

# 基于 MAS 小波变换的数字图像轮廓提取算法\*

周敏, 龙昭华

(重庆邮电学院, 重庆 400065)

**摘要:**轮廓提取在许多智能视觉系统中(特别是在模式识别中),被认为是非常重要的过程。图像轮廓提取首先要进行边缘检测,然后提取阶跃结构的边缘,这 2 个步骤一般情况下是分开进行的。介绍的尺度独立算法是建立在多尺度分析与 MAS 小波变换理论的基础上,并结合数学上描述函数奇异性的 Lipschitz 指数知识,它不仅能根据梯度方向上的局部最大振幅有效进行图像边缘检测,还能根据 MAS 小波变换后的图像梯度向量振幅与变换尺度的无关性,提取出作为图像轮廓的阶跃结构边缘,并能有效消除噪声。

**关键词:**边缘检测;轮廓提取;多尺度分析;MAS 小波变换

**中图分类号:**N911.73 **文献标识码:**A

## 0 引言

仅仅从图像的线条和轮廓,人们就可以识别大量的物体,可见图像的轮廓包含着比其他位置更多的信息。轮廓提取在许多智能视觉系统中特别是模式识别中被认为是非常重要的过程。轮廓提取首先要进行边缘检测,边缘检测也被认为是图像处理、计算机视觉、模式识别、数据压缩等技术的关键。边缘检测的方法有很多,如递归滤波器法、Robert 算子、Laplace 算子、Sobel 算子、Krisch 算子等,然而大多数可以分为两类:梯度方向法和零交叉点法。前者是通过寻找图像一阶导数的局部最大和最小值来进行边缘检测的,后者是通过寻找图像二阶导数引出的零交叉点去发现边缘的。对图像而言,奇异点往往构成图像的边缘。Fourier 变换一直是研究函数奇异性的基本工具,但由于 Fourier 变换缺乏空间局部性,因而,由某些函数的 Fourier 变换只能确定该函数奇异的整体特性,而难以确定其奇异点在空间的分布情况。与 Fourier 变换不同,小波变换引入了多尺度的概念,它是近十几年来迅速发展起来的新的数学分支,广泛应用在信号处理、模式识别、图像处理等领域<sup>[1-3]</sup>。

根据数学分析上的 Lipschitz 知识,函数的奇异点主要集中在阶跃结构和端顶结构上,在图像处理

中阶跃结构的边缘通常被认为是图像的轮廓。为提取图像轮廓,我们设想能不能构造这样一种小波变换,使它不仅能在不同的方向上进行边缘检测,而且能提取阶跃结构的边缘,还能消除噪声。MAS 小波就具有这样的功能。用于轮廓提取的尺度独立算法,就是基于 MAS 小波变换理论,通过小波变换的振幅的局部最大值提取图像的边缘,并利用其与变换尺度无关性,有效地检测出阶跃结构的图像边缘,并消除噪声,从而提取出图像的轮廓<sup>[4-6]</sup>。

## 1 MAS 小波及其变换

对 MAS 小波有如下的定义:

**定义 1** 对  $\Psi \in L^2(R)$ ,记作为

$$\begin{cases} \Psi^1(x, y) = \Psi(r)k_1(\theta) \\ \Psi^2(x, y) = \Psi(r)k_2(\theta) \end{cases} \quad (1)$$

它们的模和辐角能分离,其中  $\Psi(r)$  表示模  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  的函数, $k_1(\theta)$  和  $k_2(\theta)$  表示辐角  $\theta = \arctan(y/x)$  的函数。我们称此为 MAS (modulus-angle-separated) 小波。

如果  $\int_0^{2\pi} k_1(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} k_2(\theta)d\theta = 0$ ,则显然  $\Psi^1$  和  $\Psi^2$  是二维小波。考虑它的二维小波变换,有定义 2。

**定义 2** 在尺度  $2^j$  下,函数  $f(x, y) \in R^2(L^2)$  的二维二进 MAS 小波变换定义为

\* 收稿日期:2002-12-05 修订日期:2003-03-25

基金项目:重庆市科委应用基础研究基金项目(6799)

作者简介:周敏(1974-),男,安徽芜湖人,硕士研究生,主要从事模式识别、图像处理等方面的研究。

$$W_{2^j}^i f(x, y) = (f * \Psi_{2^j}^i)(x, y) = \iint_{R^2} f(x-u, y-v) \Psi_{2^j}^i(u, v) dudv, \quad (i=1, 2; j=0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

这里,  $\Psi_{2^j}^i(u, v) = \frac{1}{2^{2j}} \Psi^i(\frac{u}{2^j}, \frac{v}{2^j})$ , ( $i=1, 2; j=0, 1, 2, \dots$ ) 为二维二进小波。这样的小波变换不仅能进行边缘检测,而且对轮廓提取来说有个显著的优点,就是阶跃结构边缘的小波变换的振幅独立于变换的尺度。这样能很好地满足检测图像边缘和提取轮廓的要求。

## 2 轮廓提取

### 2.1 边缘检测

在不同尺度下的图像一般都是经过光滑处理的。设二维光滑化函数  $\varphi(x, y)$  为

$$\varphi(x, y) = \int_R \Psi^1(x, y) dx = \int_R \Psi^2(x, y) dy,$$

这里  $\varphi(x, y)$  满足:

$$\iint_{R^2} \varphi(x, y) dx dy = 1$$

作为图像的边缘像素,它的小波变换振幅沿梯度方向达到局部最大,边缘点实际是曲面  $(f * \varphi_{2^j})(x, y)$  的拐点,记梯度向量

$$\nabla W_{2^j}^i f(x, y) = \begin{cases} W_{2^j}^1 f(x, y) = 2^j \frac{\partial}{\partial x} (f * \varphi_{2^j})(x, y) \\ W_{2^j}^2 f(x, y) = 2^j \frac{\partial}{\partial y} (f * \varphi_{2^j})(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

于是在固定尺度  $2^j$  下,梯度向量的振幅、辐角分别为

$$M_{2^j} f(x, y) = |\nabla W_{2^j} f(x, y)| = \sqrt{|W_{2^j}^1 f(x, y)|^2 + |W_{2^j}^2 f(x, y)|^2} \quad (4)$$

$$A_{2^j} f(x, y) = \arctan \frac{|W_{2^j}^1 f(x, y)|}{|W_{2^j}^2 f(x, y)|} \quad (5)$$

若  $f(x, y)$  的 MAS 小波变换的局部极大振幅的点是点  $(x, y)$ , 则在该点上  $M_{2^j} f(x, y)$  在沿着  $A_{2^j} f(x, y)$  由给定的梯度方向上为局部极大。对数字图像而言,一个点周围只有 8 个方向相邻的点,也就是说只有这最近的 8 个点起作用,故离散图像有 8 个梯度方向,沿着每个方向都能获得一个局部极大的振幅。由于任何相反方向的梯度向量的作用是相同的,根据对称性,故只需 4 个值来代表梯度方向。由于边缘都是高频信号,它们对应的小波变换具有较大的能量,也就是说,这些具有较大能量的点被视为图像的边

缘。这样对给定的数字图像信号为  $\{f(k, l) | k=0, 1, \dots, K; l=0, 1, \dots, L\}$ , 设定一阈值  $T$ , 如果这些点满足:  $M_{2^j} f(k, l) \geq T$ , 则它们都可能在边缘上。这样我们就可以通过比较 4 个方向上的极大振幅,得到局部最大振幅,从而检测出图像边缘<sup>[7]</sup>。

### 2.2 基本边缘结构分析

对图像而言,奇异点往往构成图像的边缘<sup>[8]</sup>。在数学上,通常用 Lipschitz 指数来描述函数的奇异性。对于图像信号的奇异点通常不是某单个孤立的点,而是图像所在平面中的一条曲线,沿着这些曲线,在一个方向上是奇异的,而在其垂直方向却是平滑的。我们对二维信号的 Lipschitz 指数  $\alpha$ , 有如下定义。

**定义 3** 令  $0 \leq \alpha \leq 1$ , 称函数  $f(x, y)$  在区间  $(a, b) \times (c, d)$  上有一致的 Lipschitz 指数  $\alpha$ , 如果存在一个常数  $K > 0$ , 使  $\forall (x, y) \in (a, b) \times (c, d)$ , 有

$$\alpha = \sup \{ \beta : |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq K |x - x_0|^2 + (y - y_0)^2 |^{\beta/2} \},$$

$$|x - x_0| \rightarrow 0, |y - y_0| \rightarrow 0 \quad (6)$$

不同的  $\alpha$  值对应于不同的几何边缘结构,  $\alpha$  越小,光滑性越弱。根据图像处理知识,我们知道图像边缘的种类主要有 2 种:一种是阶跃结构的边缘,边缘点两边的像素的灰度值有着显著的不同;另一种是端顶结构的边缘,它位于灰度值从增加到减少的转折点。在实际的应用中,我们取二种特殊的  $\alpha$  值,构成图像的基本边缘结构,就是

$$\begin{cases} \alpha = 0, \text{它对应于阶跃结构的边缘;} \\ \alpha = 1, \text{它对应于端顶结构的边缘。} \end{cases}$$

图 1 分别给出这两种边缘结构的示意图及相应的一阶方向导数的变化转折点。

### 2.3 轮廓提取

根据定义 3, 我们有如下定理。

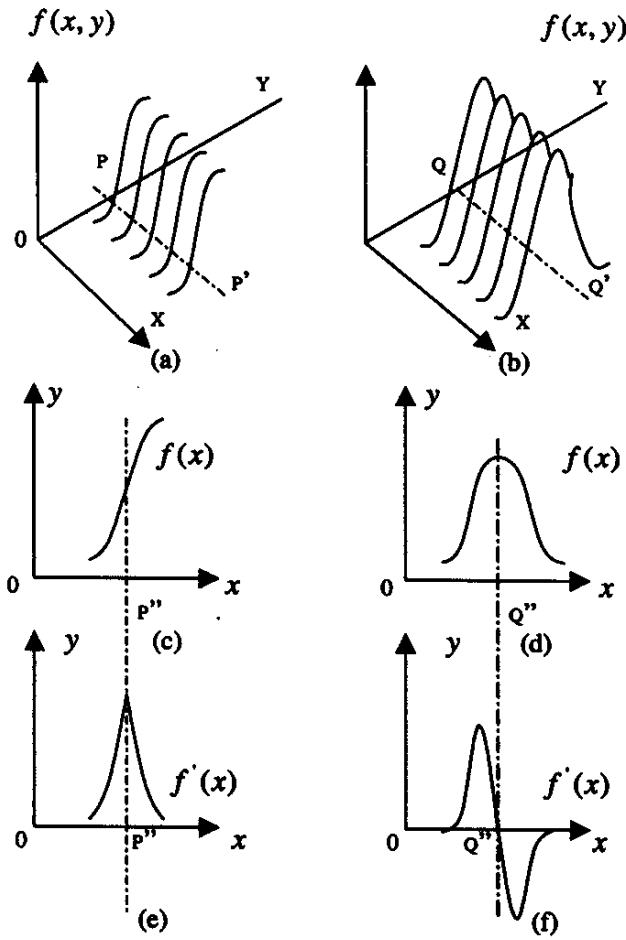
**定理 1** 令  $0 \leq \alpha \leq 1$  为实数, 则函数  $f(x, y)$  在区间  $(a, b) \times (c, d)$  上有一致的 Lipschitz 指数  $\alpha$ , 当且仅当存在一个常数  $K$ , 使得  $\forall (x, y) \in (a, b) \times (c, d)$ , 有

$$M_{2^j} f(x, y) = |\nabla W_{2^j} f(x, y)| \leq K 2^{j\alpha} \quad (7)$$

证明见文献[2], 它是我们提出的尺度独立算法的基础。实际上,边缘信号常表示为

$$f(x, y) = f_0(x, y) + \sum_i e_i(x, y) \quad (8)$$

其中  $e_i(x, y)$  表示理想的边缘信号;  $f_0(x, y)$  是光滑化函数, (如果是乘性的, 可以通过对数化变成加性



a 阶跃结构边缘; b 顶端结构边缘; c 阶跃结构  $f(x)$ ;  
 d 顶端结构  $f(x)$ ; e 阶跃结构  $f'(x)$ ; f 顶端结构  $f'(x)$

图1 二种基本边缘结构及其一阶导数示意图  
 Fig.1 Sketch map of two basic edge structures and their first derivative

的光滑化函数),它有很小的奇异性或不具备奇异性。我们对式(8)进行MAS小波变换,根据定理1,显然有  $|W_{2^j}f_0(x,y)|$  远小于  $|W_{2^j}e(x,y)|$ ,故:

$$W_{2^j}f(x,y) \approx \sum_i W_{2^j}e_i(x,y)$$

因此,我们可以只对理想边缘结构进行讨论。取  $\Psi(r)$  为 Coiflet 小波函数(该函数的主要性质,在MATLAB中输入命令 waveinfo('coif') 即可获得),它在区间  $[0, \infty)$  上是具有紧支撑集的函数。同时,为了便于应用,不失一般性,对MAS小波,令:

$$k_1(\theta) = \cos\theta; \quad k_2(\theta) = \sin\theta$$

下面对2种边缘结构的MAS小波变换进行讨论。

(1) 阶跃结构

考虑理想阶跃结构的边缘,即在边缘上时  $e(x,y)$  为1,非边缘点时  $e(x,y)$  为0。令  $(x_0, y_0)$  为阶跃结构的边缘上的点,  $\theta$  为在边缘点  $(x_0, y_0)$  相交的2

条斜线的夹角,且  $0 < \theta < 2\pi$ ,  $k_1$  和  $k_2$  为2条斜线在该点的斜率,  $\theta_0$  为  $x$  轴与一条斜线的夹角,则有

$$W_{2^j}^1 f(x_0, y_0) = \iint_{v \leq k_1 u, v \leq k_2 u} \Psi_{2^j}^1(u, v) dudv = \int_0^\infty r dr \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \theta} \frac{1}{2^{2j}} \Psi\left(\frac{r}{2^j}\right) \cos \alpha da = \int_0^\infty r dr \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \theta} \Psi(r) \cos \alpha da = \left(\int_0^\infty r \Psi(r) dr\right) 2 \cos\left(\theta_0 + \frac{\theta}{2}\right) \sin \frac{\theta}{2}$$

同样,我们有

$$W_{2^j}^2 f(x_0, y_0) = \iint_{v \leq k_1 u, v \leq k_2 u} \Psi_{2^j}^2(u, v) dudv = \left(\int_0^\infty r \Psi(r) dr\right) 2 \sin\left(\theta_0 + \frac{\theta}{2}\right) \sin \frac{\theta}{2}$$

故我们能得到:

$$|\nabla W_{2^j} e(x_0, y_0)| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \cdot \left| \int_0^\infty r \Psi(r) dr \right| \quad (9)$$

这说明,若  $\int_0^\infty r \Psi(r) dr \neq 0$ , 阶跃结构边缘的MAS小波变换的振幅  $|\nabla W_{2^j} e(x_0, y_0)|$  是一个非零的常量,且与方向向量和变换的尺度无关。

(2) 端顶结构

令  $(x_0, y_0)$  为端顶结构的边缘点,其 Lipschitz 指数  $\alpha = 1$ , 根据定理1,有

$$|\nabla W_{2^j} e(x_0, y_0)| \leq K 2^j \quad (10)$$

这说明,端顶结构边缘的MAS小波变换的振幅随变换尺度变化而变化。

从上面的讨论中可以知道,在取不同的变换尺度时,相对于端顶结构的边缘,阶跃结构的各方向上的边缘点很容易被检测出来,当  $\theta = \pi$  时,振幅  $|\nabla W_{2^j} e(x_0, y_0)|$  达到最大值,而且角度越靠近  $\pi$ , 就越易检测出来。这样就能够提取出图像的轮廓了。

### 3 消噪

假设信号中夹有方差为  $\sigma^2$  的实白噪声函数  $n(x)$ , 其相关函数为

$$E(n(u)n(v)) = \sigma^2 \delta(u - v) = \begin{cases} \sigma^2, & u = v; \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (11)$$

因为  $|W_{2^j} n(x)|^2 = W_{2^j} n(x) \overline{W_{2^j} n(x)} =$

$$\iint n(u) \overline{n(v)} \Psi_{2^j}(x - u) \overline{\Psi_{2^j}(x - v)} dudv$$

于是有

$$E|W_{2^j} n(x)|^2 =$$

$$\begin{aligned} & \iint \sigma^2 \delta(u-v) \Psi_{2^j}(x-u) \overline{\Psi_{2^j}(x-v)} dudv = \\ & \sigma^2 \int |\Psi_{2^j}(x-u)|^2 du = \sigma^2 \frac{1}{2^j} \int |\Psi_u|^2 du = \\ & \frac{1}{2^j} \sigma^2 \|\Psi\|_2 \end{aligned} \quad (12)$$

这表明噪声的 MAS 小波变换是随着尺度的变换而变化的,尺度越大,变化越小。从上面的分析已经知道阶跃结构边缘信号的小波变换不随尺度的变换而变化,故我们可以综合几个尺度来检测出阶跃结构边缘,消除噪声。

## 4 尺度独立算法

现在我们先来说明一个问题。虽然阶跃结构的边缘的小波变换的振幅是非零的常量,但由于实际中的边缘总不是理想的,这样对阶跃结构边缘的小波变换来说,对有限的  $M \in Z$ ,只能

$$\frac{W_{2^m} f(x, y)}{W_{2^n} f(x, y)} \approx 1, (m, n = 1, 2, \dots, M) \quad (13)$$

满足式(13)的点能被认为是阶跃结构边缘,但这个约等号提取的边缘点是不确定的,为了避免之,我们使用一个实数  $R$  去代替 1,让  $R$  非常接近于 1,但又比 1 大,则有

$$\frac{1}{R} \leq \frac{W_{2^m} f(x, y)}{W_{2^n} f(x, y)} \leq R, (m, n = 1, 2, \dots, M) \quad (14)$$

这样,令  $K, L$  为有限的整数,结合上面的边缘检测方法,对于二维数字图像信号  $\{f(k, l) | k = 0, 1, \dots, K; l = 0, 1, \dots, L\}$ ,我们得到下面的尺度独立算法。

(1) 取不同的尺度  $2^j$ , 计算出  $W_{2^j} f(k, l)$  及  $A_{2^j} f(k, l)$ , ( $1 \leq j \leq J$ )。

(2) 确定阈值  $T$ , 有

$$|\nabla W_{2^j} f(k, l)| \geq T$$

且沿  $A_{2^j} f(x, y)$  所代表的 4 个梯度方向达到局部最大值。

(3) 确定实数  $R$ , 有

$$\frac{1}{R} \leq \frac{|\nabla W_{2^m} f(k, l)|}{|\nabla W_{2^n} f(k, l)|} \leq R, (m, n = 1, 2, \dots, M)$$

那么满足上面条件的点  $(k, l)$  被认为是图像阶跃结构边缘上的点,是图像的轮廓上的点。

## 5 实验与结论

理论上我们已经证明了 MAS 小波变换能检测出图像的边缘,消除噪声,并能提取图像的轮廓。这

种算法的关键有 2 个:一个是  $W_{2^j} f(x, y)$  的计算,这关系到轮廓提取的速度问题,我们可以根据数字化积分梯形公式进行计算,在给定的尺度  $2^j$  下,  $\{W_{2^j} f(x, y)\}_{x, y=0}^N$  的计算复杂度为  $O(N^2)$ ;另一个是小波类型及  $T, R$  值的选择,它们选择的恰当与否决定了轮廓提取的效果。现在我们通过实际例子来说明这种算法的有效性。对一幅被噪声污染的灰度图进行 MAS 小波变换,这里取  $\Psi(r)$  为 coif3 小波,然后运用尺度独立算法,其中  $T$  取 44.15,而  $R$  取 1.02,得到相关的图像如图 2 所示,其中图 2a 为原图,<sup>[9]</sup>图 2b、图 2c、图 2d 为在尺度  $2^j = 4, 8$  下的 MAS 小波变换的振幅的图像,图 2e 为经过尺度独立算法后的图像轮廓。

根据以上分析,我们可以看出该算法能有效地检测图像的边缘,提取轮廓,并消除噪声。

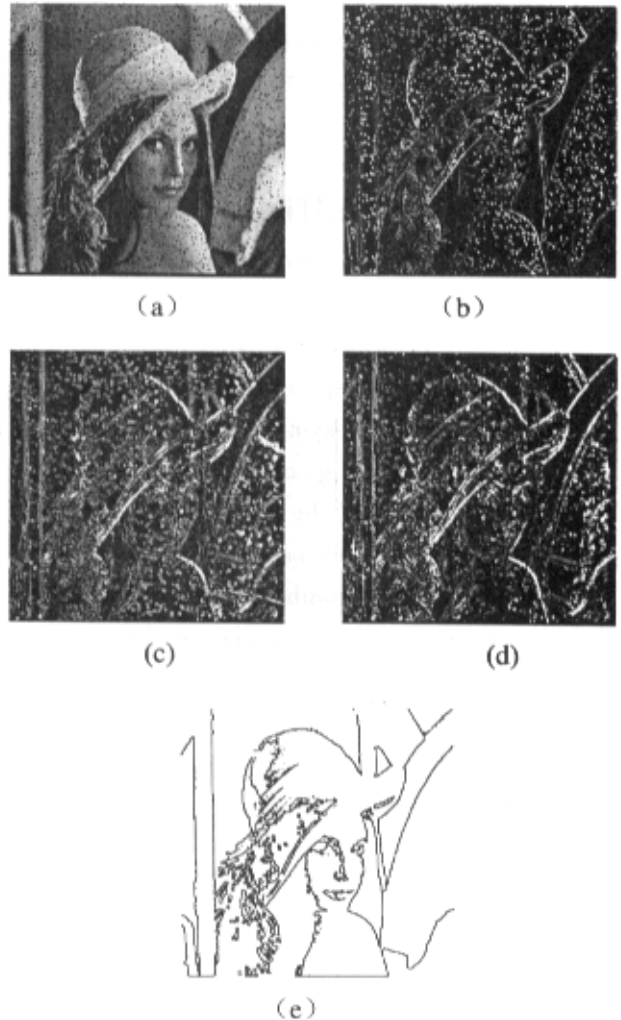


图 2 使用独立尺度算法的轮廓提取图示

Fig. 2 Contours of image extracted by the proposed algorithm

参考文献:

[1] [美]崔锦泰.小波分析导论[M].程正兴译,白居宪审校.西安:西安交通大学出版社,1995.

[2] 秦前清,杨宗凯.实用小波分析[M].西安:西安交通大学出版社,1994.

[3] TANG Y Y, YANG L H, LIU J, et al. Wavelet theory and its application to pattern recognition [ M ]. Singapore: World Scientific, 2000. 179-228.

[4] CHRISTOPH Lurig, ROBERTO Grosso, THOMAS Ertl. Combining wavelet transform and graph theory for feature extraction and visualization [R]. 8th EG Workshop on ViSC, Boulogne sur Mer, 1997. 28-30.

[5] KESTENER Pierre, LINA Jean Marc, JEAN Philippe Saint, et al. Wavelet-based multifractal formalism to assist in diagnosis in digitized mammograms [J]. Image Anal Stereol, 2001, 20(3):169-174.

[6] GABRIEL Ferna'ndez, TERRANCE Huntsberger. Wavelet-based system for recognition and labeling of polyhedral junctions [J]. Optical Engineering, 1998, 37(1):158-165.

[7] HOU Z J, WEI G W. A new approach to edge detection [J]. Pattern Recognition, 2002, 35(7):1559-1570.

[8] MALLAT S, HWANG W L. Singularity detection and processing with wavelets [J]. IEEE Trans on Information Theory, 1992, 38(2):617-643.

[9] 陈善学.一种基于小波变换的图像压缩方法[J].重庆邮电学院学报(自然科学版),2001, 13(3):46-48. (编辑:郭继笃)

## Efficient algorithm of extracting digital image contour based on MAS wavelet transform

ZHOU Min, LONG Zhao-hua

*(Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, P. R. China)*

**Abstract:** Finding contour in an image is considered to be an important process in many artificial vision systems, especially in pattern recognition. Edge detection must be firstly processed in image contour extraction, then the step-structure edge that is regarded as image contour should be extracted. Generally, two steps are detached. Scale-Independent algorithm in this paper is based on multiresolution analysis and MAS wavelet transform theory, and combined with Lipschitz exponent knowledge which is a remarkable mathematical tool to analyze the singularities including the edges. It can not only detect image edge according to the local maximum modulus along the gradient direction, but also easily to extract step-structure edge of image and remove the noise according to the modulus of the MAS wavelet transform that is independent of the scale of the transform.

**Key words:** edge detection; contour extract; multiresolution analysis; MAS wavelet transform