

基于双球坐标系的偏心球形电容器电容的计算*

李丽辉¹, 邓海²

(1. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047;

2. 重庆师范大学 物理学与信息技术系, 重庆 400047)

摘要: 在双球坐标系下采用分离变量的方法经推导严格求解了偏心球形电容器的电容, 得到了它的级数解, 并通过编制程序计算获得了偏心球形电容器的电容大小与偏心率之间的数值关系, 并指出了某些文献中的不当之处。

关键词: 双球坐标系; 电势分布; 电容; 偏心率

中图分类号: O441.1 文献标识码: A

0 引言

介绍电容器时, 一般的电磁学教科书^[1]通常只涉及平行板电容器、同轴圆柱形电容器、同心球形电容器, 其静电场的求解、面电荷分布和电容的计算都很简单。在实际中平行、同轴、同心都只能在一定的精度内做到, 这就启发我们考虑非平行板电容器^[2]、非同轴圆柱形电容器^[3,4]、非同心球形电容器^[5,6]。文献^[5,6]都是在球坐标系下通过分离变量方法, 并且假定偏心度较小, 采用一阶近似得到小偏心球形电容器电容的近似解。文献^[5]认为在偏心度较小的情况下, 偏心球形电容器的电容是不会发生改变的; 文献^[6]的计算结果表明电容器的电容是随着偏心距增加而减小的。这些计算局限于只能用于小偏心距的情况, 当偏心距增加时, 就会带来极大的误差甚至是错误。为此本文采用双球坐标系^[7], 并通过分离变量的方法, 经严格推导求解了偏心球形电容器的电容, 得到了它的级数解, 同时又通过编制程序对级数解进行了数值计算, 得到了偏心球形电容器电容大小随偏心度变化的数值关系。经研究发现: 偏心球形电容器电容大小是随偏心率的增加而增加的, 但是在偏心率很小的情况下电容的改变量相当小, 可近似认为不发生变化, 这和文献^[5]的计算结果是一致的, 而文献^[6]的计算结果是不恰当的。

1 双球坐标系的拉普拉斯方程通解

若双球坐标系中的 3 个变量用 (ξ, η, ψ) 表示, 则它们与圆柱坐标 (ρ, ϕ, z) 的关系^[7] 是

$$\rho = \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}; \quad \phi = \psi; \quad z = \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}$$

式中, a 是双球坐标参量, 双球坐标一经选定 a , 即为恒量。双球坐标系中 3 个坐标 (ξ, η, ψ) 的变化范围是 $-\infty < \xi < \infty; 0 \leq \eta \leq \pi; 0 \leq \psi \leq 2\pi$ 。双球坐标系中的 3 个坐标曲面分别如下。

- 1) $\xi = \text{常数}$ 时, 坐标面是球面:
$$\rho^2 + (z - a \operatorname{coth} \xi)^2 = (a/\operatorname{sh} \xi)^2$$
 - 2) $\eta = \text{常数}$ 时, 坐标面是绕 z 轴的回转纺锤面:
$$(\rho - a \cot \eta)^2 + z^2 = (a/\operatorname{sh} \eta)^2$$
 - 3) $\psi = \text{常数}$ 时, 坐标面是从 z 轴发散的半平面。
- 双球坐标系中的拉梅系数(度规系数) 是

$$h_1 = h_2 = \frac{a}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}; \quad h_3 = \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}$$

把双球坐标系中的拉梅系数代入正交曲线坐标系中的拉氏一般方程中, 就得到双球坐标下的拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sin \eta (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0 \quad (1)$$

* 收稿日期: 2002-11-26 修订日期: 2003-03-05
基金项目: 重庆市教育委员会资助项目(20011075)
作者简介: 李丽辉(1978-), 女, 重庆人, 硕士研究生, 主要从事系统理论研究。

要直接求解式(1)比较困难,为此令 $\varphi =$

$\Psi \sqrt{2(\text{ch}\xi - \cos\eta)}$ 代入式(1)可得:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \cot \eta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \sin^2 \eta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} - \frac{1}{4} \Psi = 0 \quad (2)$$

在轴对称下 Ψ 与方位角 ψ 无关,式(2)可简化为:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \cot \eta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} - \frac{1}{4} \Psi = 0 \quad (3)$$

将式(3)再作分离变量,设 $\Psi = X(\xi)Y(\eta)$,则

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} + \cot \eta \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right) = n(n+1)$$

于是可以得到 $\frac{d^2 X}{d\xi^2} = (n + \frac{1}{2})^2 X$; $\frac{d^2 Y}{d\eta^2} + \cot \eta \frac{dY}{d\eta} + n(n+1)Y = 0$,这2个常微分方程的通解分别为

$$X = A \text{ch}(n + 1/2)\xi + B \text{sh}(n + 1/2)\xi \quad (4)$$

$$Y = C P_n(\cos\eta) + D Q_n(\cos\eta) \quad (5)$$

式(5)中,因第2类勒让德函数 $Q_n(\cos\eta)$ 在 $\eta = 0$ 或 $\eta = \pi$ 时为无穷大,而静电场的电势在无电荷的区域总是有限的,故 $D = 0$,这样把式(4)和(5)再代入式(3)就求得拉氏方程在球外区域内的轴对称解为

$$\varphi(\xi, \eta) = \sqrt{2(\text{ch}\xi - \cos\eta)} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \text{ch}(n + \frac{1}{2})\xi + B_n \text{sh}(n + \frac{1}{2})\xi] P_n(\cos\eta) \quad (6)$$

2 双球坐标系下电容的严格求解

如图1所示,半径分别为 R_1 和 R_2 的内外球壳,保持内球壳电势为 V ,外球壳接地,构成偏心距 $d =$

$o_1 o_2 (d < R_2 - R_1)$ 的偏心球形电容器,求解电容值。

为此,使内外2个极板面分别是 $\xi = \xi_1$ 和 $\xi = \xi_2$ 的坐标面,使 z 轴通过这2个球层的球心,这时2个极板的中心坐标分别是

$z_1 = a \cot \xi_1, z_2 = a \cot \xi_2$,2个极板的半径 R_1, R_2 与 a, ξ_1, ξ_2 之间的

关系是: $a = R_1 \text{sh} \xi_1 = R_2 \text{sh} \xi_2; d = z_2 - z_1 =$

$a(\cot \xi_2 - \cot \xi_1)$,由此可得到

$$\text{ch} \xi_1 = \frac{R_2^2 - d^2 - R_1^2}{2R_1 d} \quad (7)$$

$$\text{ch} \xi_2 = \frac{R_2^2 + d^2 - R_1^2}{2R_2 d} \quad (8)$$

欲求解电容,必先求出带电导体球系统在球壳层之间的电势分布,即要求解满足本问题边界条件的方程式(6),本问题的边界条件可表示为

$$\varphi(\xi_1, \eta) = V \quad (9)$$

$$\varphi(\xi_2, \eta) = 0 \quad (10)$$

将式(10)代入式(6)可以得到

$$B_n = -A_n \cot(n + 1/2)\xi_2 \quad (11)$$

再将式(9)和式(11)代入式(6)可得

$$\sqrt{2(\text{ch}\xi_1 - \cos\eta)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[\text{ch}(n + \frac{1}{2})\xi_1 - \cot(n + \frac{1}{2}) \cdot \xi_2 \text{sh}(n + \frac{1}{2})\xi_1 \right] P_n(\cos\eta) = V \quad (12)$$

把 $(\text{ch}\xi_1 - \cos\eta)^{-1/2}$ 展开成勒让德级数

$$(\text{ch}\xi_1 - \cos\eta)^{-1/2} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\xi_1} P_n(\cos\eta)$$

将其代入式(12)和式(11),并化简可得

$$A_n = V \frac{\text{sh}(n + 1/2)\xi_2}{\text{sh}(n + 1/2)(\xi_2 - \xi_1)} e^{-(n+1/2)\xi_1} \quad (13)$$

$$B_n = V \frac{\text{ch}(n + 1/2)\xi_2}{\text{sh}(n + 1/2)(\xi_1 - \xi_2)} e^{-(n+1/2)\xi_1} \quad (14)$$

把式(13)和(14)代入式(6)可得球壳层之间的电势分布,即为

$$\varphi(\xi, \eta) = V \sqrt{2(\text{ch}\xi - \cos\eta)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sh}(n + 1/2)(\xi - \xi_2)}{\text{sh}(n + 1/2)(\xi_1 - \xi_2)} e^{-(n+1/2)\xi_1} P_n(\cos\eta) \quad (15)$$

根据 $\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n}$,并考虑到 ξ 沿 $\xi = \xi_1$ 导体球外法线方向是减小,可求得 ξ_1 球面上的电荷面密度为:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0}{h_\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_1}, \text{因此导体球面 } \xi_1 \text{ 上的总电量为}$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\epsilon_0}{h_\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} h_\eta h_\psi \Big|_{\xi=\xi_1} d\eta d\psi \quad (16)$$

并且我们考虑了利用特殊函数的积分公式

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n(\cos\eta)}{(\text{ch}\xi - \cos\eta)^{3/2}} d(\cos\eta) = \frac{2\sqrt{2}}{\text{sh}\xi} e^{-(n+1/2)\xi}$$

式(16),利用 $C = Q/V$,求得偏心球形电容器电容:

$$C = \sqrt{2} \pi \epsilon_0 a \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\xi_1} \cdot$$

$$\left[\frac{2\sqrt{2} \text{sh}\xi_1}{\text{sh}\xi_1} + (2n + 1) \cot(n + \frac{1}{2})(\xi_1 - \xi_2) \right]$$

$$= \frac{2\sqrt{2} e^{-(n+1/2)\xi_1}}{2n + 1} = 4\pi \epsilon_0 R_1 \text{sh}\xi_1 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)\xi_1} \cdot$$

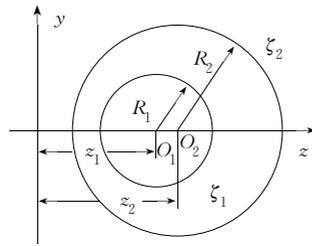


图1 偏心球形电容器示意图
Fig.1 Schematic diagram of eccentric spherical capacitor

$$\left[1 + \cot\left(n + \frac{1}{2}\right)(\xi_1 - \xi_2)\right] \quad (17)$$

3 数值计算与讨论

为了能比较直观地找到偏心球形电容器电容 C 的大小和偏心率 $m = d/(R_2 - R_1)$ 之间的关系,我们编制程序,用微机对式(17)进行了数值计算,得到:当 $R_1 = 1, R_2 = 2$ 时, C 与 m 之间的数值关系如表 1,表 1 中同时还列出了电容的相对变化率 $n = (C - C_0)/C_0$ 和 m 之间的数值关系,其中 $C_0 = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1) = 2.225\ 30 \times 10^{-10}$ (F)。表 1 中所列电容 C 的单位为 10^{-10} (F)。

表 1 电容 C 的大小与偏心率 m 之间的数值关系表

Tab. 1 Numerical relation between capacitance C and eccentricity m

d	ξ_1	ξ_2	C	m	n
0.01	5.703 74	5.010 62	2.225 40	0.01	0.000 05
0.10	3.396 74	2.706 93	2.236 69	0.10	0.00512
0.20	2.690 03	2.010 37	2.272 28	0.20	0.021 11
0.30	2.261 32	1.598 96	2.336 37	0.30	0.049 91
0.40	1.939 64	1.302 40	2.437 91	0.40	0.095 54
0.50	1.669 92	1.066 73	2.594 00	0.50	0.165 69
0.60	1.425 42	0.867 02	2.838 81	0.60	0.275 80
0.70	1.188 12	0.688 37	3.249 65	0.70	0.460 32
0.80	0.939 72	0.518 57	4.044 14	0.80	0.817 35
0.90	0.646 94	0.339 93	6.189 45	0.90	1.781 40
0.99	0.200 42	0.100 71	29.270 3	0.99	12.153 4

表 1 中可以看到偏心球形电容器电容 C 的大小是随偏心率 $m = d/(R_2 - R_1)$ 的增加而增加的,在偏心率较小的情况下,电容的变化很小,可以近似认为不变,这和文献[5]的结论是一致的,即在基于球坐标系下用分离变量的方法,得到的小偏心球形电容器的电容,在偏心率很小的情况下,电容 $C = C_0 =$

$4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$ 不发生变化的结论是一致的,而文献[6]计算结果为:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 (R_2 + d) [R_1^3 (R_2^2 + d) - R_2 (R_2 + d)^2]}{(R_2 + R_1 - d) [R_1^3 (R_2^2 + d^2) - R_2 (R_2 + d)^2]} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{-R_2 (R_2 + d)^2 (R_2 - d)^2}{(R_2 - d)^2 - [(R_2 + d)^3 - R_1^3] (R_2 - d) R_2 d}$$

并且认为偏心球形电容器的电容是随偏心距的增加而减小的观点是值得商榷的。从表 1 中还可以看到,当偏心率较大 ($m > 0.8$) 时电容的变化是相当显著的,这时电容器处在高能量状态工作,它是极不稳定的,2 个壳层相互靠近的区域容易发生电击穿,从而破坏电容器。

参考文献:

- [1] 赵凯华,陈熙谋. 电磁学(第二版)上册[M]. 北京:高等教育出版社,1997.
- [2] 游荣义. 非平行矩形板电容器的电场和电容[J]. 大学物理,1993,12(2):7-9.
- [3] 王树萱. 用双界能量对偏心圆柱电容的电场计算[J]. 大学物理,1993,12(11):15-17.
- [4] 胡文江. 两长直带电导体静电场的求解[J]. 重庆邮电学院学报(自然科学版),1998,10(3):71-73.
- [5] 符果行. 经典电磁理论方法[M]. 成都:电子科技大学出版社,1998.
- [6] 乔楚良. 非球对称形电容器的研究[J]. 广西物理,2000,4(1):24-26.
- [7] 王竹溪,郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京:北京大学出版社,2001. (编辑:龙能芬)

Computation of eccentric spherical capacitor's capacitance based on bispherical coordinate system

LI Li-hui¹, DENG Hai²

(1. Institute of Mathematics and computer, Chongqing Normal University;

2. Dep. of Phy. and Infor. Techno. Chongqing Normal University, Chongqing 400047, P. R. China)

Abstract: The series solution of the eccentric spherical capacitor's capacitance has been obtained based on the bispherical coordinate system and strict derivation, and through making program of computing, the numerical relation between the capacitance and the eccentricity is found, and the mistakes in some literatures are also pointed out.

Key words: bispherical coordinate system; electric potential distribution; capacitance; eccentricity