

麦克斯韦速度分量分布分析*

刘成周

(滨州师专 物理系, 山东滨州 256604)

摘要: 一般教材对麦克斯韦速度及速率分布均做了较详细的分析^[1-3], 但对速度分量分布却较少讨论, 这里应用一般统计法和比较法, 以速度 x 分量分布为例, 给出了气体分子热运动的速率分量分布的特征值及温度分界值, 分析了气体温度对麦克斯韦速率分量分布函数的影响, 并对结论做了讨论。

关键词: 麦克斯韦速率分量分布; 概率; 温度; 分界值

中图分类号: 0552.3 文献标识码: A

Analysis on the Maxwellian Component Velocity Distribution

LIU Cheng-zhou

(Department of Physics, Binzhou Teachers College, Binzhou 256604, P. R. China)

Abstract: The characteristic volume and the temperature division about heat gas movement are given, the influence about gas temperature to the Maxwellian component velocity distribution is analysed, and the result is discussed.

Key words: Maxwellian component velocity distribution; probability; temperature; division

1 气体分子热运动三特征速度分量值

处于平衡态的气体, 其分子热运动的麦克斯韦速度 x 分量分布函数为:

$$f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{1/2} \exp(-mv_x^2/2KT) \quad (1)$$

式中 m 为分子质量, T 为气体热力学温度, K 为玻尔兹曼常量。对于确定平衡态气体, 据式(1)可知:

$$\frac{df(v_x)}{dv_x} = \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{1/2} \exp(-mv_x^2/2KT) \left(-\frac{mv_x}{KT}\right)$$

令 $\frac{df(v_x)}{dv_x} = 0$, 则有 $v_x = 0$, 且知 $\frac{d^2f(v_x)}{dv_x^2} \Big|_{v_x=0} < 0$

故 $v_x = 0$ 对应 $f(v_x)$ 的极大值, 即分子速度 x 分量的最大几值为:

$$v_{xp} = 0 \quad (2)$$

把式(2)代入式(1)知 $f(v_{xp}) = \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{1/2}$ 。又可知 v_x

的平均值为:

$$\begin{aligned} \bar{v}_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} v_x f(v_x) dv_x = \\ &\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-mv_x^2/2KT) v_x dv_x = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

而 $f(\bar{v}_x) = \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{1/2}$ 。 v_x^2 的平均值为:

$$\begin{aligned} \bar{v}_x^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f(v_x) dv_x = \\ &\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-mv_x^2/2KT) v_x^2 dv_x = \frac{KT}{m} \end{aligned}$$

故 v_x 的方均值为:

$$v_{xs} = \sqrt{\frac{KT}{m}} \quad (4)$$

且 $f(v_{xs}) = \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{1/2} e^{-1/2}$

$v_{xp} = 0$ 反映了速度 3 分量分布的相互影响,

* 收稿日期: 2001-12-15 修订日期: 2002-04-16

作者简介: 刘成周(1965-), 男, 山东威海县人, 副教授, 主要研究方向为气体分子热运动的分布规律。

$\bar{c}_x=0$ 的实质在于分子沿 x 轴正负方向几率均等,而

$v_{xs}=\sqrt{\frac{KT}{m}}$ 与能均分定理相对应。另外,显见 $f(v_{xp})$:

$f(\bar{c}_x):f(v_{xs})=1:1:1/\sqrt{e}$,且 3 特征速度分量对应的分布几率均与气体温度的平方根成反比,下面用比较法讨论了任一速度分量对应的分布函数值与气体温度关系。

2 速度分量的分界值

由式(1)知同一气体对应 2 个不同的温度 T_1 和 T_2 (如设 $T_2>T_1$) 有 2 不同的速度分量分布函数:

$$f_1(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi KT_1}\right)^{1/2} \exp(-mv_x^2/2KT_1),$$

$$f_2(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi KT_2}\right)^{1/2} \exp(-mv_x^2/2KT_2)$$

故

$$f_1(v_x)/f_2(v_x) = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2K} \frac{T_2 - T_1}{T_2 T_1}\right) \quad (5)$$

令 $f_1(v_x)/f_2(v_x)=1$, 则有:

$$\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2K} \frac{T_2 - T_1}{T_2 T_1}\right) = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2}$$

解此方程,可得:

$$v_{xA_1} = \left[\frac{K}{m} \frac{T_2 T_1}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1}\right]^{1/2},$$

$$v_{xA_2} = \left[\frac{K}{m} \frac{T_2 T_1}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1}\right]^{1/2} \quad (6)$$

如图 1 所示,两分布曲线交于 A_1 、 A_2 两点,由式(5)及图均可见,当 $v_x > v_{xA_1}$ 及 $v_x < v_{xA_2}$ 时, $f_1(v_x) < f_2(v_x)$, 说明在该速度分量区域,对应温度 T_1 升至 T_2 ,

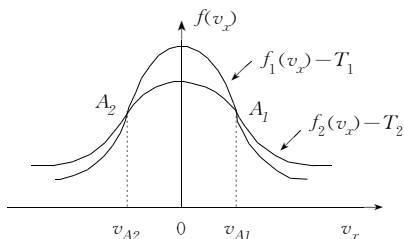


图1 速度分量分布的分界速度分量

Fig. 1 Division velocity distribution of component velocity distribution

任一速度分量对应的分布几率均变大;当 $v_{xA_2} < v_x < v_{xA_1}$ 时, $f_1(v_x) > f_2(v_x)$, 说明在该速度分量区域,对应 T_1 升至 T_2 , 任一速度分量对应的分布几率均变小。 v_{xA_1} 和 v_{xA_2} 就是速度 x 分量分布函数对应温度 T_1

和 T_2 的两分界速度分量值。

3 速度分量分布函数的分界温度

当温度连续变化时,对确定种类气体应考察对应某一固定 v_x 的几率变化。由式(1)知:

$$\frac{\partial f(v_x)}{\partial T} = \exp(-mv_x^2/2KT) \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{1/2} \frac{1}{2T} \left[\frac{mv_x^2}{KT} - 1\right]$$

令 $\frac{\partial f(v_x)}{\partial T} = 0$, 则有 $\frac{mv_x^2}{KT} - 1 = 0$, 故得:

$$T_B = \frac{m}{K} v_x^2 \quad (7)$$

显然,当 $T < T_B$ 时, $\frac{\partial f(v_x)}{\partial T} > 0$, 说明在该温度范围随着温度的升高,对应 v_x 的分布几率增大; $T > T_B$ 时, $\frac{\partial f(v_x)}{\partial T} < 0$, 说明在该温度范围,随着温度的升高,对应 v_x 的分布几率减小, T_B 就是所有温度下的速度分量分布函数对应 v_x 的分界温度。

4 讨论

1) 把式(6)代入式(7)可得:

$$T_B(v_{xA_1}) = T_B(v_{xA_2}) = \frac{T_2 T_1}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (8)$$

式(8)说明,在相同的温度变化下,对应任意气体,速度分量分布分界分量值对应的分界温度均相同,与气体的种类无关。

2) 对于氧气,取 $T_1 = 300$ K, $T_2 = 400$ K, 由式(6)可知:

$$v_{xA_1} = \left[\frac{K}{m} \frac{T_2 T_1}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1}\right]^{1/2} = 2.99 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

说明氧气经历从 300 K 至 400 K 的升温变化后,在 $(-\infty, -2.99 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$ 及 $(2.99 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, +\infty)$ 区间内,任一速度分量附近的分子数都由少变多,而在 $(-2.99 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, 2.99 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$ 区间内任一速度分量附近的分子数都由多变少。

3) 把 $v_{xA_1} = -2.99 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 及 $v_{xA_2} = 2.99 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 代入(7)式可得 $T_B = 345.22$ K, 这表明对应 $-2.99 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 和 $2.99 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度分量的分布几率,在 300 K 至 345.22 K 区间内,随着温度升高,分布几率值变大,反之,随着温度降低,几率值变小;而在 345.22 K 至 $+\infty$ K 范围内,随着温度升高,对应 $\pm 2.99 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的分量分布几率变

小,而随着温度降低,相应几率值变大。

4) 对 $T_1=300\text{ K}$ 和 $T_2=400\text{ K}$ 的同种气体,由 v_{xA} 的意义知 $f_1(v_{xA_1})=f_2(v_{xA_1})$ 及 $f_1(v_{xA_2})=f_2(v_{xA_2})$, 结合说明(3), 则知随着温度从 300 K 升到 345.22 K , 对应 $\pm 2.99 \times 10^2\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的分量分布几率的增加量, 与随着温度从 345.22 K 升至 400 K 时, 相应分布几率的减少量应相等。

5) 该文(2)、(3)、(4)、(6)、(7)式, 给出了气体分子热运动时, 速度 x 分量的一些统计特征量, 其量值从不同方面对相应速度 x 分量的热运动时以简要的统计说明, 可使复杂运动分布及分布变化得以简化, 并便于分布函数的应用和讨论其物理内涵。

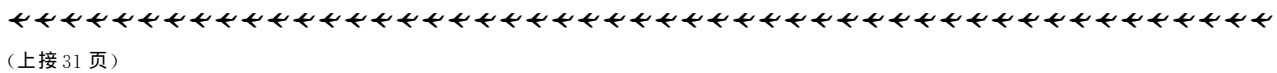
参 考 文 献

[1] 李椿,章立源,钱立武. 热学[M]. 北京:高等教育出版社,1978.

[2] 黄淑清,聂宜如,申先甲. 热学教程[M]. 北京:高等教育出版社,1985.

[3] 余维诚. 热学[M]. 上海:华东师范大学出版社,1987.

[4] 刘成周,门福殿. 气体分子频率分布分析[J]. 重庆邮电学院学报(自然科学版),1999,11(1):73-75. (编辑:龙能芬)



(上接 31 页)

这样可以保证在高优先级队列的分组数量突增且超过 MAX_LENGTH_i 的情况下, 可以申请增大其权植, 以保证这些用户的服务质量不降低。

3 结 论

本文利用代理技术来解决调度器中权值的动态分配, 它首先依据优先级来为各个队列分配权值, 然后再利用队列长度实时进行权值二次分配。这样做, 不仅能够保证各队列在正常情况下按照优先级调度, 而且还能在数据突增情况下, 防止分组的大量丢弃, 有利于提高网络的稳定性和服务质量。

参 考 文 献

[1] FLOYD S, JACOBSON V. Sharing and Resource Management Models for Packet Networks [A]. IEEE/ACM Transactions on Networking, 3, no. 4 Aug, 1995.

[2] FLOYD S, JACOBSON V. Random early de-

tection gateways for congestion avoidance [A]. IEEE/ACM Transactions on Networking, no. 4, Aug 1993.

[3] BRADEN R, CLARK D, SHENKER S. Integrated services in the internet architecture: an overview [A]. IETF RFC1633, 2001.

[4] BLAKE S, BLACK D, CARLSON M. et al. An architecture for differentiated services [A]. IETF RFC 2475, 1998.

[5] Grenville Armitage. IP 网络服务质量—多业务互联基础 [M]. 隆克平等译. 北京:机械工业出版社, 1997.

[6] 史忠植. 智能主体及其应用 [M]. 北京:科学出版社, 1998.

[7] 张登银. Internet 网上 QoS 技术与业务分析 [A]. 全国计算机新技术与继续教育论文集(上) [C]. 成都, 2001, 8, 1-6. (编辑:郭继笃)