall\,u\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L$, $|u|=r$,

$$\begin{aligned}QNu=&Q\Big(\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_0}f(s,r,0)\,\mathrm{d}s\Big)\Big),\\ =&\frac{1}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_i\xi_i}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_{\xi_i}^1\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_0}f(s,r,0)\,\mathrm{d}s\Big)\,d\tau\\ \neq&0.\end{aligned}$$

记 $H(u,\lambda)=\lambda Ju+(1-\lambda)JQNu$.

假设 $\exists\,\lambda_0\in[0,1]$, $u(t_0)=r$ 时, $\lambda_0Jr+(1-\lambda_0)JQNr=0$. 当 $\lambda_0=1$ 时, 则 $Jr=0$, 从而 $r=0$, 与 $r>0$ 矛盾. 当 $\lambda_0\in[0,1)$ 时, 则

$$0\le\lambda_0r=-(1-\lambda_0)\frac{1}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_i\xi_i}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_{\xi_i}^1\phi_p^{-1}\Big(\int_0^{t_0}f(s,r,0)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau<0,$$

矛盾. 从而 $\forall\,u\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L$, $H(u,\lambda)\neq0$.

故

$$\deg\{JQN,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0\}=\deg\{J,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0\}=\deg\{I,\Omega\cap R,0\}=1,$$

又在 Ω 上 $\tilde N=N$, 故

$$\deg\{L-N,\Omega,0\}=\deg\{L-\widetilde N,\Omega,0\}=1.$$

3 主要结论

定理 假设条件 (H) 成立, (3) 为问题 (2) 所对应的算子方程, $\alpha(t),\beta(t)$ 为问题 (1) 的严格下解和严格上解, 且 $\alpha(t)<\beta(t)$, $\forall\,t\in[0,1]$, 则问题 (1) 有解.

证 令 $r=\|\alpha\|_\infty+\|\beta\|_\infty$, 作

$$h(t,u,v)=\begin{cases}f\big(t,\beta(t),v\big), & u\ge\beta(t),\\ f(t,u,v), & \alpha(t)<u<\beta(t),\\ f\big(t,\alpha(t),v\big), & u\le\alpha(t),\end{cases}$$

$$
f^*(t,u,v)=\begin{cases} h(t,u,v)+2M, & u\ge r+1,\\ h(t,u,v)+2(u-r)M, & r<u<r+1,\\ h(t,u,v), & -r\le u\le r,\\ h(t,u,v)+2(u+r)M, & -r-1<u<-r,\\ h(t,u,v)-2M, & u\le -r-1.\end{cases}
$$

在引理 3 中 M 和 r 分别用 $3M$ 和 $r+1$ 代替，则 f^* 满足其中的全部条件，于是

$$
\deg\{L-N^*,\Omega^*,0\}=1, \tag{5}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
&N^*(\cdot):\, X\to Y,\qquad N^*(u)=\phi_p^{-1}\Big(\int_0^t f^*\big(s,u(s),u'(s)\big)\,\mathrm{d}s\Big),\\
&\Omega^*=\big\{u\in X,\ \big|\ |u(t)|<r+1,\ |u'(t)|<c,\ \forall t\in[0,1]\big\},\qquad c\ge\phi_p^{-1}(3M).
\end{aligned}
$$

故 $Lu=N^*(u)$ 有解 $u=u(t)$. 下证：$u(t)$ 满足 $\alpha(t)<u(t)<\beta(t)$, $\forall t\in[0,1]$.

假设不然，若记 $v_2(t)=u(t)-\beta(t)$, $v_1(t)=\alpha(t)-u(t)$, 则存在 $t_0\in[0,1]$, 使得 $\max\big\{v_i(t)\mid t\in[0,1]\big\}=v_i(t_0)\ge 0$. 不妨设 $v_2(t_0)\ge 0$:

(1) $\max\big\{v_2(t)\mid t\in[0,1]\big\}=v_2(t_0)\ge 0$ 且 $t_0\in[0,1)$, 此时，一方面 $v_2'(t_0)=0$,

$$
\begin{aligned}
\big(\phi_p(u'(t_0))\big)' &=f^*\big(t_0,u(t_0),u'(t_0)\big)=f^*\big(t_0,u(t_0),\beta'(t_0)\big)\\
&\ge h\big(t_0,u(t_0),\beta'(t_0)\big)=f\big(t_0,\beta(t_0),\beta'(t_0)\big)>\big(\phi_p(\beta'(t_0))\big)'.
\end{aligned}
$$

从而由函数的连续性得：$\exists\,\delta_3>0$, 使得 $\forall t\in(t_0,t_0+\delta_3)\subset[0,1)$, 有 $\big(\phi_p(u'(t))\big)'>\big(\phi_p(\beta'(t))\big)'$. 两边对 t 从 t_0 到 t 积分，$t\in(t_0,t_0+\delta_3)$, 得 $\phi_p\big(u'(t)\big)-\phi_p\big(u'(t_0)\big)>\phi_p\big(\beta'(t)\big)-\phi_p\big(\beta'(t_0)\big)$, 即 $\phi_p\big(u'(t)\big)>\phi_p\big(\beta'(t)\big)$. 由 ϕ_p 的递增性可知：$\forall t\in(t_0,t_0+\delta_3)$, $u'(t)>\beta'(t)$. 由假设可知 $u'(t)=v_2'(t)+\beta'(t)$, 可得到 $v_2'(t)>0$, $t\in(t_0,t_0+\delta_3)$, 矛盾.

(2) $\max\big\{v_2(t)\mid t\in[0,1]\big\}=v_2(t_0)\ge 0$ 且 $t_0=1$, 由边界条件知：$v_2(1)\le\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_iv_2(\xi_i)$, 结合假设条件 $\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_i=1$ 及 $a_i\ge 0$ 可推知：$\exists\, i_0\in\{1,2,\cdots,m-2\}$, 使得 $v_2(\xi_{i_0})\ge v_2(1)$, 又 $\xi_{i_0}\in(0,1)$, 与 (1) 类似可得出矛盾.

故 $u(t)<\beta(t)$, 同理可证 $u(t)>\alpha(t)$, 因此 $u(t)$ 是问题 (2) 的解，从而问题 (1) 有解.

参 考 文 献

[1] Gupta C P. A Gerneralized Multi-point Boundary Value Problem for Second Order Differntial Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 1998, 89: 133–146

[2] Gupta C P. Existence Theorem for a Second order m-point Boundary Value Problem at Resonance. *Int. J. Math. Sci.*, 1995, 18: 705–710

[3] Ma R Y. Existence Theorem for a Second Order m-point Boundary Value Problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 1997, 211: 545–555

[4] Rachunkova. Upper and Lower Solutions and Multiplicity Results. *J. Math. Anal. Appl.*, 2000, 246: 446–464

[5] Ma R Y. Upper and Lower Solutions and Topological Degree for a m-point Boundary Value Problem at Resonance. *Journal of Northwest Normal Univerisity*, 2001, 37: 1–6 (in Chinese)

[6] Liu B, Yu J S. Existence Theorem for a Second order m-point Boundary Value Problem at Resonance. *Acta Mathmaticae Applicae Sinica*, 2001, 24: 596–606 (in Chinese)

[7] Przeradzki B, Stanczy R. Solvability of a Multi-point Boundary Value Problem at Resonance. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, 264: 253–261

THE EXISTENCE OF SOLUTIONS OF m-POINT p-LAPLACIAN BOUNDARY VALUE PROBLEMS AT RESONANCE

LIAN LIFANG

(*Shandong Jiaotong University, Jinan* 250023)

(*E-mail: lianlifang@163.com*)

GE WEIGAO

(*Department of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081)

Abstract The existence of solution with p-Laplacian operator of m-piont boundary value problem about resonance is studied by using coincidence degree continuation theorem and strict upper and lower solutions theory.

Key words p-laplacian operator; resonance; topological degree; upper and lower solutions

MR(2000) Subject Classification 34B15
Chinese Library Classification O175.12