科学技术简报和经验交流

Mössbauer 效应問題中的一个平均值定理*

陸　　埮

Mössbauer 在研究低温 γ 共振散射时曾經証明[1]，作为某些晶体的晶格結点的原子核无反冲地輻射或吸收 γ 光子，或者說，反冲可以由晶体整体承担. 利用这种过程，他地获得了高度灵敏的 γ 共振散射.

这里所涉及的过程实际上包括两种运动，即由核內核子运动引起的 γ 輻射(或吸收)輻射(或吸收)过程中由动量守恆定律所要求的原子核质心运动. 由于晶体的束縛力力小得多，且核力是短程力，所以可以認为在晶体內原子核的质心运动和核內核子运互独立，而跃迁矩陣元也就可以分成两个独立因子. Lipkin 曾指出[2]，当晶体內某个核(如第 i 个)，由于輻射动量为 $-\hbar\mathbf{k}$ 或吸收动量为 $\hbar\mathbf{k}$ 的一个 γ 光子而得到反冲，使由某个初态 $|i\rangle$ 跃迁到另一定态 $|i'\rangle$ 时，这过程的跃迁矩陣元可以表示为

$$M_{i'i} = \langle i'|e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}|i\rangle\langle j_b|\hat{O}|j_a\rangle, \tag{1}$$

$\mathbf{r}$ 是表示反冲核位置的矢量，$\langle j_b|\hat{O}|j_a\rangle$ 是只和第 i 个原子核內部情态变化有关的因本文只討論对应的晶体情态变化，因而可以通过适当归一化而去掉这个因子. 于是情态的跃迁矩陣元可以簡单地写成

$$\langle i'|\hat{S}|i\rangle = \langle i'|e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}|i\rangle, \tag{2}$$

$\hat{S}$ 是表示晶体跃迁的么正算符. 換句話說，情态

$$|f\rangle = \hat{S}|i\rangle \tag{3}$$

晶体在某个原子核因輻射或吸收 γ 光子而受到反冲后的終态态矢. 因为 $|i'\rangle$ 可以是的任何定态，它們构成表示晶格情态的希伯特(Hilbert)空間中的完整标准基. 将(2)边同乘 $|i'\rangle$，并对所有 i' 求和，注意到 $\sum_{i'}|i'\rangle\langle i'| = 1$，就可以求得

$$|f\rangle = \hat{S}|i\rangle = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}|i\rangle. \tag{4}$$

求得了态矢，就可以进而求得任何物理量的平均值. 設 $Q(\mathbf{p}, \xi)$ 是描述晶体的任何量，$\mathbf{p}$ 是反冲核的动量算符，ξ 是晶体的其它参数(如点陣坐标和除反冲核以外其它动量)，则可以証明

$$\langle f|Q(\mathbf{p}, \xi)|f\rangle = \langle i|Q(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}, \xi)|i\rangle, \tag{5}$$

以表述为：晶体的任何物理量在反冲后的平均值可以从反冲前的相应平均值直接得只要把反冲核动量算符 $\mathbf{p}$ 换成 $\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}$.

---

* 1961 年 9 月 14 日收到；1962 年 2 月 20 日收到修改稿.

ε因斯坦慣則写出，重复出現的指标表示迭加）或

$$Y^{\mu_1\cdots\mu_n}(\mathbf{p},\xi)=p^{\nu_1}p^{\nu_2}\cdots p^{\nu_n}b_{\nu_1\cdots\nu_n}{}^{\mu_1\cdots\mu_n}(\xi),\tag{7}$$

. 注意到如下的对易关系：

$$\left.\begin{aligned}&[p^\mu,\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}]=\hbar k^\mu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},\\&[a^{\mu_1\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}(\xi),\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}]=0,\\&[b_{\nu_1\cdots\nu_n}{}^{\mu_1\cdots\mu_n}(\xi),\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}]=0,\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\langle f|X^{\mu_1\cdots\mu_n}(\mathbf{p},\xi)|f\rangle\\&=\langle i|a^{\mu_1\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}(\xi)\{p^{\nu_1}+\hbar k^{\nu_1}\}\cdots\{p^{\nu_n}+\hbar k^{\nu_n}\}|i\rangle=\\&=\langle i|X^{\mu_1\cdots\mu_n}(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k},\xi)|i\rangle,\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\langle f|Y^{\mu_1\cdots\mu_n}(\mathbf{p},\xi)|f\rangle\\&\quad=\langle i|Y^{\mu_1\cdots\mu_n}(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k},\xi)|i\rangle,\end{aligned}\tag{10}$$

式(5)。

动量表象，那么这个結論的物理实質更加鮮明．事实上，这时 $|i\rangle$ 和 $|f\rangle$ 的波 $\psi(\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_j,\cdots)$ 和 $\psi(\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_j-\hbar\mathbf{k},\cdots)$，后者在 $\mathbf{p}_j=\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}$ 的 $_j=\mathbf{p}$ 的值相等．可見，晶体初、終态的不同仅仅在于后者第 j 个原子核由了附加动量 $\hbar\mathbf{k}$，从而物理量在初、終态中的差别也就仅仅在于 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}$ 指出，在动量表象中，Mössbauer 几率将等于

$$i|f\rangle|^2=\left|\int\psi^*(\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_j,\cdots)\psi(\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_j-\hbar\mathbf{k},\cdots)d\mathbf{p}\right|^2\tag{11}$$

力量空間作出)，其大小决定于反冲前、后反冲核在动量空間內是否占有較大为了获得大的 Mössbauer 效应，反冲核占有的动量空間（在 $\mathbf{k}$ 方向上）的范动量 $\hbar\mathbf{k}$ 大得多． 要求反冲核占有大的动量空間，意味着在位置空間內只（由测不准关系），或者說，反冲核必須被束縛得很紧．

公式 (5) 的例子，我們来計算晶体得到的平均反冲能量和反冲能量均方偏晶体，晶格点陣間的作用能可近似地認为只和点陣坐标有关，而和它們的动晶体的总哈密頓量 H 可以分为两部分：

$$H(\mathbf{p},\xi)=H_1(\mathbf{p})+H_2(\xi),\tag{12}$$

$p^2/2M$ 是反冲核动能算符，$H_2(\xi)$ 是晶体的作用能与除反冲核外其它核于是，由(5)式即可推知静止晶体得到的平均反冲能量和反冲能量均方偏差

$$\begin{aligned}E_f-E_i&=\langle f|H(\mathbf{p},\xi)|f\rangle-\langle i|H(\mathbf{p},\xi)|i\rangle\\&=\langle i|\{H(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k},\xi)-H(\mathbf{p},\xi)\}|i\rangle\end{aligned}$$

$$= \langle i|\{H(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, \zeta)\}^2|i\rangle - E_f$$

$$= \frac{\hbar^2}{M^2}\langle i|(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p})^2|i\rangle$$

$$= 4EE_k, \tag{14}$$

$E = \hbar^2 k^2/2M$ 为自由核所应該得到的反冲能量，而 $E_k = \langle i|(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}/k)^2|i\rangle/2M$ 为核在 $\mathbf{k}$ 方向上运动的平均动能。在計算过程中考虑到了静止晶体的$\langle i|\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}|i\rangle=0$。式同于 Lipkin 的結果[2]。

参　考　文　献

Mössbauer, R. L. *Zeit. f. Physik*, **151** (1958), 124.

Lipkin, H. J. *Ann. of Phys.*, **9** (1960), 332.