

# 状态反馈控制声光双稳系统的倍周期分岔和混沌\*

吕翎 杜增 栾玲

(辽宁师范大学物理系, 大连 116029)

**摘要** 设计了一种动力学状态反馈(DSF)方法控制非线性混沌系统. 介绍了DSF方法的控制原理, 并用此方法控制声光双稳(AOB)系统的混沌, 以此验证其有效性. 仿真模拟显示, 通过选择恰当的控制参数, 有效地实现了声光双稳(AOB)系统中倍周期分岔的延迟控制和混沌吸引子中原不稳定周期轨道的稳定控制, 同时, 还可以将系统控制在 $2^n p$ 、 $3^m p$ 和 $2^n p \times 3^m p$ 这样其它任意所需的周期轨道上.

**关键词** 声光双稳系统; 状态反馈; 倍周期分岔; 混沌; 控制

**中图分类号** O415.5 **文献标识码** A

## 0 引言

自美国物理学家 Ott、Grebogi 以及 Yorke 首次于 1990 年从理论上提出控制混沌的参数微扰方法(OGY 方法)以来<sup>[1]</sup>, 随着人们对混沌本质的认识以及它在各学科所显现出的极大的、广泛的应用价值, 混沌控制及同步研究进展迅速, 迄今, 已成为国际国内令人瞩目的前沿课题<sup>[2,3]</sup>. 混沌控制的目标主要有: 其一是对混沌吸引子内原已存在的某个不稳定的周期轨道进行稳定控制, 这种控制不改变系统中原有的周期轨道; 其二则是根据实际需要, 将系统控制在任意轨道上, 使系统获得新的动力学行为; 其三是实现两个或多个相同动力学系统的周期同步、混沌同步或超混沌同步; 其四是消除多重的混沌或超混沌吸引子流域. 由此产生了一系列的控制方法, 归纳起来可以分为两类: 一是通过调节参数达到对系统混沌行为的控制, 如 OGY 方法、参数共振法<sup>[4]</sup>等; 二是对系统的变量实施反馈或无反馈控制, 如脉冲反馈法<sup>[5]</sup>、延时反馈法<sup>[6]</sup>、自适应反馈法<sup>[7]</sup>、外力反馈法<sup>[8]</sup>、辅助参考反馈法<sup>[9]</sup>等.

1994 年, Abed 及其合作者提出了一种变量反馈法一倍周期分岔控制法<sup>[10]</sup>对一维 Logistic 映射系统实现了稳定控制, 成功地推迟了倍周期分岔的发生. 但由于在反馈中利用了淘汰滤波器, 所以这种方法仅能实现对系统低周期轨道的控制. 本文设计了一种动力学状态反馈(DSF)控制方法, 有效地实现了对声光双稳(AOB)系统的倍周期分岔和混沌的控制, 这种方法的优势在于, 不仅可以推迟系统中倍周期分岔的发生; 稳定控制混沌吸引子内原已存在的某个不稳定的周期轨道, 而且还可以将系统控

制在其它任意所需的周期轨道上, 对控制低周期轨道和高周期轨道同样方便有效.

## 1 控制方法

设  $n$  维离散非线性动力学系统

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu) \quad (1)$$

其中  $x_k \in R^n$ ,  $k$  为整数,  $\mu \in R$  为系统的参数. 假设系统随参数  $\mu$  的变化由倍周期分岔进入混沌, 对系统(1)实施状态反馈, 构造的反馈控制系统为

$$x_{k+m} = Bf^{(m)}(x_k, \mu) + A x_k \quad (2)$$

式中  $m$  为正整数,  $A$  和  $B$  是控制参数,  $0 < A, B < 1$ ,  $f^{(m)}(x_k, \mu)$  是  $f(x_k, \mu)$  的  $m$  次复合函数, 即

$$f^{(m)}(x_k, \mu) = f(f(\dots f(x_k, \mu)\dots)) \quad (3)$$

若欲将系统稳定控制在原已存在的某个不稳定的周期轨道, 取

$$B = 1 - A \quad (4)$$

这样受控系统(2)与原系统(1)具有相同的  $m$  周期轨道. 这是因为系统(1)经过  $m$  次迭代后变为

$$x_{k+m} = f^{(m)}(x_k, \mu) \quad (5)$$

当系统(1)有  $m$  周期轨道时, 令  $x_{k+m} = x_k = x$ , 则式(5)满足  $x = f^{(m)}(x, \mu)$  (6)

当受控系统(2)有  $m$  周期轨道时, 由式(2)得其  $m$  周期轨道满足的方程为

$$y = (1 - A)f^{(m)}(y, \mu) + A y \quad (7)$$

即

$$y = f^{(m)}(y, \mu) \quad (8)$$

比较(6)和(8), 受控系统(2)与原系统(1)的  $m$  周期轨道满足相同的方程.

若欲将系统稳定控制在其它任意不稳定的周期轨道, 控制参数  $A$  和  $B$  满足  $B \neq 1 - A$  即可.

由稳定性理论可知<sup>[11]</sup>, 当受控系统(2)在不动点  $\{x^*\}$  处的 Jacobi 矩阵的所有本征值  $\lambda_i$  满足  $|\lambda_i| < 1 (i = 1, 2, \dots)$  时, 系统得到了稳定控制.

\*国家自然科学基金(No. 10175032)以及辽宁省教育厅自然科学基金(No. 202122023)资助

Tel: 0411-84259566 Email: lshdg@sina.com.cn

收稿日期: 2003-10-15

## 2 应用举例

声光双稳系统是典型的由倍周期分岔进入混沌的模型,它的表述形式为<sup>[12]</sup>

$$x_{n+1} = \pi[r - u \sin^2(x_n - x_b)] \quad (9)$$

式中  $x$  为驱动源输入处的电压,  $x_b$  为驱动源的偏压,  $r$  为放大器的偏压,  $u$  为入射光强,它是系统的调控参数,以上各变量均经过适当的标度变换并归一化.文献[12]给出当  $r=3, x_b=2$  时,系统由倍周期分岔进入混沌,作出系统状态随迭代次数的演化以及分岔图如图1、图2所示.

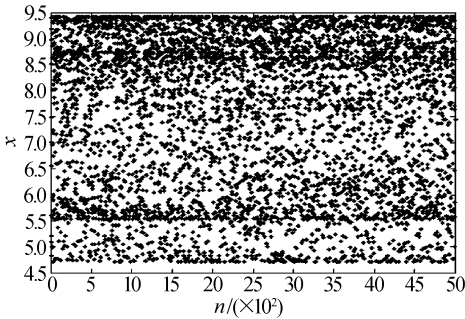


图1 系统状态随迭代次数的演化 ( $u=1.5$ )

Fig.1 The evolution of the system state with iteration number ( $u=1.5$ )

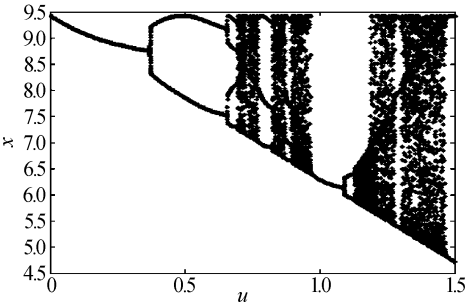


图2 系统分岔图

Fig.2 Bifurcation map of the system

根据式(2)表达的控制方法,受控后的声光双稳系统的表述形式为

$$x_{k+m} = B\pi[r - u \sin^2(x_k - x_b)] + Ax_k \quad (10)$$

当  $m=1$  时,受控声光双稳系统变为

$$x_{k+1} = B\pi[r - u \sin^2(x_k - x_b)] + Ax_k \quad (11)$$

取  $B=1-A$ ,此时,受控系统(11)与原系统(9)具有相同的周期为1的解,即具有相同的不动点  $x^*$ ,其稳定性条件为

$$|-(1-A)\pi u \sin[2(x^* - x_b)] + A| < 1 \quad (12)$$

由此得出周期1稳定的参数范围

$$0 < u < \left(\frac{1+A}{1-A}\right)u_1 \quad (13)$$

而未加控制的原系统(9)具有稳定的周期1的参数范围是

$$0 < u < u_1 \quad (14)$$

$$u_1 = 1 / \{\pi \sin[2(x^* - x_b)]\} \quad (15)$$

将  $x^*, x_b$  的数值代入,得出  $u_1=0.38$ ,则原系统(9)在  $u_1$  处发生第一次倍周期分岔.

比较式(13)、(14)可以看出,受控系统具有稳定的周期1的参数范围大于原系统的  $\left(\frac{1+A}{1-A}\right)$  倍,从而使受控系统的分岔被推迟或完全消除,从而能推迟或阻止混沌的出现.对于周期2、周期4、...周期  $2^n$ ,可采取上述同样的方法加以处理.

通过计算机仿真模拟,可以形象直观地展示其控制效果.仿真模拟周期1、周期2的倍周期分岔延迟控制结果如图3、图4所示.

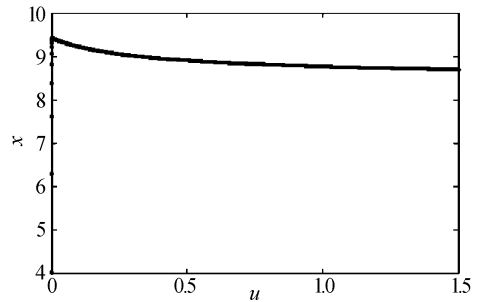


图3 周期1的倍周期分岔延迟控制 ( $A=0.58$ )

Fig.3 Control of delaying period-doubling bifurcations ( $1p$ ) ( $A=0.58$ )

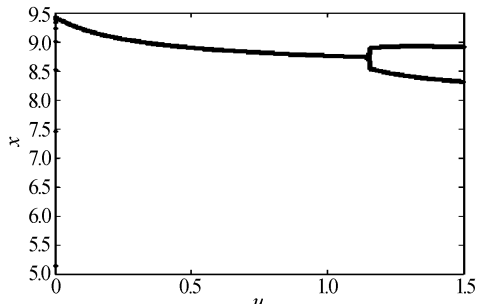
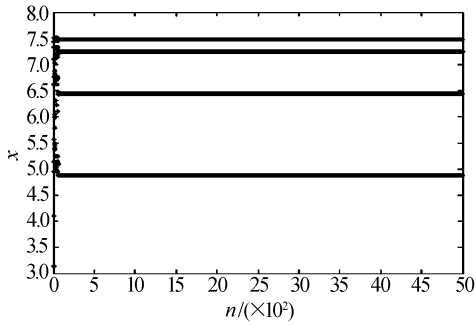
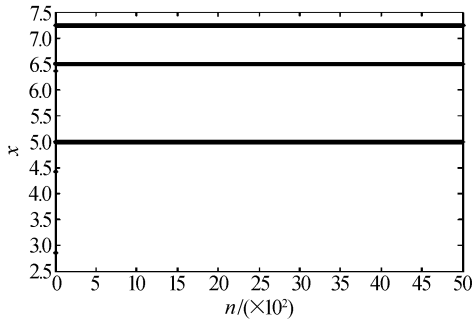
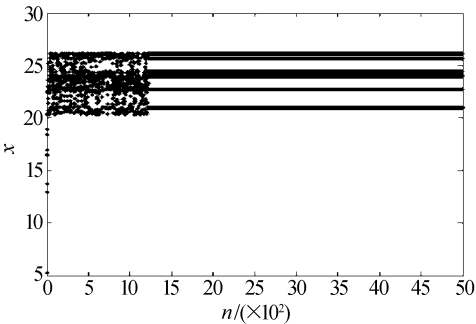
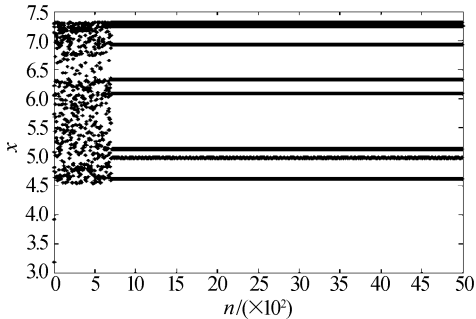


图4 周期2的倍周期分岔延迟控制 ( $A=0.46$ )

Fig.4 Control of delaying period-doubling bifurcations ( $2p$ ) ( $A=0.46$ )

同时,此种控制方法还可以控制嵌入在原系统混沌吸引子中不稳定的周期轨道,由图1、图2看出,原系统在参数  $u=1.5$  时为混沌状态,但施加控制后,通过调节控制参数  $A$ ,可以迅速直接将混沌状态转变为稳定的周期轨道,由于考虑了式(4)的约束,从而保证了这些周期轨道就是原系统混沌吸引子中不稳定的周期轨道,图5给出周期4轨道的稳定控制结果.

将系统混沌稳定控制在其它任意所需的目标周期轨道是本文另一个主要目标,此时控制参数  $A, B$  取消式(4)的约束,同时调节  $A, B$  两个数值,并保持  $B \neq 1-A$ ,就可以将系统稳定控制在任意所需的目标周期轨道上,典型的控制结果如图6~8所示.

图5 原系统4p周期轨道的稳定( $A=0.51$ )Fig.5 Control of unstable periodic orbits in a chaotic attractor of the system( $A=0.51$ )图6 3p周期轨道( $A=0.66, B=0.89$ )Fig.6 3p periodic orbits( $A=0.66, B=0.89$ )图7 6p周期轨道( $A=0.70, B=0.99$ )Fig.7 6p periodic orbit( $A=0.70, B=0.99$ )图8 8p周期轨道( $A=0.22, B=0.66$ )Fig.8 8p periodic orbit( $A=0.22, B=0.66$ )

仿真模拟过程中还发现,这种控制方法控制域极宽,通过恰当地选择控制参数,可以将系统稳定在 $1p, 2p, 3p \dots 2^n p, 3^m p$ 以及 $2^n p \times 3^m p$ 这样多种不同的周期轨道上,并且不同组的控制参数可以将系统控制在同一周期轨道上,说明获得同一周期轨道的控制参数并不是唯一的。

### 3 结论

本文设计了一种动力学状态反馈(DSF)方法,介绍了此方法的控制原理,并给出了受控系统得到稳定控制的条件.将此方法应用到声光双稳(AOB)系统,理论计算和仿真模拟结果表明,通过恰当地选择控制参数,可以实现倍周期分岔的延迟控制、混沌吸引子中原不稳定周期轨道的稳定控制以及将混沌控制在其它任意所需的周期轨道上,并且对控制低周期轨道和高周期轨道同样方便、迅速、有效.倍周期分岔的延迟控制时,可以使受控系统具有稳定的周期1的参数范围扩大为原系统的 $(\frac{1+A}{1-A})$ 倍,从而使受控系统的分岔被推迟或完全消除,稳定的周期2、周期4、 $\dots$ 周期 $2^n$ 的参数范围同样被扩大;对嵌入在原系统混沌吸引子中不稳定的周期轨道的控制可以使这些不稳定周期轨道全部加以稳定;并可以将混沌控制在 $2^n p, 3^m p$ 以及 $2^n p \times 3^m p$ 这样多种其它任意所需的周期轨道上。

### 参考文献

- Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos. *Phys Rev Lett*, 1990, **64**(11):1196 ~ 1199
- 张喜和,沈柯. 光学二次谐波混沌控制. *光子学报*, 1999, **28**(8):722 ~ 726  
Zhang X H, Shen K. *Acta Photonica Sinica*, 1999, **28**(8):722 ~ 726
- 张涛,翟爱民,张小炎,等. 二阶级联声光双稳态超混沌的周期驱动控制. *光子学报*, 2001, **30**(7):818 ~ 821  
Zhang T, Zhai A M, Zhang X Y, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2001, **30**(7):818 ~ 821
- Roy R, Murphy Jr T W, Maier T D, et al. Dynamical control of chaotic laser: experimental stabilization of a globally coupled system. *Phys Rev Lett*, 1992, **68**(9):1259 ~ 1262
- Guemez J, Matias M A. Controlling of chaos in unidimensional map. *Phys Lett(A)*, 1993, **181**(1):29 ~ 32
- 吕翎,李钢,欧永成. 控制强度对 Bragg 光学双稳系统混沌控制的影响. *光学技术*, 2002, **28**(1):16 ~ 21  
Lü L, Li G, Ou Y C. *Opt Tech*, 2002, **28**(1):16 ~ 21
- Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys Lett(A)*, 1992, **170**(6):421 ~ 428
- 吕翎,李成仁. 扰动幅度引导混沌系统到周期振荡解. *中国激光*, 2003, **30**(4):322 ~ 324  
Lü L, Li C R. *J Chin Laser*, 2003, **30**(4):322 ~ 324
- 吕翎,李成仁. 混合光学双稳系统混沌的控制. *光电子·激光*, 2002, **13**(11):1187 ~ 1189  
Lü L, Li C R. *Optoelectro · Laser*, 2002, **13**(11):1187 ~ 1189

- 10 Abed E H, Wang H O, Chen R C. Stabilization of period doubling bifurcations and implications for control of chaos. *Physica(D)*, 1994, **70**(1-2):154 ~ 164
- 11 吕翎. 非线性动力学与混沌. 大连: 大连出版社, 2000. 47 ~ 52
- Lü L. Nonlinear dynamics and chaos. Dalian: Dalian Publishing House, 2000. 47 ~ 52
- 12 Vallee R, Delisle C, Chrostowski J. Noise versus in acousto-optic bistability. *Phys Rev(A)*, 1984, **30**(1): 336 ~ 342

## Control of Period-doubling Bifurcation and Chaos in Acousto-optical Bistable System by the Feedback of States

Lü Ling, Du Zeng, Luan Ling

*Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian 116029*

Received date: 2003-10-15

**Abstract** A new method of dynamical state feedback (DSF) is proposed to control nonlinear chaos system. Control principle is introduced, and the acousto-optical bistable (AOB) system is taken as a typical example to demonstrate the effectiveness of this method. The dynamical behaviors of the AOB system controlled using the DSF method are given by computer numerical simulation. The results show that, the control of delaying period-doubling bifurcations and unstable periodic orbits in a chaotic attractor of the AOB system is effectively realized, and other stable periodic orbits  $2^n p$ ,  $3^m p$  and  $2^n p \times 3^m p$  are obtained by adjusting the control parameters.

**Keywords** Acousto-optical bistable (AOB) system; State feedback; Period-doubling bifurcation; Chaos; Control



**Lü Ling** was born in 1960. She received the M. S. degree in theoretical physics from Liaoning Normal University, in 1988. Now she is a professor at department of physics, Liaoning Normal University. Her research interest is in nonlinear physics.