第 20 卷 第 6 期 物 理 学 报 Vol. 20, No. 6
1964 年 6 月 ACTA PHYSICA SINICA June, 1964

对 SU_3 波函数的討論*

孙 洪 洲
(北京大学物理系)

提 要

本文詳細地討論了 Elliott 引入的 SU_3 波函数 $\Psi(\alpha(\lambda\mu)KLM)=\frac{2L+1}{C(\lambda\mu KL)}\int x_{\Omega}(\alpha(\lambda\mu)K)\times \times D^L_{MK}(\Omega)d\Omega$ 的若干性質. 利用 SU_3 羣的无穷小算子的对易关系，可以較容易地求出“內部态”波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)K)$ 的表达式，并由此求出了波函数 $\Psi(\alpha(\lambda\mu)KLM)$ 的母分数系数 $(f.p.c.)$.

作为例子，本文还計算出了 sd 壳中有两或三个核子的 SU_3 波函数 $\Psi(\alpha(\lambda\mu)KLM)$.

一、引 言

原子核內存在着两种形式的运动——单粒子运动与集体运动. 这两种运动各有其特点，一般講，在滿壳层外核子数不多时，单粒子运动較显著；但滿壳层外核子数較多时，原子核的集体运动就表現得很明显了. 处理原子核集体运动的大多数理論都是半經典的，卽假定原子核有一定的形状，原子核的整体在轉动或振动等等. 正如 A. Bohr[1] 所指出的，这个半經典的理論是有局限性的，例如，轉动能級实际上是应当有截断的，卽当角动量为某一个最大値时，轉动能級就不存在了. 但半經典理論不能得到这个結果. 至于这种半經典的理論还可以引起哪些理論与实驗的矛盾，現在討論得还很少，因而发展出一种完全基于量子力学理論的处理原子核集体运动的理論一直是大家所很关心的.

Elliott 的工作[2]是这方面的探討工作中較成功的一个. 按照 Elliott, 諧振子某一个簡并能級上的 n 个核子的波函数可以按 SU_3 羣分类，这 n 个核子的反对称波函数的空間部分可以表为

$$\Psi((r)[f]\alpha(\lambda\mu)KLM). \tag{1.1}$$

这里 $(\lambda\mu)$ 表示波函数按 SU_3 羣的不可約表示 $U^{(\lambda\mu)}$ 变换[2]; LM 是 n 个核子的总軌道角动量与其 z 分量的量子数; $[f]$ 是 n 的一个配分; (r) 是相应于配分 $[f]$ 的楊氏图的标号; α, K 是为了标示波函数而要引入的量子数. 波函数(1.1)一般就称为 SU_3 波函数. Elliott 証明了波函数(1.1)具有集体轉动的性质，它可以写成 Hill-Wheeler 积分的形式[2]

$$\Psi((r)[f]\alpha(\lambda\mu)KLM)=\frac{2L+1}{C(\lambda\mu KL)}\int x_{\Omega}((r)[f]\alpha(\lambda\mu)K)D^L_{MK}(\Omega)d\Omega. \tag{1.2}$$

这里 $d\Omega=\frac{1}{8\pi^2}\sin\beta d\alpha d\beta d\gamma$.

Elliott 还指出[2], SU_3 波函数在原子核的 sd 壳非常接近通常的中間耦合的波函数. 这样，进一步研究 SU_3 波函数的性质并求出它的母分数系数 $(f.p.c.)$ 是有意义的.

* 1963 年 10 月 4 日收到.

二、SU_3 波函数

(1) 我們首先討論諧振子的本征函数,諧振子的哈密頓量为

$$H=\frac{1}{2}\mu\omega^2(\mathbf{r}^2+b^4\mathbf{p}^2), \tag{2.1}$$

这里

$$b=[\hbar/\mu\omega]^{1/2}, \quad \mathbf{p}=-i\nabla. \tag{2.1'}$$

引入符号

$$a_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}(a_x-ia_y), \quad a_0=a_z, \quad a_{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_x+ia_y), \tag{2.2}$$

其中

$$a_x=\frac{1}{\sqrt{2}\,b}(x+ib^2p_x), \quad a_y=\frac{1}{\sqrt{2}\,b}(y+ib^2p_y), \quad a_z=\frac{1}{\sqrt{2}\,b}(z+ib^2p_z). \tag{2.2'}$$

a_m $(m=1,0,-1)$ 满足对易关系

$$\left.\begin{aligned}&[a_m\ a_{m'}]=[a_m^+\ a_{m'}^+]=0,\\&[a_m\ a_{m'}^+]=\delta(m\ m').\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

利用算符(2.2),H可以写为

$$H=\left(a_1^+a_1+a_{-1}^+a_{-1}+a_0^+a_0+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega, \tag{2.1''}$$

故H的本征值与本征函数可以写为

$$\begin{aligned}&E_N=\left(N+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega,\\&|m_1m_2\cdots m_N\rangle=\frac{1}{c}a_{m_1}^+a_{m_2}^+\cdots a_{m_N}^+|0\rangle,\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $|0\rangle$ 表示相应于 $N=0$ 的H的本征态; c 是归一化常数. 也可以認为 $|0\rangle$ 是量子的眞空态, $|m\rangle$ 是只有一个量子的态, $|m_1m_2\cdots m_N\rangle$ 是有N个量子的态. 容易看出,除了基态 $|0\rangle$ 以外,所有的H的本征态 $|m_1m_2\cdots m_N\rangle$ $(N=1,2\cdots)$ 都是簡并的. 例如只有一个量子的态 $|m\rangle$ 是三度簡并的,用m来标示这三个态.

$$|m\rangle=a_m^+|0\rangle \qquad m=1,0,-1.$$

可以把这三个态看成是某个三維綫性空間 R_3 中的矢量,那么对应于能量为

$$E_N=\left(N+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

的H的本征函数

$$|m_1m_2\cdots m_N\rangle=\frac{1}{c}a_{m_1}^+a_{m_2}^+\cdots a_{m_N}^+|0\rangle$$

就是N級张量了. 由于算符 a_m^+ 满足对易关系(2.3),所以 $|m_1m_2\cdots m_N\rangle$ 是对称的N級张量. 即波函数 $|m_1m_2\cdots m_N\rangle$ 的全体,构成了N級对称张量空間 $R^{(N0)}$,取它的一組基矢为 $|Nlm\rangle$, 它是H与軌道角动量及其 z 分量 L^2L_z 的共同本征函数.

这样我們看到,当波函数 $|m\rangle$ 进行一个 SU_3 变换时,

$$|m\rangle\to|m'\rangle=\sum_m U_{mm'}|m\rangle, \tag{2.5}$$

其中 $U_{mm'}$ 是一个三維么模U矩陣,那么波函数 $|Nlm\rangle$ 也对应着有一个U变换:

$$|Nlm\rangle \to |Nl'm'\rangle = \sum_{lm} U^{(N0)}_{lml'm'} |Nlm\rangle, \tag{2.5'}$$

即波函数 $|Nlm\rangle$ 按 SU_3 羣的表示 $U^{(N0)}$ 变换．由于 $|Nlm\rangle$ 是 N 級对称张量，故表示 $U^{(N0)}$ 是不可約的[3]．

应用 U 羣的理論[3,4]，可以得到波函数 $|Nlm\rangle$ 的 l 的可能值为

$$l = N\ \ N-2\ \ N-4\cdots,\ 1\ 或\ 0. \tag{2.6}$$

实际上，这个結果是我們早已熟知的．

在这一小段的最后，給出 SU_3 羣的八个无穷小算子的表达式1)：

$$\left.\begin{aligned} L_{\pm1} &= \mp(a^+_{\pm1}a_0 + a^+_0 a_{\mp1}),\\ L_0 &= (a^+_1 a_1 - a^+_{-1}a_{-1}),\\ Q_{\pm2} &= -\sqrt{6}\, a^+_{\pm1}a_{\mp1},\\ Q_{\pm1} &= \sqrt{3}\,(a^+_{\pm1}a_0 - a^+_0 a_{\mp1}),\\ Q_0 &= (2a^+_0 a_0 - a^+_1 a_1 - a^+_{-1}a_{-1}). \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

(2) 現在討論在諧振子的第 N 能級上有 n 个核子时的多体波函数，为了确定起見，在这里暂不考虑核子間的对称性問題．在第 N 能級上有 n 个核子的多体波函数可以写为

$$|l_1m_1l_2m_2\cdots l_nm_n\rangle = |Nl_1m_1\rangle|Nl_2m_2\rangle\cdots|Nl_nm_n\rangle. \tag{2.8}$$

它显然是按 SU_3 羣的表示 $(U^{(N0)})^n$ 变换的．經过适当的組合，可以得到按 SU_3 羣的不可約表示 $U^{(\lambda\mu)}$ 变换的波函数 $\Psi(\alpha(\lambda\mu)\beta LM)$．这里 α 是为了标示按 SU_3 羣的同一不可約表示 $U^{(\lambda\mu)}$ 变换的不同波函数所需要引入的量子数．β 是为了标示按 R_3 羣的同一个不可約表示变换的不同波函数所需要引入的量子数．

显然只有当 SU_3 羣的表示 $(U^{(N0)})^n$ 中包含着不可約表示 $U^{(\lambda\mu)}$ 两次或两次以上时，量子数 α 的引入才是有必要的．

应用 U 羣的表示理論，可以得到按 SU_3 羣的某个不可約表示 $U^{(\lambda\mu)}$ 变换的波函数 $\Psi(\alpha(\lambda\mu)\beta LM)$ 的 L 的可能值[2]

$$\left.\begin{aligned} L &= \max\{\lambda\mu\}+K\quad \max\{\lambda\mu\}+K-1\cdots\quad K \qquad K\neq 0,\\ L &= \max\{\lambda\mu\}\quad \max\{\lambda\mu\}-2\cdots\quad 0\ 或\ 1 \qquad K=0,\\ K &= \min\{\lambda\mu\}\quad \min\{\lambda\mu\}-2\cdots\quad 0\ 或\ 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

从 (2.9) 可以看出，当 $\min\{\lambda\mu\}\geqslant 2$ 时，按 SU_3 羣的不可約表示 $U^{(\lambda\mu)}$ 变换的波函数 $\Psi(\alpha(\lambda\mu)\beta LM)$ 当 L 等于某个值时可能出現一次以上，对于这样的波函数量子数 β 的引入是很必要的．

由于量子数 β 的引入往往带有任意性，为了避免这一困难，Elliott 引入了按 SU_3 羣的不可約表示 $U^{(\lambda\mu)}$ 变换的另一組波函数[2]

$$x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K). \tag{2.10}$$

它們是算符 Q_0, ν^2, $2\nu_0$ 的共同本征函数

$$\left.\begin{aligned} Q_0 x(\alpha(\lambda\mu)\ \varepsilon\ \Lambda\ K) &= \varepsilon x(\alpha(\lambda\mu)\ \varepsilon\ \Lambda\ K),\\ \nu^2 x(\alpha(\lambda\mu)\ \varepsilon\ \Lambda\ K) &= \Lambda(\Lambda+1)x(\alpha(\lambda\mu)\ \varepsilon\ \Lambda\ K),\\ 2\nu_0 x(\alpha(\lambda\mu)\ \varepsilon\ \Lambda\ K) &= Kx(\alpha(\lambda\mu)\ \varepsilon\ \Lambda\ K). \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

1) 与 Elliott 所定义的 SU_3 羣的无穷小算子是一样的．

算符 Q_0, ν^2, $2\nu_0$ 为[1)]

$$\left.\begin{aligned} Q_0 &= 2a_0^+a_0 - a_1^+a_1 - a_{-1}^+a_{-1}, \\ \nu^2 &= -\nu_1\nu_{-1} - \nu_{-1}\nu_1 + \nu_0\nu_0, \\ \nu_{\pm1} &= \mp\frac{1}{\sqrt{12}}Q_{\pm2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}a_{\pm1}^+a_{\mp1}, \\ \nu_0 &= \frac{1}{2}L_0 = \frac{1}{2}(a_1^+a_1 - a_{-1}^+a_{-1}). \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

容易証明，Q_0，$\nu_{\pm1}$，ν_0 满足以下对易关系：

$$\left.\begin{aligned} [\nu_{\pm1}\ Q_0] &= [\nu_0\ Q_0] = 0, \\ [\nu_{\pm1}\ \nu_0] &= \mp\nu_{\pm1}, \\ [\nu_1\ \nu_{-1}] &= -\nu_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

从(2.13)可以看出，$\nu_{\pm1}$，ν_0 所满足的对易关系与角动量 $L_{\pm1}$，L_0 所满足的对易关系一样,故有

$$\left.\begin{aligned} \Lambda &= \text{整数或半整数}, \\ K &= 2\Lambda\ \ 2\Lambda-2\cdots-2\Lambda, \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

与角动量 L^2 及其 z 分量 L_z 的共同本征函数一样，可以通过选择 K 不同的波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K)$ 間的相因子,使得

$$\langle\alpha(\lambda\mu)\tilde{\varepsilon}\tilde{\Lambda}\tilde{K}|\nu_{\pm1}|\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K\rangle = \\ = \mp\frac{1}{4}[2(2\Lambda\mp K)(2\Lambda\pm K+2)]^{1/2}\delta(\tilde{\varepsilon}\varepsilon)\delta(\tilde{\Lambda}\Lambda)\delta(\tilde{K}K\pm2). \tag{2.15}$$

应用 U 羣的表示論，Elliott 給出了在一定的 $(\lambda\mu)$ 下 $\varepsilon\Lambda$ 的可能值,在表 1 中也給出了在一定的 $(\lambda\mu)$ 下 $\varepsilon\Lambda$ 的可能值.

引入算符

$$\left.\begin{aligned} T_{\pm1/2} &= -\frac{1}{2\sqrt{6}}(Q_{\pm1}\pm\sqrt{3}L_{\pm1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}a_0^+a_{\mp1}, \\ V_q &= (-1)^{\frac{1}{2}-q}T_{-q}^+ \qquad \left(q=\pm\frac{1}{2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

容易証明，T_q，V_q 满足以下的对易关系：

$$\left.\begin{aligned} [Q_0\ T_q] &= 3T_q, \\ [\nu_0\ T_q] &= qT_q, \\ [\nu_{\pm1}\ T_q] &= \mp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mp q\right)\left(\frac{1}{2}\pm q+1\right)\right]^{1/2}T_{q\pm1}, \\ [Q_0\ V_q] &= -3V_q, \\ [\nu_0\ V_q] &= qV_q, \\ [\nu_{\pm1}\ V_q] &= \mp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mp q\right)\left(\frac{1}{2}\pm q+1\right)\right]^{1/2}V_{q\pm1}. \end{aligned}\right\} \tag{2.16'}$$

从(2.16′)可以看出，T_q 或 V_q 与 $\nu_{\pm1}$，ν_0 所满足的对易关系与 $k=1/2$ 級的不可約

1) 这里只写出了一个粒子时的情形.

表 1　約化矩陣元 $\langle(\lambda\mu)\varepsilon\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}\|(\lambda\mu)\varepsilon-3\Lambda\rangle$

可以証明 $\langle(\lambda\mu)\varepsilon\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}\|(\lambda\mu)\varepsilon-3\tilde{\Lambda}\rangle=\langle(\mu\lambda)-(\varepsilon-3)\Lambda\|\mathbf{T}\|(\mu\lambda)-\varepsilon\tilde{\Lambda}\rangle$，在表中 $a(\varepsilon\Lambda)=\langle(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\|\mathbf{T}\|(\lambda\mu)\varepsilon-3\ \Lambda+1/2\rangle$
$b(\varepsilon\Lambda)=\langle(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\|\mathbf{T}\|(\lambda\mu)\varepsilon-3\ \Lambda-1/2\rangle$.

$(\lambda\mu)$	ε	Λ	a
(00)	0	0	
(10)	2	0	1
	−1	1/2	
(20)	4	0	2
	1	1/2	3
	−2	1	
(30)	6	0	3
	3	1/2	6
	0	1	6
	−3	3/2	
(40)	8	0	4
	5	1/2	9
	2	1	12
	−1	3/2	10
	−4	2	
(50)	10	0	5
	7	1/2	12
	4	1	18
	1	3/2	20
	−2	2	15
	−5	5/2	
(60)	12	0	6
	9	1/2	15
	6	1	24
	3	3/2	30
	0	2	30
	−3	5/2	21
	−6	3	

$(\lambda\mu)$	ε	Λ	a	b
(11)	3	1/2	3/2	3/2
	0	0 1	3/2	3/2
	−3	1/2		
(21)	5	1/2	3	2
	2	0 1	3 4	2
	−1	1/2 3/2	4	2
	−4	1		
(31)	7	1/2	9/2	5/2
	4	0 1	9/2 8	5/2
	1	1/2 3/2	8 15/2	5/2
	−2	1 2	15/2	5/2
	−5	3/2		
(41)	9	1/2	6	3
	6	0 1	6 12	3
	3	1/2 3/2	12 15	3
	0	1 2	15 12	3
	−3	3/2 5/2	12	3
	−6	2		
(51)	11	1/2	15/2	7/2
	8	0 1	15/2 16	7/2
	5	1/2 3/2	16 45/2	7/2
	2	1 2	45/2 24	7/2
	−1	3/2 5/2	24 35/2	7/2
	−4	2 3	35/2	7/2
	−7	5/2		

$(\lambda\mu)$	ε	Λ	a	b
(22)	6	1	4	5
	3	1/2 3/2	4 5	4 5
	0	0 1 2	4 5	4 5
	−3	1/2 3/2	5	4
	−6	1		
(32)	8	1	6	6
	5	1/2 3/2	6 10	5 6
	2	0 1 2	6 10 9	5 6
	−1	1/2 3/2 5/2	10 9	5 6
	−4	1 2	9	5
	−7	3/2		
(42)	10	1	8	7
	7	1/2 3/2	8 15	6 7
	4	0 1 2	8 15 18	6 7
	1	1/2 3/2 5/2	15 18 14	6 7
	−2	1 2 3	18 14	6 7
	−5	3/2 5/2	14	6
	−8	2		

张量与角动量 $J_{\pm 1}$，J_0 所满足的对易关系一样．这样就有[8]

$$\left.\begin{aligned}
&\langle\alpha(\lambda\mu)\tilde{\varepsilon}\tilde{\Lambda}\tilde{K}|T_q|\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K\rangle = \\
&\quad = \delta(\tilde{\varepsilon}\varepsilon+3)\langle(\lambda\mu)\varepsilon+3\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}\|(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\rangle\frac{\left\langle\Lambda\frac{K}{2}\frac{1}{2}q\middle|\tilde{\Lambda}\frac{\tilde{K}}{2}\right\rangle}{\sqrt{(2\tilde{\Lambda}+1)}}. \\
&\langle\alpha(\lambda\mu)\tilde{\varepsilon}\tilde{\Lambda}\tilde{K}|V_q|\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K\rangle = \\
&\quad = \delta(\tilde{\varepsilon}\varepsilon-3)\langle(\lambda\mu)\varepsilon-3\tilde{\Lambda}\|\mathbf{V}\|(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\rangle\frac{\left\langle\Lambda\frac{K}{2}\frac{1}{2}q\middle|\tilde{\Lambda}\frac{\tilde{K}}{2}\right\rangle}{\sqrt{(2\tilde{\Lambda}+1)}},
\end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

这里 $\left\langle\Lambda\frac{K}{2}\frac{1}{2}q\middle|\tilde{\Lambda}\frac{\tilde{K}}{2}\right\rangle$ 是 C. G. 系数，我們称 $\langle(\lambda\mu)\varepsilon+3\tilde{\Lambda}|\mathbf{T}|(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\rangle$ 或 $\langle(\lambda\mu)\varepsilon-3\tilde{\Lambda}\|\mathbf{V}\|(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\rangle$ 为 T_q 或 V_q 的約化矩陣元．由关系(2.16)可得

$$\langle(\lambda\mu)\varepsilon+3\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}\|(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\rangle=(-1)^{\frac{1}{2}+\tilde{\Lambda}-\Lambda}\langle(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\|\mathbf{V}\|(\lambda\mu)\varepsilon+3\tilde{\Lambda}\rangle. \tag{2.18}$$

可以通过选择波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K)$ 間的相因子，使得約化矩陣元 $\langle\varepsilon+3\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}\|\varepsilon\Lambda\rangle$[1] 是正实数．

应用(2.16)可得 T_q^+ T_q 满足的对易关系

$$\left.\begin{aligned}
[T_{1/2}^+\ T_{1/2}] &= -\frac{1}{4}(Q_0+2\nu_0), \\
[T_{-1/2}^+\ T_{-1/2}] &= -\frac{1}{4}(Q_0-2\nu_0).
\end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

利用(2.19)可得約化矩陣元 $\langle\varepsilon+3\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}\|\varepsilon\Lambda\rangle$ 間的循环关系

$$\left.\begin{aligned}
|\langle\varepsilon\Lambda\|\mathbf{T}\|\varepsilon-3\Lambda+1/2\rangle|^2 &= (\Lambda+1)\left(\frac{\varepsilon}{2}-\Lambda\right)+ \\
&+\frac{1}{2\Lambda+1}|\langle\varepsilon+3\Lambda+1/2\|\mathbf{T}\|\varepsilon\Lambda\rangle|^2+ \\
&+\frac{2\Lambda+2}{2\Lambda+1}|\langle\varepsilon+3\Lambda-1/2\|\mathbf{T}\|\varepsilon\Lambda\rangle|^2, \\
|\langle\varepsilon\Lambda\|\mathbf{T}\|\varepsilon-3\Lambda-1/2\rangle|^2 &= \Lambda\left(\frac{\varepsilon}{2}+\Lambda+1\right)+ \\
&+\frac{2\Lambda}{2\Lambda+1}|\langle\varepsilon+3\Lambda+1/2\|\mathbf{T}\|\varepsilon\Lambda\rangle|^2- \\
&-\frac{1}{2\Lambda+1}|\langle\varepsilon+3\Lambda-1/2\|\mathbf{T}\|\varepsilon\Lambda\rangle|^2.
\end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

应用 (2.20) 就可以求出所有的 $|\langle\varepsilon\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}\|\varepsilon-3\Lambda\rangle|^2$．前面已規定了 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K)$ 間的相角关系，使得約化矩陣元 $\langle\varepsilon\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}\|\varepsilon-3\Lambda\rangle$ 是正实数．这样就可以应用(2.20)求出所有的 $\langle\varepsilon\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}\|\varepsilon-3\Lambda\rangle$ 值．我們把求出的 $\langle\varepsilon\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}\|\varepsilon-3\Lambda\rangle$ 的值列于表 1 中．

应当注意一点，卽取 $\nu_{\pm 1}$ 的矩陣元(2.15)与取 $\langle\varepsilon\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}\|\varepsilon-3\Lambda\rangle$ 为正实数完全确定了波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K)$ 間的相角关系． 例如 $N=2$ 能級上有一个核子时的波函数

1) 为了簡化符号，略去了 $(\lambda\mu)$．

$x((20)\varepsilon\Lambda K)$，由于以上規定可以写为

$$\left.\begin{aligned}
&x((20)\ 4\ 0\ 0)=\sqrt{\frac{1}{2}}\,a_0^+a_0^+|0\rangle,\\
&x((20)\ 1\ 1/2\ \pm 1)=\pm a_0^+a_{\pm 1}^+|0\rangle,\\
&x((20)\ -2\ 1\ \pm 2)=\sqrt{\frac{1}{2}}\,a_{\pm 1}^+a_{\pm 1}^+|0\rangle,\\
&x((20)\ -2\ 1\ 0)=-\,a_1^+a_{-1}^+|0\rangle.
\end{aligned}\right\}\tag{2.21}$$

事实上，若波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon_{\max}\Lambda K)$ 或 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon_{\min}\Lambda K)$ 已知，則利用关系(2.15)，(2.17)与 $\langle\varepsilon\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}\|\varepsilon-3\Lambda\rangle$ 的数值表，即可求出所有的波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K)$。这是由于

$$v_{\pm 1}x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K)=\mp\frac{1}{4}\,[2(2\Lambda\mp K)(2\Lambda\pm K+2)]^{1/2}x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K\pm 2),\tag{2.22}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{Kq}\left\langle\Lambda\frac{K}{2}\frac{1}{2}q\middle|\tilde{\Lambda}\frac{\tilde{K}}{2}\right\rangle V_q x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K)=\\
&\qquad=\frac{\langle\varepsilon-3\tilde{\Lambda}\|\mathbf{V}\|\varepsilon\Lambda\rangle}{\sqrt{2\tilde{\Lambda}+1}}\,x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon-3\,\tilde{\Lambda}\tilde{K}),\\
&\sum_{Kq}\left\langle\Lambda\frac{K}{2}\frac{1}{2}q\middle|\tilde{\Lambda}\frac{\tilde{K}}{2}\right\rangle T_q x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K)=\\
&\qquad=\frac{\langle\varepsilon+3\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}\|\varepsilon\Lambda\rangle}{\sqrt{2\tilde{\Lambda}+1}}\,x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon+3\,\tilde{\Lambda}\tilde{K}).
\end{aligned}\right\}\tag{2.23}$$

至于波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon_{\max}\Lambda K)$ 或 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon_{\min}\Lambda K)$，可以通过解方程

$$T_q x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon_{\max}\Lambda K)=0\tag{2.24}$$

或

$$V_q x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon_{\min}\Lambda K)=0\tag{2.25}$$

求得。这样就可以容易地求出在第N个諧振子能級上有 n 个核子的按 SU_3 羣的不可約表示 $U^{(\lambda\mu)}$ 变换的波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K)$。

(c) 現在討論在諧振子第N能級上有 n 个核子的具有一定对称性的波函数，它可以写为[9]

$$\Psi((r)[f](\alpha)(\lambda\mu)\beta LM)=\frac{1}{c}\,O_{r1}^{[f]}\Psi(\alpha(\lambda\mu)\beta LM).\tag{2.25'}$$

这里 c 是归一化常数；$[f]$ 是 n 的一个配分；(r) 是相应于 $[f]$ 的楊氏图 S_r 的标号；算符 $O_{r1}^{[f]}$ 是 S_n 羣（n 个对象的对称羣）的对应于楊氏图 $S_r^{[f]}S_1^{[f]}$ 的母单位。n 个核子的反对称性波函数为[7]

$$\begin{aligned}
&\Psi([f](\alpha)(\lambda\mu)\beta LMSM_STM_T)=\\
&\qquad=\sqrt{\frac{1}{g^{[f]}}}\sum_{(r)}\Psi((r)[f](\alpha)(\lambda\mu)\beta LM)\omega((\tilde{r})[\tilde{f}]SM_STM_T).
\end{aligned}\tag{2.26}$$

在(2.26)中，$g^{[f]}$ 是相应于配分 $[f]$ 的楊氏图的总数；$\omega((\tilde{r})[\tilde{f}]SM_STM_T)$ 是自旋同位旋部分的波函数；对于 $\omega((\tilde{r})[\tilde{f}]SM_STM_T)$，Jahn 已經作了詳細的討論[5]。

在这里应該指出，波函数(2.25)对于量子数 $(\lambda\mu)\beta LM$ 是正交的，这是因为波函数(2.25)按照 SU_3 的不可約表示 $U^{(\lambda\mu)}$ 变换。我們知道，按照羣的两个不可約表示变换的

波函数組是正交的；并且按照羣的一个不可約 U 表示变换的波函数組是正交归一的[6]．这就說明了波函数（2.25）对量子数（$\lambda\mu$）βLM 是正交的．但是应当注意的是波函数（2.25）对"量子数"（α）是不正交的，故我們把它写在括号內．

当应用波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K)$ 时，則具有一定对称性的波函数可以写为

$$x((r)[f](\alpha)(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K) = \frac{1}{c}\, O_{n}^{[f]} x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K). \tag{2.27}$$

这里 c 也是归一化常数．

三、SU_3 波函数的母分数系数（$f.p.c.$）

（1）在实际計算中，通常首先求出在諧振子第 N 能級上的 n 个核子的按 SU_3 羣的不可約表示 $U^{(\lambda\mu)}$ 变换的波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K)$．

設已知在第 N 能級上有（$n-1$）个核子的按 SU_3 羣的不可約表示 $U^{(\lambda'\mu')}$ 变换的波函数为

$$x(\alpha'(\lambda'\mu')\varepsilon'\Lambda'K'),$$

則 n 个核子的波函数

$$x(\alpha'(\lambda'\mu')\varepsilon'\Lambda'K')x((N0)\varepsilon_n\Lambda_nK_n). \tag{3.1}$$

按 SU_3 羣的表示 $U^{(\lambda'\mu')}XU^{(N0)}$ 变换，它包含那些不可約表示 $U^{(\lambda\mu)}$ 可以用 U 羣的表示論求出[2,3]．設它包含有不可約表示 $U^{(\lambda\mu)}$，則有

$$x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K) = \sum_{\varepsilon'\Lambda'\Lambda_n} C(\alpha\varepsilon\Lambda)_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n}\, x(\alpha'(\lambda'\mu')\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n\Lambda K), \tag{3.2}$$

其中

$$\begin{aligned} x(\alpha'(\lambda'\mu')\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n\Lambda K) &= \\ &= \sum_{K'K_n}\left\langle \Lambda'\frac{K'}{2}\,\Lambda_n\frac{K_n}{2}\middle|\Lambda\frac{K}{2}\right\rangle x(\alpha'(\lambda'\mu')\varepsilon'\Lambda'K')x((N0)\varepsilon_n\Lambda_nK_n) \end{aligned} \tag{3.2'}$$

系数 $C(\alpha\varepsilon\Lambda)_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n}$ 显然满足

$$C(\alpha\varepsilon\Lambda)_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n} = 0, \qquad \text{当 } \varepsilon \neq \varepsilon' + \varepsilon_n \text{ 时}.$$

应用条件(2.24)，(2.25)，可得 $C(\alpha\varepsilon_{\max}\Lambda)_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n}C(\alpha\varepsilon_{\min}\Lambda)_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n}$ 所满足的方程

$$\sum_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n} \langle \tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\Lambda}'\tilde{\Lambda}_n\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}' + \mathbf{T}_n\|\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n\Lambda\rangle C(\alpha\varepsilon_{\max}\Lambda)_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n} = 0, \tag{3.3}$$

$$\sum_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n} C(\alpha\varepsilon_{\min}\Lambda)_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n}\langle \varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n\Lambda\|\mathbf{T}' + \mathbf{T}_n\|\tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\Lambda}'\tilde{\Lambda}_n\tilde{\Lambda}\rangle = 0, \tag{3.4}$$

式中

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\Lambda}'\tilde{\Lambda}_n\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}' + T_n\|\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n\Lambda\rangle = \\ &\quad = \langle \tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\Lambda}'\tilde{\Lambda}_n\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}'\|\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n\Lambda\rangle + \langle \tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\Lambda}'\tilde{\Lambda}_n\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}_n\|\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n\Lambda\rangle. \end{aligned}$$

这里 $\langle \tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\Lambda}'\tilde{\Lambda}_n\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}'\|\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n\Lambda\rangle$ 与 $\langle \tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\Lambda}'\tilde{\Lambda}_n\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}_n\|\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n\Lambda\rangle$ 是算符 $T'_q = \sum_{i=1}^{n-1} T_q(i)$，$T_{nq} = T_q(n)$ 在波函数(3.2')下的約化矩陣元．

应用 Racah 代数理論，可得[8]

$$
\left.
\begin{aligned}
&\langle \tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\Lambda}'\tilde{\Lambda}_n\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}'\|\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n\Lambda\rangle = \\
&\qquad = f(\tilde{\Lambda}'\Lambda_n\tilde{\Lambda}\Lambda'\Lambda_n\Lambda)\delta(\tilde{\varepsilon}_n\varepsilon_n)\delta(\tilde{\Lambda}_n\Lambda_n)\langle\tilde{\varepsilon}'\tilde{\Lambda}'\|T'\|\varepsilon'\Lambda'\rangle, \\
&\langle \tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\Lambda}'\tilde{\Lambda}_n\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}_n\|\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n\Lambda\rangle = \\
&\qquad = g(\Lambda'\tilde{\Lambda}_n\tilde{\Lambda}\Lambda'\Lambda_n\Lambda)\delta(\tilde{\varepsilon}'\varepsilon')\delta(\tilde{\Lambda}'\Lambda')\langle\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\Lambda}_n\|T_n\|\varepsilon_n\Lambda_n\rangle.
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.5}
$$

这里

$$
\left.
\begin{aligned}
f(\tilde{\Lambda}'\Lambda_n\tilde{\Lambda},\ \Lambda'\Lambda_n\Lambda) &= (-1)^{\tilde{\Lambda}'+\Lambda_n+\Lambda+1/2}[(2\tilde{\Lambda}+1)(2\Lambda+1)]^{1/2}\begin{Bmatrix} 1/2 & \Lambda' & \tilde{\Lambda}' \\ & \Lambda_n & \tilde{\Lambda}\ \Lambda \end{Bmatrix}, \\
g(\Lambda'\tilde{\Lambda}_n\tilde{\Lambda},\Lambda'\Lambda_n\Lambda) &= (-1)^{\Lambda'+\Lambda_n+\tilde{\Lambda}+1/2}[(2\tilde{\Lambda}+1)(2\Lambda+1)]^{1/2}\begin{Bmatrix} 1/2 & \Lambda_n & \tilde{\Lambda}_n \\ & \Lambda' & \tilde{\Lambda}\ \Lambda \end{Bmatrix}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.5'}
$$

在表 2 与表 3 中給出了一些常用到的 f, g 的数値.

表 2　系数 $f(\tilde{\Lambda}'\Lambda_n\tilde{\Lambda}\Lambda'\Lambda_n\Lambda)$

$\Lambda'\ \Lambda_n\ \Lambda$	$\tilde{\Lambda}'\ \tilde{\Lambda}_n\ \tilde{\Lambda}$	f
0 1/2 1/2	1/2 1/2 1	$\sqrt{3/2}$
	1/2 1/2 0	$-\sqrt{1/2}$
1/2 1/2 1	1 1/2 3/2	$\sqrt{4/3}$
	1 1/2 1/2	$-\sqrt{1/6}$
	0 1/2 1/2	$\sqrt{3/2}$
1 1/2 3/2	3/2 1/2 2	$\sqrt{5/4}$
	3/2 1/2 1	$-\sqrt{1/12}$
	1/2 1/2 1	$\sqrt{4/3}$
3/2 1/2 2	2 1/2 5/2	$\sqrt{6/5}$
	2 1/2 3/2	$-\sqrt{1/20}$
	1 1/2 3/2	$\sqrt{5/4}$
2 1/2 5/2	5/2 1/2 3	$\sqrt{7/6}$
	5/2 1/2 2	$-\sqrt{1/30}$
	3/2 1/2 2	$\sqrt{6/5}$
1/2 1/2 0	1 1/2 1/2	$\sqrt{1/2}$
	0 1/2 1/2	$\sqrt{1/2}$
1 1/2 1/2	3/2 1/2 1	$\sqrt{2/3}$
	1/2 1/2 1	$\sqrt{1/6}$
	1/2 1/2 0	$\sqrt{1/2}$
3/2 1/2 1	2 1/2 3/2	$\sqrt{3/4}$
	1 1/2 3/2	$\sqrt{1/12}$
	1 1/2 1/2	$\sqrt{2/3}$
2 1/2 3/2	5/2 1/2 2	$\sqrt{4/5}$
	3/2 1/2 2	$\sqrt{1/20}$
	3/2 1/2 1	$\sqrt{3/4}$
0 1 1	1/2 1 3/2	$\sqrt{4/2}$
	1/2 1 1/2	-1
1/2 1 3/2	1 1 2	$\sqrt{5/3}$
	1 1 1	$-\sqrt{1/3}$
	0 1 1	$\sqrt{2}$
1 1 2	3/2 1 5/2	$\sqrt{6/4}$
	3/2 1 3/2	$-\sqrt{1/6}$
	1/2 1 3/2	$\sqrt{5/3}$
3/2 1 5/2	2 1 3	$\sqrt{7/5}$
	2 1 2	$-\sqrt{1/10}$
	1 1 2	$\sqrt{3/2}$
2 1 3	5/2 1 7/2	$\sqrt{8/6}$
	5/2 1 5/2	$-\sqrt{1/15}$
	3/2 1 5/2	$\sqrt{7/5}$
1/2 1 1/2	1 1 1	$\sqrt{2/3}$
	1 1 0	$-\sqrt{1/3}$
	0 1 1	1
1 1 1	3/2 1 3/2	$\sqrt{5/6}$
	3/2 1 1/2	$-\sqrt{1/6}$
	1/2 1 3/2	$\sqrt{1/3}$
	1/2 1 1/2	$\sqrt{2/3}$
3/2 1 3/2	2 1 2	$\sqrt{9/10}$
	2 1 1	$-\sqrt{1/10}$
	1 1 2	$\sqrt{1/6}$
	1 1 1	$\sqrt{5/6}$
2 1 2	5/2 1 5/2	$\sqrt{14/15}$
	5/2 1 3/2	$-\sqrt{1/15}$
	3/2 1 5/2	$\sqrt{1/10}$
	3/2 1 3/2	$\sqrt{9/10}$
1 1 0	3/2 1 1/2	$\sqrt{1/3}$
	1/2 1 1/2	$\sqrt{1/3}$
3/2 1 1/2	2 1 1	$\sqrt{1/2}$
	1 1 1	$\sqrt{1/6}$
	1 1 0	$\sqrt{1/3}$
2 1 1	5/2 1 3/2	$\sqrt{3/5}$
	3/2 1 3/2	$\sqrt{1/10}$
	3/2 1 1/2	$\sqrt{1/2}$

应用公式(3.3),(3.4),可以求出波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon_{\max}\Lambda K)$ 或 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon_{\min}\Lambda K)$. 規定当 $\lambda \geqslant \mu$ 时,求出波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon_{\max}\Lambda K)$,而当 $\lambda < \mu$ 时,求出波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon_{\min}\Lambda K)$. 为了方便,引入符号

$$
x(\alpha(\lambda\mu)K) = \begin{cases} x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon_{\max}\Lambda K) & \lambda \geqslant \mu, \\ x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon_{\min}\Lambda K) & \lambda < \mu. \end{cases}
$$

表 3 系数 $g(\Lambda'\tilde{\Lambda}_n\tilde{\Lambda}\Lambda'\Lambda_n\Lambda)$

	1/2 0 1/2		1 0 1		3/2 0 3/2		2 0 2		5/2 0 5/2
1/2 1/2 1	$\sqrt{3/2}$	1 1/2 3/2	$\sqrt{2}$	3/2 1/2 2	$\sqrt{5/2}$	2 1/2 5/2	$\sqrt{3}$	5/2 1/2 3	$\sqrt{7/2}$
1/2 1/2 0	$\sqrt{1/2}$	1 1/2 1/2	1	3/2 1/2 1	$\sqrt{3/2}$	2 1/2 3/2	$\sqrt{2}$	5/2 1/2 2	$\sqrt{5/2}$

	1/2 1/2 1		1 1/2 3/2		3/2 1/2 2		2 1/2 5/2		$\Lambda'\ \Lambda_n\ \Lambda$
1/2 1 3/2	$\sqrt{4/3}$	1 1 2	$\sqrt{5/3}$	3/2 1 5/2	$\sqrt{2}$	2 1 3	$\sqrt{7/3}$	$\Lambda'\ \tilde{\Lambda}_n\ \tilde{\Lambda}$	g
1/2 1 1/2	$\sqrt{1/6}$	1 1 1	$\sqrt{1/3}$	3/2 1 3/2	$\sqrt{1/2}$	2 1 2	$\sqrt{2/3}$		
1/2 0 1/2	$\sqrt{3/2}$	1 0 1	$\sqrt{2}$	3/2 0 3/2	$\sqrt{5/2}$	2 0 2	$\sqrt{3}$		

	1/2 1/2 0		1 1/2 1/2		3/2 1/2 1		2 1/2 3/2
1/2 1 1/2	$\sqrt{1/2}$	1 1 1	$\sqrt{2/3}$	3/2 1 3/2	$\sqrt{5/6}$	2 1 2	1
		1 1 0	$\sqrt{1/3}$	3/2 1 1/2	$\sqrt{2/3}$	2 1 1	1
1/2 0 1/2	$-\sqrt{1/2}$	1 0 1	-1	3/2 0 3/2	$-\sqrt{3/2}$	2 0 2	$-\sqrt{2}$

	1/2 1 3/2		1 1 2		3/2 1 5/2		2 1 3
1/2 1/2 1	$\sqrt{4/3}$	1 1/2 3/2	$\sqrt{5/3}$	3/2 1/2 2	$\sqrt{2}$	2 1/2 5/2	$\sqrt{7/3}$

	1/2 1 1/2		1 1 1		3/2 1 3/2		2 1 2
1/2 1/2 1	$-\sqrt{1/6}$	1 1/2 3/2	$-\sqrt{1/3}$	3/2 1/2 2	$-\sqrt{1/2}$	2 1/2 5/2	$-\sqrt{2/3}$
1/2 1/2 0	$\sqrt{1/2}$	1 1/2 1/2	$\sqrt{2/3}$	3/2 1/2 1	$\sqrt{5/6}$	2 1/2 3/2	1

	1 1 0		3/2 1 1/2		2 1 1
1 1/2 1/2	$-\sqrt{1/3}$	3/2 1/2 1	$-\sqrt{2/3}$	2 1/2 3/2	-1

当求出波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)K)$ 以后,就可以求出所有的按 SU_3 羣的不可約表示 $U^{(\lambda\mu)}$ 变换的波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K)$.

事实上,应用(2.23),可得

$$\left.\begin{aligned} C(\alpha\varepsilon-3\Lambda)_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n} &= \langle\varepsilon\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}\|\varepsilon-3\Lambda\rangle^{-1}\times\\ &\times\sum_{\tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\Lambda}'\tilde{\Lambda}_n} C(\alpha\varepsilon\tilde{\Lambda})_{\tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\Lambda}'\tilde{\Lambda}_n}\langle\tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\Lambda}'\tilde{\Lambda}_n\tilde{\Lambda}\|\mathbf{T}'+\mathbf{T}_n\|\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n\rangle,\\ C(\alpha\varepsilon+3\Lambda)_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n} &= \langle\varepsilon+3\Lambda\|\mathbf{T}\|\varepsilon\tilde{\Lambda}\rangle^{-1}\times\\ &\times\sum_{\tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\Lambda}'\tilde{\Lambda}_n}\langle\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n\Lambda\|\mathbf{T}'+\mathbf{T}_n\|\tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\Lambda}'\tilde{\Lambda}_n\tilde{\Lambda}\rangle C(\alpha\varepsilon\Lambda)_{\tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\Lambda}'\tilde{\Lambda}_n}. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

(2) 在实际应用中,所需要的波函数是

$$\Psi(\alpha(\lambda\mu)\beta LM).$$

按照 Elliott[2],定义

$$\Psi(\alpha(\lambda\mu)KLM)=\frac{2L+1}{C(\lambda\mu KL)}\int x_{\Omega}(\alpha(\lambda\mu)K)\mathscr{D}^{L}_{MK}(\Omega)d\Omega. \tag{3.7}$$

这里 $x_{\Omega}(\alpha(\lambda\mu)K)$ 是在坐标系 Ω 中的波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)K)$. 坐标系 Ω 可以用三个尤拉角 α,β,γ 来标示. $\mathscr{D}^{L}_{MK}(\Omega)$ 是通常的 D 函数[8], $d\Omega=\frac{1}{8\pi^2}\sin\beta d\alpha d\beta d\gamma$, 系数 $\frac{2L+1}{C(\lambda\mu KL)}$ 是归一化常数,可以証明它与 α 无关,我們約定取 $C(\lambda\mu KL)$ 为正实数. (3.7)可以改写

为

$$x(\alpha(\lambda\mu)K)=\sum_{L}C(\lambda\mu KL)\Psi(\alpha(\lambda\mu)KLK). \tag{3.7'}$$

由于 x 满足(2.22),故有[2]

$$x(\alpha(\lambda\mu)-K)=\sum(-1)^{\lambda+\mu-L}C(\lambda\mu KL)\Psi(\alpha(\lambda\mu)KL-K),$$

Elliott 証明了波函数 $\Psi(\alpha(\lambda\mu)KLM)$ 是完备的（但是它們是不正交的），故波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\widetilde{K})$ 可以表为

$$x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\widetilde{K})=\sum_{LK}D(\lambda\mu\varepsilon\Lambda\widetilde{K}KL)\Psi(\alpha(\lambda\mu)KL\widetilde{K}). \tag{3.8}$$

容易看出，

$$D(\lambda\mu\varepsilon_{\max}\Lambda\widetilde{K}KL)=C(\lambda\mu KL)\delta(\widetilde{K}K),\qquad \text{当 } \lambda\geqslant\mu \text{ 时},$$
$$D(\lambda\mu\varepsilon_{\min}\Lambda\widetilde{K}KL)=C(\lambda\mu KL)\delta(\widetilde{K}K),\qquad \text{当 } \lambda<\mu \text{ 时}.$$

由系数 $C(\lambda\mu KL)$ 的数值可以求出 $D(\lambda\mu\varepsilon\Lambda\widetilde{K}KL)$ 的数值，事实上由公式（2.16）有

$$L_{\pm1}=\mp\sqrt{2}(T_{\pm1/2}\pm V_{\pm1/2}),$$

即

$$T_{\pm1/2}=\mp\sqrt{\frac{1}{2}}L_{\pm1}\mp V_{\pm1/2},\quad V_{\pm1/2}=-\sqrt{\frac{1}{2}}L_{\mp1}\mp T_{\pm1/2}.$$

利用上式与公式(2.23),可以推出系数 $D(\lambda\mu\varepsilon\Lambda\widetilde{K}KL)$ 的一个循环关系.

可以通过直接計算得到 $\Psi((N0)lm)$，即可以通过直接計算得到 $x((N0)K=0)$ 的展开式(3.7')．应用 $\Psi((N0)lm)$ 的完备性，可得

$$x((N0)\varepsilon\Lambda m)=\sum_{l}a(\varepsilon\Lambda ml)\Psi((N0)lm). \tag{3.9}$$

例如 $N=2$ 时,有

$$\left.\begin{aligned}
&x((20)4\,0\,0)=\sqrt{\frac{1}{3}}\Psi((20)\,0\,0)+\sqrt{\frac{2}{3}}\Psi((20)20),\\
&x\left((20)1\,\frac{1}{2}\pm1\right)=\pm\Psi((20)2\pm1),\\
&x((20)-21\pm2)=\Psi((20)2\pm2),\\
&x((20)-2\,1\,0)=\sqrt{\frac{2}{3}}\Psi((20)\,0\,0)-\sqrt{\frac{1}{3}}\Psi((20)20).
\end{aligned}\right\} \tag{3.9'}$$

其中

$$\Psi((20)\,0\,0)=-\sqrt{\frac{1}{2}}\sum_{m_1m_2}\langle|m_1|m_2|00\rangle a^+_{m_1}a^+_{m_2}|0\rangle=R_{20}(r)Y_{00}(\theta\varphi)^{1)},$$

$$\Psi((20)2m)=\sqrt{\frac{1}{2}}\sum_{m_1m_2}\langle|m_1|m_2|2M\rangle a^+_{m_1}a^+_{m_2}|0\rangle=R_{22}(r)Y_{2m}(\theta\varphi).$$

若已知 $(n-1)$ 个核子的波函数 $\Psi(\alpha'(\lambda'\mu')K'L'M')$，就可以利用 $x(\alpha(\lambda\mu)K)$ 的

---

1) $R_{20}=(\sqrt{2}/\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{3})\{2(r^2/b^2)-3\}e^{-r^2/2b^2}$,
$R_{22}=(4/\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{15})(r^2/b^2)e^{-r^2/2b^2}$.

表达式得到 n 个核子的波函数 $\Psi(\alpha(\lambda\mu)KLM)$. 事实上,

$$x(\alpha(\lambda\mu)K) = \sum_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n M' m_n K' L' l_n L} C_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n} D(\lambda'\mu'\varepsilon'\Lambda' M' K' L') a(\varepsilon_n\Lambda_n m_n l_n) \times \times \left\langle \Lambda' \frac{M'}{2} \Lambda_n \frac{m_n}{2} \middle| \Lambda \frac{K}{2} \right\rangle \langle L'M'l_n m_n | LK \rangle \Psi(\alpha'(\lambda'\mu')K'L'l_n LK). \tag{3.10}$$

这里

$$C_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n} = C(\alpha\varepsilon_{\max}\Lambda)_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n} \qquad \lambda \geqslant \mu \text{ 时},$$
$$= C(\alpha\varepsilon_{\min}\Lambda)_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n} \qquad \lambda < \mu \text{ 时}.$$

与(3.7′)比較,得

$$\Psi(\alpha(\lambda\mu)KLK) = \sum_{K'L'l_n} \langle (\lambda'\mu')K'L'l_n L | (\lambda\mu)KL \rangle \Psi(\alpha'(\lambda'\mu')K'L'l_n LK), \tag{3.11}$$

其中

$$\langle (\lambda'\mu')K'L'l_n L | (\lambda\mu)KL \rangle = C(\lambda\mu KL)^{-1} \sum_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n M' m_n} C_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n} D(\lambda'\mu'\varepsilon'\Lambda' M' K' L') \times \times a(\varepsilon_n\Lambda_n m_n l_n) \left\langle \Lambda' \frac{M'}{2} \Lambda_n \frac{m_n}{2} \middle| \Lambda \frac{K}{2} \right\rangle \langle L'M'l_n m_n | LK \rangle. \tag{3.12}$$

这里 $C(\lambda\mu KL)$ 是归一化常数(取正实数).

(3) 按 SU_3 羣的不可約表示 $U^{(\lambda\mu)}$ 变换并且具有一定对称性的正交的波函数可表为

$$x((r)[f]\gamma(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda M) = \sum_{\alpha} C(\gamma)_\alpha x((r)[f](\alpha)(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda M). \tag{3.13}$$

这里 $C(\gamma)_\alpha$ 是一組合系数, $x((r)[f](\alpha)(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda M)$ 由式(2.27)决定. 由于 $x((r)[f]\gamma(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda M)$ 还是按 SU_3 羣的不可約表示 $U^{(\lambda\mu)}$ 变换,故有

$$x((r)[f]\gamma(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda M) = = \sum_{[f']\gamma'\lambda'\mu'} \langle [f']\gamma'(\lambda'\mu') | [f]\gamma(\lambda\mu) \rangle x((r')[f']\gamma'(\lambda'\mu'), (\lambda\mu)\varepsilon\Lambda M). \tag{3.14}$$

波函数 $x((r')[f']\gamma'(\lambda'\mu'), (\lambda\mu)\varepsilon\Lambda M)$ 中的 $(r')[f']\gamma'(\lambda'\mu')$ 相当于量子数 α. 系数 $\langle [f']\gamma'(\lambda'\mu') | [f]\gamma(\lambda\mu) \rangle$ 可以应用 $O_{n'}^{[f]}$ 的表达式[9]求出. 当 $[f']$ 中只包含着一个 SU_3 羣的不可約表示 $U^{(\lambda'\mu')}$, 并且在所有的 $(\lambda'\mu')$ 中只有一个满足 $(\lambda'\mu') \times (N0)$ 包含有 $(\lambda\mu)$ 时,则量子数 γ, γ' 的引入是不必要的,并且有 $\langle [f'](\lambda'\mu') | [f](\lambda\mu) \rangle = I$.

应用公式(3.7′),可得

$$x((r)[f]\gamma(\lambda\mu)K) = \sum_L C(\lambda\mu KL) \Psi((r)[f]\gamma(\lambda\mu)KLK),$$

即

$$\Psi((r)[f]\gamma(\lambda\mu)KLM) = = \sum_{[f']\gamma'(\lambda'\mu')K'L'l_n} \langle [f']\gamma'(\lambda'\mu') | [f]\gamma(\lambda\mu) \rangle \langle (\lambda'\mu')K'L'l_n L | (\lambda\mu)KL \rangle \times \times \Psi((r')[f']\gamma'(\lambda'\mu')K'L'l_n LM). \tag{3.15}$$

系数 $\langle [f']\gamma'(\lambda'\mu') | [f]\gamma(\lambda\mu) \rangle \langle (\lambda'\mu')K'L'l_n L | (\lambda\mu)KL \rangle$ 就是 SU_3 波函数 Ψ 的空間部分的母分数系数.

相应的自旋同位旋部分的波函数可以写为

$$\omega((\tilde{r})[\tilde{f}]SM_STM_T) =$$
$$= \sum_{[\tilde{f}']S'T'} \langle [\tilde{f}']S'T'\ 1/2\ 1/2\ ST \mid [\tilde{f}]ST\rangle \omega((\tilde{r}')[\tilde{f}']\tilde{S}\tilde{T}\ 1/2\ 1/2\ ST). \tag{3.16}$$

系数 $\langle [\tilde{f}']S'T'\ 1/2\ 1/2\ ST \mid [f]ST\rangle$ 是自旋同位旋部分的母分数系数，它的数值已由 Jahn 算出[5]。

应用(3.15)，(3.16)可以看出，在第 N 能級上有 n 个核子的反对称波函数可以写为

$$\Psi([f]\ \gamma\ (\lambda\mu)KLMSM_STM_T) =$$
$$= \sum_{[f']\gamma'(\lambda'\mu')K'S'L'T'l_n} \langle [f']\gamma'(\lambda'\mu')K'S'L'T'\ 1/2\ l_n\ 1/2\ SLT\ \Pi\ [f]\ \gamma\ (\lambda\mu)KSL\rangle \times$$
$$\times\ \Psi([f']\gamma'K'S'L'T'\ 1/2\ l_n\ 1/2\ LMSM_STM_T). \tag{3.17}$$

其中系数 $\langle\cdots \Pi \cdots\rangle$ 就是波函数 $\Psi([f]\ \gamma\ (\lambda\mu)KLMSM_STM_T)$ 的母分数系数，它等于

$$\langle [f']\gamma'(\lambda'\mu')K'S'L'T'\ 1/2\ l_n\ 1/2\ SLT\Pi[f]\ \gamma\ (\lambda\mu)KSLT\rangle =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{g^{[f]}}}\langle [f']\gamma'(\lambda'\mu') \mid [f]\ \gamma\ (\lambda\mu)\rangle \langle (\lambda'\mu')K'L'l_nL \mid (\lambda\mu)KL\rangle \times$$
$$\times \langle [\tilde{f}']S'T'\ 1/2\ 1/2\ ST \mid [\tilde{f}]ST\rangle. \tag{3.18}$$

四、在諧振子 $N=2$ 能級上有两个或三个核子时的 SU_3 波函数

(1) 首先計算在諧振子 $N = 2$ 能級上有两个或三个核子时的波函数 $x(\alpha(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K)$.

已知在 $N = 2$ 能級上的一个核子的波函数为(2.21)，根据 U 羣的表示論[3]有

$$U^{(20)} \times U^{(20)} = U^{(40)} + U^{(02)} + U^{(21)},$$

所以 $N = 2$ 能級上有两个核子的按 SU_3 羣的不可約表示变换的波函数为

$$\left.\begin{array}{l} x((40)\varepsilon\Lambda K), \\ x((02)\varepsilon\Lambda K), \\ x((21)\varepsilon\Lambda K). \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

利用上节方法可求出它們的表达式，結果如表 4 所示。

表 4　$N = 2$ 壳上有两个核子的波函数 $x((\lambda\mu)\ K)$

$x((\lambda\mu)\ K) = \sum_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n} C_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n}\ x((\lambda'\mu')\ \varepsilon'\ \varepsilon_n\ \Lambda'\ \Lambda_n\ \Lambda\ K).$
$x((40)\ 0) = x((20)\ 4\ 4\ 0\ 0\ 0\ 0).$
$x((02)\ 0) = x((20)\ -2\ -2\ 1\ 1\ 0\ 0).$
$x((21)\ K) = \sqrt{1/2}\{x((20)\ 4\ 1\ 0\ 1/2\ 1/2\ K) - x((20)\ 1\ 4\ 1/2\ 0\ 1/2\ K)\}.$

当 $N = 2$ 能級上有三个核子时，由于

$$\begin{array}{l} U^{(40)} \times U^{(20)} = U^{(60)} + U^{(41)} + U^{(22)}, \\ U^{(02)} \times U^{(20)} = U^{(22)} + U^{(11)} + U^{(00)}, \\ U^{(21)} \times U^{(20)} = U^{(41)} + U^{(22)} + U^{(30)} + U^{(03)} + U^{(11)}. \end{array} \tag{4.2}$$

在 $N = 2$ 能級上有三个核子时的按 SU_3 羣的不可約表示变换的波函数及其表达式列于表 5 中。

根据上节的討論，可以求出 $N = 2$ 能級上有 n 个 $(n = 1, 2, 3)$ 核子的具有一定对

表 5 $N=2$ 壳上有三个核子的波函数 $x((\lambda'\mu')(\lambda\mu)\ K)$

$x((40')\ (60)\ 0)=x((40)\ 8\ 4\ 0\ 0\ 0\ 0).$

$x((40')\ (41)\ K)=\sqrt{2/3}\,x((40)\ 8\ 1\ 0\ 1/2\ 1/2\ K)-\sqrt{1/3}\,x((40)\ 1\ 8\ 1/2\ 0\ 1/2\ K).$

$x((40')\ (22)\ K)=\sqrt{6/10}\,x((40)\ 8\ -2\ 0\ 1\ 1\ K)-\sqrt{3/10}\,x((40)\ 5\ 1\ 1/2\ 1/2\ 1\ K)+$
$+\sqrt{1/10}\,x((40)\ -2\ 8\ 1\ 0\ 1\ K).$

$x((02')\ (22)\ K)=x((02)\ 2\ 4\ 1\ 0\ 1\ K).$

$x((02')\ (11)\ K)=\sqrt{3/5}\,x((02)\ 2\ 1\ 1\ 1/2\ 1/2\ K)-\sqrt{2/5}\,x((02)\ -1\ 4\ 1/2\ 0\ 1/2\ K).$

$x((02')\ (00)\ 0)=\sqrt{3/6}\,x((02)\ 2\ -2\ 1\ 1\ 0\ 0)+\sqrt{2/6}\,x((02)\ -1\ 1\ 1/2\ 1/2\ 0\ 0)+$
$+\sqrt{1/6}\,x((02)\ -4\ 4\ 0\ 0\ 0\ 0).$

$x((21')\ (41)\ K)=x((21)\ 5\ 4\ 1/2\ 0\ 1/2\ K).$

$x((21')\ (22)\ K)=\sqrt{1/2}\,x((21)\ 5\ 1\ 1/2\ 1/2\ 1\ K)-\sqrt{1/2}\,x((21)\ 2\ 4\ 1\ 0\ 1\ K).$

$x((21')\ (30)\ 0)=\sqrt{2/3}\,x((21)\ 5\ 1\ 1/2\ 1/2\ 0\ 0)-\sqrt{1/3}\,x(21)\ 2\ 4\ 0\ 0\ 0\ 0).$

$x((21')\ (03)\ 0)=x((21)\ -4\ -2\ 1\ 1\ 0\ 0).$

$x((21')\ (11)\ K)=\sqrt{8/15}\,x((21)\ 5\ -2\ 1/2\ 1\ 1/2\ K)+\sqrt{3/15}\,x((21)\ 2\ 1\ 0\ 1/2\ 1/2\ K)-$
$-\sqrt{2/15}\,x((21)\ 2\ 1\ 1\ 1/2\ 1/2\ K)-\sqrt{2/15}\,x((21)\ -1\ 4\ 1/2\ 0\ 1/2\ K).$

称性的按 SU_3 羣的不可約表示变换的波函数.

$n=2$ 时有两个可能的配分[2],[11],相应的楊氏图为

$$[2]\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad [11]\quad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

由于配分[2]中只包含着 SU_3 羣的不可約表示 $U^{(40)}$ 与 $U^{(02)}$, 配分[11]中只包含着 SU_3 羣的不可約表示 $U^{(21)}$ [2],故有

$$\left.\begin{aligned} x([2](40)\varepsilon\Lambda K) &= x((40)\varepsilon\Lambda K), \\ x([2](02)\varepsilon\Lambda K) &= x((02)\varepsilon\Lambda K), \\ x([11](21)\varepsilon\Lambda K) &= x((21)\varepsilon\Lambda K). \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

$n=3$ 时,有三个配分[3],[21],[111],相应的楊氏图为

$$[3]\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$[21]\quad \underset{S_1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}} \qquad\qquad \underset{S_2}{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}}$$

$$[111]\quad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

应用上一节結果可得

$$x((r)[f]\,\gamma\,(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K) = $$
$$= \sum_{[f']\gamma'(\lambda'\mu')} \langle [f']\gamma'(\lambda'\mu')\,|\,[f]\,\gamma\,(\lambda\mu)\rangle x((r')[f']\gamma'(\lambda'\mu'),\ (\lambda\mu)\varepsilon\Lambda K)$$

求出的系数 $\langle [f']\gamma'(\lambda'\mu')\,|\,[f]\,\gamma\,(\lambda\mu)\rangle$ 在表 6 中給出.

表 6　系数 $\langle [f'](\lambda'\mu')\,|\,[f](\lambda\mu)\rangle$

$\langle [2](40)\,|\,[3](60)\rangle = 1$	
$\langle [2](40)\,|\,[3](22)\rangle = \sqrt{4/9}$	$\langle [2](02)\,|\,[3](22)\rangle = \sqrt{5/9}$
$\langle [2](02)\,|\,[3](00)\rangle = 1$	
$\langle [2](40)\,|\,[21](41)\rangle = 1$	
$\langle [11](21)\,|\,[21](41)\rangle = 1$	
$\langle [2](40)\,|\,[21](22)\rangle = \sqrt{5/9}$	$\langle [2](02)\,|\,[21](22)\rangle = -\sqrt{4/9}$
$\langle [11](21)\,|\,[21](22)\rangle = 1$	
$\langle [2](02)\,|\,[21](11)\rangle = 1$	
$\langle [11](21)\,|\,[21](11)\rangle = 1$	
$\langle [11](21)\,|\,[111](30)\rangle = 1$	
$\langle [11](21)\,|\,[111](03)\rangle = 1$	

(2) 現在求系数 $\langle (\lambda'\mu')K'L'l_n\,|\,(\lambda\mu)KL\rangle$,此时 $l_n = 0, 2$. 根据公式(3.12),

$$\langle (\lambda'\mu')K'Ll_n\,|\,(\lambda\mu)KL\rangle = $$
$$= C(\lambda\mu KL)^{-1} \sum_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n M' m_n} C_{\varepsilon'\varepsilon_n\Lambda'\Lambda_n} D(\lambda'\mu'\varepsilon'\Lambda'M'K'L')a(\varepsilon_n\Lambda_n m_n l_n) \times$$
$$\times \left\langle \Lambda' \frac{M'}{2}\ \Lambda_n \frac{m_n}{2} \,\middle|\, \Lambda \frac{K}{2} \right\rangle \langle L'M'l_n m_n\,|\,LK\rangle.$$

当 $N = 2$ 时, $a(\varepsilon_n\Lambda_n m_n l_n)$ 已求出,它的数值在(3.9′)式中給出了.

首先求系数 $\langle (20)L'l_nL\,|\,(\lambda\mu)KL\rangle$, $(\lambda\mu) = (40),\ (02),\ (21)$. 由于 $D((20)\times\varepsilon'\Lambda'M'L') = a(\varepsilon'\Lambda'M'L')$, 故应用(3.12)系数 $\langle (20)L'l_nL\,|\,(\lambda\mu)KL\rangle$ 容易求出, 在求系数 $\langle (20)L'l_nL\,|\,(\lambda\mu)KL\rangle$ 的过程中也求出了 $C(\lambda\mu KL)$. 求出的結果列于表 7 中.

表 7　系数 $\langle (20)L'l_nL\,|\,(\lambda\mu)L\rangle$

$(\lambda\mu)$ L \ L' l_n	0　0	2　0	0　2	2　2	$C(\lambda\mu L)$
(40)　0	$\sqrt{5/9}$			$\sqrt{4/9}$	$\sqrt{1/5}$
2		$\sqrt{7/18}$	$\sqrt{7/18}$	$-\sqrt{2/9}$	$\sqrt{4/7}$
4				1	$\sqrt{8/35}$
(02)　0	$-\sqrt{4/9}$			$\sqrt{5/9}$	$\sqrt{1/3}$
2		$\sqrt{1/9}$	$\sqrt{1/9}$	$\sqrt{7/9}$	$\sqrt{2/3}$
(21)　1				1	$\sqrt{2/5}$
2		$-\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		$\sqrt{1/3}$
3				-1	$\sqrt{4/15}$

应用表 7 中的 $C(\lambda\mu KL)$ 数値,可求出 $D(\lambda\mu\varepsilon\Lambda KL)$ 的数値,再利用(3.12)就可以求出系数 $\langle (\lambda'\mu')K'L'l_n\,|\,(\lambda\mu)KL\rangle$. 把求出的 $D(\lambda\mu\varepsilon\Lambda KL)$ 系数列于表 8 中, 而把求出的系数 $\langle (\lambda'\mu')K'L'l_n\,|\,(\lambda\mu)KL\rangle$ 列于表 9 中.

表 8 系数 $D((\lambda\mu)\varepsilon\Lambda MKL)$

$(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda M$ \ L	0	2	4	$(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda M$ \ L	1	2	3
(4 0) 8 0 0	$\sqrt{1/5}$	$\sqrt{4/7}$	$\sqrt{8/35}$	(2 1) 2 0 0	$\sqrt{1/5}$		$\sqrt{4/5}$
2 1 0	$\sqrt{4/15}$	$\sqrt{1/21}$	$-\sqrt{24/35}$	2 1 0		-1	
−4 2 0	$\sqrt{8/15}$	$-\sqrt{8/21}$	$\sqrt{3/35}$	−4 1 0	$\sqrt{4/5}$		$-\sqrt{1/5}$
5 1/2 ±1		$\pm\sqrt{3/7}$	$\pm\sqrt{4/7}$	5 1/2 ±1	$\sqrt{2/5}$	$\pm\sqrt{1/3}$	$\sqrt{4/15}$
−1 3/2 ±1		$\pm\sqrt{4/7}$	$\mp\sqrt{3/7}$	−1 1/2 ±1	$\mp\sqrt{1/15}$	$-\sqrt{2/9}$	$\pm\sqrt{32/45}$
2 1 ±2		$\sqrt{1/7}$	$\sqrt{6/7}$	−1 3/2 ±1	$\sqrt{8/15}$	$\mp\sqrt{4/9}$	$-\sqrt{1/45}$
−4 2 ±2		$\sqrt{6/7}$	$-\sqrt{1/7}$	2 1 ±2		$\sqrt{1/3}$	$\pm\sqrt{2/3}$
−1 3/2 ±3			±1	−4 1 ±2		$\mp\sqrt{2/3}$	$\sqrt{1/3}$
−4 2 ±4			1	−1 3/2 ±3			1
(0 2) −4 0 0	$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{2/3}$					
2 1 0	$-\sqrt{2/3}$	$\sqrt{1/3}$					
−1 1/2 ±1		1					
2 1 ±2		1					

表 9 系数 $\langle(\lambda'\mu')L'l_nL\|(\lambda\mu)KL\rangle$

a $(\lambda'\mu')=(4\ 0)$

$(\lambda\mu)KL$ \ $L'l_n$	0 0	2 0	4 0	0 2	2 2	4 2	$C(\lambda\mu KL)$
(6 0) 0	$\sqrt{7/15}$				$\sqrt{8/15}$		$\sqrt{1/7}$
2		$\sqrt{2/5}$		$\sqrt{7/25}$	$-\sqrt{8/35}$	$\sqrt{16/175}$	$\sqrt{10/21}$
4			$\sqrt{11/45}$		$\sqrt{22/35}$	$-\sqrt{8/63}$	$\sqrt{24/77}$
6						1	$\sqrt{16/231}$
(4 1) 1					1		$\sqrt{9/35}$
2		$-\sqrt{1/6}$		$\sqrt{7/15}$	$-\sqrt{1/42}$	$-\sqrt{36/105}$	$\sqrt{2/7}$
3					$-\sqrt{9/14}$	$\sqrt{5/14}$	$\sqrt{4/15}$
4			$-\sqrt{5/9}$		$\sqrt{5/14}$	$\sqrt{11/126}$	$\sqrt{4/35}$
5						-1	$\sqrt{8/105}$
(2 2) 0 0	$\sqrt{8/15}$				$-\sqrt{7/15}$		$\sqrt{4/15}$
0 2		$\sqrt{13/30}$		$-\sqrt{7/975}$	$\sqrt{361/2730}$	$-\sqrt{972/2275}$	$\sqrt{13/21}$
0 4			$\sqrt{1/5}$		$\sqrt{1/70}$	$\sqrt{55/70}$	$\sqrt{4/35}$
2 2		$\sqrt{1/110}$		$\sqrt{63/275}$	$\sqrt{529/770}$	$\sqrt{144/1925}$	$\sqrt{11/21}$
2 3					$-\sqrt{5/14}$	$-\sqrt{9/14}$	$\sqrt{1/3}$
2 4			$\sqrt{1/5}$		$\sqrt{1/70}$	$\sqrt{55/70}$	$\sqrt{1/7}$

$b\ (\lambda'\mu') = (0\ 2)$

$(\lambda\mu)KL$ \ $L'l_n$	0 0	2 0	0 2	2 2	$C(\lambda\mu KL)$
(2 2) 0 0	$-\sqrt{5/6}$			$\sqrt{1/6}$	$\sqrt{4/15}$
0 2		$\sqrt{7/39}$	$-\sqrt{28/39}$	$-\sqrt{4/39}$	$\sqrt{13/21}$
0 4				1	$\sqrt{4/35}$
2 2		$\sqrt{7/11}$		$\sqrt{4/11}$	$\sqrt{11/21}$
2 3				1	$\sqrt{1/3}$
2 4				1	$\sqrt{1/7}$
(1 1) 1				-1	$\sqrt{1/2}$
2		$\sqrt{4/15}$	$\sqrt{4/15}$	$-\sqrt{7/15}$	$\sqrt{1/2}$
(0 0) 0	$\sqrt{1/6}$			$\sqrt{5/6}$	1

$c\ (\lambda'\mu') = (2\ 1)$

$(\lambda\mu)KL$ \ $L'l_n$	1 0	2 0	3 0	1 2	2 2	3 2	$C(\lambda\mu KL)$
(4 1) 1	$\sqrt{14/27}$			$\sqrt{14/135}$	$-\sqrt{7/27}$	$\sqrt{16/135}$	$\sqrt{9/35}$
2		$\sqrt{7/18}$		$\sqrt{7/15}$	$-\sqrt{1/18}$	$-\sqrt{4/45}$	$\sqrt{2/7}$
3			$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{6/15}$	$\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{1/10}$	$\sqrt{4/15}$
4					$\sqrt{5/6}$	$\sqrt{1/6}$	$\sqrt{4/35}$
5						1	$\sqrt{8/105}$
(3 0) 1	$\sqrt{1/27}$		–	$-\sqrt{64/135}$	$\sqrt{2/27}$	$\sqrt{56/135}$	$\sqrt{3/5}$
3			$\sqrt{2/9}$	$-\sqrt{1/15}$	$-\sqrt{4/9}$	$-\sqrt{12/45}$	$\sqrt{2/5}$
(0 3) 1	$-\sqrt{8/27}$			$-\sqrt{8/135}$	$-\sqrt{16/27}$	$\sqrt{7/135}$	$\sqrt{3/5}$
3			$\sqrt{1/9}$	$\sqrt{2/15}$	$-\sqrt{2/9}$	$\sqrt{8/15}$	$\sqrt{2/5}$
(2 2) 0 0					1		$\sqrt{4/15}$
0 2		$\sqrt{7/26}$		$-\sqrt{21/65}$	$-\sqrt{9/26}$	$\sqrt{4/65}$	$\sqrt{13/21}$
0 4					$\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{5/6}$	$\sqrt{4/35}$
2 2		$-\sqrt{7/66}$		$\sqrt{21/165}$	$-\sqrt{25/66}$	$\sqrt{64/165}$	$\sqrt{11/21}$
2 3			$-\sqrt{1/3}$	$\sqrt{2/5}$	$-\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{1/10}$	$\sqrt{1/3}$
2 4					$\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{5/6}$	$\sqrt{1/7}$
(1 1) 1	$\sqrt{4/27}$			$-\sqrt{49/135}$	$-\sqrt{2/27}$	$-\sqrt{56/135}$	$\sqrt{1/2}$
2		$\sqrt{8/45}$		$\sqrt{1/75}$	$\sqrt{14/45}$	$\sqrt{112/225}$	$\sqrt{1/2}$

利用以上几个表，我們就可容易地得到 $N=2$ 能級上有两个或三个核子的波函数 $\Psi([f]\,\gamma\,(\lambda\mu)KLMSM_STM_T)$ 了。

結 束 語

本文討論了 SU_3 波函数的性質，应用这些性質可以容易地求出在諧振子第 N 能級上有 n 个粒子的 SU_3 波函数。至于在原子核中 SU_3 波函数是否可以作为一个很好的近似，还有待于进一步討論，我們准备在以后的工作中討論这一問題。

最后作者感謝楊立銘教授对本工作的指导与关怀。本文的一部分工作与李瑞年同志进行了討論，作者也表示感謝。

参 考 文 献

[1] Bohr, A. 等，关于原子核結构的一些最新发展与实驗方法，物理学报专刊(1963).
[2] Elliott, *Pro. Roy. Soy.*, **A 245** (1958), 129; **A 245** (1958), 562.
[3] Wyel, H., The Theory of Groups and Quantum Mechanics, Dover Pulilication INC.
[4] Rutherfeld, D. E., Substitutional Analysis, Edinburgh University Press.
[5] Jahn, H. A. and Weringen Van H., *Pro. Roy. Soy.*, **A 209** (1951), 502.
[6] Wigner, E. P., Group Theory, Academic Press (1959).
[7] Jahn, H. A., *Pro. Roy. Soy.*, **A 205** (1951), 192.
[8] Edmonds, A. R., Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton University Press (1957).
[9] 孙洪洲，北京大学学报，自然科学部分 (1962), 133.

STUDY OF THE SU_3 WAVE FUNCTIONS

SUN HUNG-CHOU
(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

In this paper, the properties of the SU_3 wave functions, introduced by Elliott in 1958, are discussed in some detail. By means of the commutation relations of the infinitesimal operators of SU_3 group, the internal wave functions $x(\alpha(\lambda\mu)K)$ can be calculated in a comparatively simple manner. With the use of the internal wave functions $x(\alpha(\lambda\mu)K)$, a formula of the fractional parentage coefficients for the SU_3 wave functions $\Psi(\alpha(\lambda\mu)KLM)$ is obtained. As examples the SU_3 wave functions of 2 or 3 nucleons in *sd* shell are calculated.