

研究简报

多端网络理论在电模型边值给定问题中的应用*

柳焯

一、引言

用网格式电模型来模拟物理场时,边值给定是一个关键问题。各类边界条件一般通过多端分压器来给定。从提高造型准确度着眼,力求多端分压器的电阻值小,但此值过小将导致制作及运用时的浪费。本文应用多端网络理论求出边界电压及其结构误差与分压器电阻及模型网络参数间的联系,同时提出,可以将电压值相近的边界端点合并,并端后计算工作量可大为节省,但通过计算仍能掌握电压结构误差的分布规律和最大结构误差的约值。这对设计和运用多端分压器都是有实用意义的。

二、边界点电压及其结构误差

图1左端为多端分压器,右端为电模型。若以第 n 端为基准,则左端为自发 $p+1$ 端网络,右端为非自发 $p+1$ 端网络。

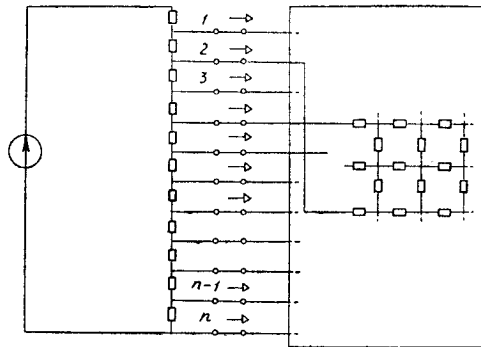


图1 多端分压器与电模型连接

图1中,电流的正方向是背离分压器的端点的,而在确定多端网络参数矩阵时,一般规定电流正方向指向网络各端点,注意到这一点,可以有

$$\mathbf{U} = (\mathbf{Y}^{(1)} + \mathbf{Y}^{(2)})^{-1} (-\mathbf{j}^{(1)}) = \mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{j}^{(1)}, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{Y}^{(1)}$ 为多端分压器的导纳矩阵:

* 1962年6月1日收到;1962年11月5日收到第一次修改稿;1963年3月22日收到第二次修改稿。

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{b_1 + b_2}{b_1 b_2} g_D & -\frac{1}{b_2} g_D & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{b_2} g_D & \frac{b_2 + b_3}{b_2 b_3} g_D & -\frac{1}{b_3} g_D & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & -\frac{1}{b_3} g_D & \frac{b_3 + b_4}{b_3 b_4} g_D & -\frac{1}{b_4} g_D & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\frac{1}{b_{n-1}} g_D & \frac{b_{n-1} + b_n}{b_{n-1} b_n} g_D \end{bmatrix};$$

$\mathbf{j}^{(1)}$ 为多端分压器的源流矩阵:

$$\mathbf{j}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{E}{b_1} g_D \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$g_D = \frac{1}{r_D}$, r_D 乃分压器的电阻(包括电源内阻); b_1, b_2, \dots, b_n 为各段电阻与 r_D 之比值.

$\mathbf{Y}^{(2)}$ 为电模型 $p + 1$ 端网络导纳矩阵:

$$\mathbf{Y}^{(2)} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{1,n-1} \\ g_{21} & g_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n-1,1} & g_{n-1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{n-1,n-1} \end{bmatrix}.$$

式(1)可以写成如下形式:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{b_1 + b_2}{b_1 b_2} g_D + g_{11} & -\frac{1}{b_2} g_D + g_{12} & g_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{1,n-1} \\ -\frac{1}{b_2} g_D + g_{21} & \frac{b_2 + b_3}{b_2 b_3} g_D + g_{22} & -\frac{1}{b_3} g_D + g_{23} & g_{24} & \cdot & \cdot & g_{2,n-1} \\ g_{31} & -\frac{1}{b_3} g_D + g_{32} & \frac{b_3 + b_4}{b_3 b_4} g_D + g_{33} & -\frac{1}{b_4} g_D + g_{34} & g_{35} & \cdot & g_{3,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n-1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{b_{n-1}} g_D + g_{n-1,n-2} & \frac{b_{n-1} + b_n}{b_{n-1} b_n} g_D + g_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \frac{E}{b_1} g_D \\ A_{12} \frac{E}{b_1} g_D \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{1q} \frac{E}{b_1} g_D \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{1,n-1} \frac{E}{b_1} g_D \end{bmatrix}$$

式中 A_{1q} 为 $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{(1)} + \mathbf{Y}^{(2)}$ 的行列式中第一行第 q 列元素的代数余因子。

以 g_D^{-1} 除上式中分子和分母，将行列式及其余因子中各元素化为无因次项，即表达为比值 $\frac{g}{g_D} = a$ 的函数（此处 g 为网格中基本元件的导纳）：

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{b_1 + b_2}{b_1 b_2} + K_{11}a & -\frac{1}{b_2} + K_{12}a & K_{13}a & \cdot & \cdot & \cdot & K_{1,n-1}a \\ -\frac{1}{b_2} + K_{21}a & \frac{b_2 + b_3}{b_2 b_3} + K_{22}a & -\frac{1}{b_3} + K_{23}a & K_{24}a & \cdot & \cdot & K_{2,n-1}a \\ K_{31}a & -\frac{1}{b_3} + K_{32}a & \frac{b_3 + b_4}{b_3 b_4} + K_{33}a & -\frac{1}{b_4} + K_{34}a & K_{35}a & \cdot & K_{3,n-1}a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n-1,1}a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{b_{n-1}} + K_{n-1,n-2}a & \frac{b_{n-1} + b_n}{b_{n-1} b_n} + K_{n-1,n-1}a \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} A'_{11} \frac{E}{b_1} \\ A'_{12} \frac{E}{b_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A'_{1q} \frac{E}{b_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A'_{1,n-1} \frac{E}{b_1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{b_1 + b_2}{b_1 b_2} + K_{11}a \right) A'_{11} + \left(-\frac{1}{b_2} + K_{21}a \right) A'_{12} + \left(K_{13}a A'_{13} + K_{14}a A'_{14} + \dots + K_{1,n-1}a A'_{1,n-1} \right)} \begin{bmatrix} A'_{11} \frac{E}{b_1} \\ A'_{12} \frac{E}{b_1} \\ \vdots \\ A'_{1q} \frac{E}{b_1} \\ \vdots \\ A'_{1,n-1} \frac{E}{b_1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式(2)中 A'_{1q} 是分母行列式第一行第 q 列元素无因次代数余因子; $A'_{1q} = \frac{A_{1q}}{g_D^{n-2}}$ 也是 a 的函数:

$$A'_{1q} = C_{q0} + C_{q1}a + C_{q2}a^2 + \cdots + C_{q,n-2}a^{n-2}. \quad (3)$$

在网格式电模型中, 通常 $g/g_D = a \ll 1$, 同时 $\frac{b_1 + b_2}{b_1 b_2}$, $\frac{b_2 + b_3}{b_2 b_3}$, \cdots 及 $\frac{1}{b_2}$, $\frac{1}{b_3}$, \cdots 等一般大于 K_{11} , K_{21} , \cdots . 因此, 忽略式(3)中 a 的高次项, 可以有

$$A'_{1q} \approx C_{q0} + C_{q1}a. \quad (4)$$

由式(2),

$$\begin{aligned} U_q &= A'_{1q} \frac{E}{b_1} \left/ \left[\left(\frac{b_1 + b_2}{b_1 b_2} + K_{11}a \right) A'_{11} + \left(\frac{-1}{b_2} + K_{12}a \right) A'_{12} + K_{13}a A'_{13} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cdots + K_{1q}a A'_{1q} + \cdots + K_{1,n-1}a A'_{1,n-1} \right] \right. = \\ &= \frac{E}{b_1} \left/ K_{1q}a + \frac{1}{A'_{1q}} \left\{ \left(\frac{b_1 + b_2}{b_1 b_2} + K_{11}a \right) A'_{11} + \left(\frac{-1}{b_2} + K_{12}a \right) A'_{12} + [K_{13}A'_{13} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + K_{14}A'_{14} + \cdots + K_{1,q-1}A'_{1,q-1} + K_{1,q+1}A'_{1,q+1} + \cdots + K_{1,n-1}A'_{1,n-1}] a \right\} \right. \end{aligned}$$

上式可以简化. 简化过程中, 忽略含 a 的高次方项; 并注意到

$$\frac{1}{1 - Fa} \approx 1 + Fa \quad (\text{当 } a \ll 1),$$

F 为 a 前系数 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1$;

$$b_{q+1} + b_{q+2} + \cdots + b_n = x_q,$$

x_q 即分压比.

$$K_{11} = -(K_{21} + K_{31} + \cdots + K_{n1});$$

$$K_{ij} = K_{ji};$$

$$\begin{aligned} A'_{1q} \approx C_{q0} + C_{q1}a &= \frac{b_{q+1} + b_{q+2} + \cdots + b_n}{b_2 b_3 \cdots b_n} - \\ &- \frac{1}{b_2 b_3 \cdots b_n} \left\{ \sum_{i=j+1}^q \sum_{j=1}^{q-1} K_{ij}(x_j - x_i)x_q + \sum_{i=q+1}^{n-1} \sum_{j=1}^{q-1} K_{ij}(x_j - x_q)x_i + \right. \\ &+ \sum_{i=1}^q \sum_{j=q+1}^{n-1} K_{ij}(x_q - x_j)x_j + \sum_{i=q+1}^{j-1} \sum_{j=q+2}^{n-1} K_{ij}(x_i - x_j)x_j + \\ &\left. + \sum_{i=j+1}^n \sum_{j=q+1}^{n-1} K_{ij}(x_q - x_j)(x_j - x_i) \right\} a \end{aligned}$$

这样, 我们可以得到

$$\begin{aligned} U_q &= x_q E \left\{ 1 - \left[\sum_{i=j+1}^q \sum_{j=1}^{q-1} K_{ij}(x_j - x_i)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=q+1}^n \sum_{j=1}^{q-1} K_{ij} \left((x_j - x_i)^2 - \frac{(x_j - x_i)(x_q - x_i)}{x_q} \right) \right] - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=j+1}^n \sum_{j=q}^{n-1} K_{ij}(x_j - x_i)^2 \frac{1-x_q}{x_q} a \Big\} = \\
 & = x_q E \{1 - [\alpha_q + \beta_q + \gamma_q] a\} = x_q E \{1 - G_q a\}. \tag{5}
 \end{aligned}$$

边界上任一端点 q 与基准之间的电压可由式 (5) 计算之。 $x_q E$ 乃多端分压器 q 点与基准间的开路电压， $-x_q E G_q a$ 乃边界电压结构误差。从式 (5) 可以看到电压结构误差与分压器电阻及电模型网络参数间的联系。

式 (5) 中， G_q 的三项 α_q, β_q 及 γ_q 都与 $K_{ij}(x_j - x_i)^2$ 有关。若将所有 $K_{ij}(x_j - x_i)^2$ 各项填入表 1，则不难看出， $\alpha_q = \sum_{i=j+1}^q \sum_{j=1}^{q-1} K_{ij}(x_j - x_i)^2$ 乃表 1 中从第 2 行到第 q 行各项的总和。 $\gamma_q = - \sum_{i=j+1}^n \sum_{j=q}^{n-1} K_{ij}(x_j - x_i)^2 \frac{1-x_q}{x_q}$ 乃表 1 中从第 $n-1$ 列到第 q 列各项的总和乘以 $-\frac{1-x_q}{x_q}$ 。因此用式 (5) 进行计算时，利用表 1 所示的表格是方便的。

表 1

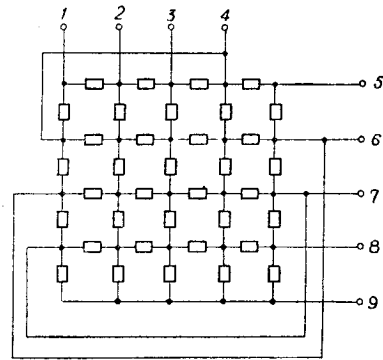
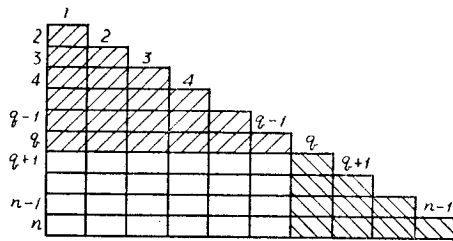


图 2 九端网络

以下列出对于图 2 九端网络所进行的计算结果和试验结果 (表 2)。

网络内部基本元件的电阻为 5 千欧，边界电阻为 10 千欧。 $r_D = 960$ 欧， $a = 0.1921$ 。

实验中用 ППТБ 1 型补偿器测量电压。 r_D 取得颇大，目的在于扩大电压偏差，以便测量。在 r_D 颇大 (即 a 值颇大) 时，计算结果尚且接近实测结果，则在更小的 a 值下，用式 (5) 计算的准确程度将会更高。

表 2

	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8
计算结果	0.89115	0.6687	0.5053	0.40802	0.34381	0.23097	0.13069	0.064773
测量结果	0.89120	0.6689	0.5059	0.40856	0.34378	0.2324	0.13099	0.06464

三、电模型多端网络的并端

电模型边界点往往有几十甚至上百。为了节省计算量，建议将电压值相近的端点合并，然后用式 (5) 计算。误差虽大一些，但从造型时选用多端分压器的需要来看，已能满足要求。

以下给出对图 3 所示十九端网络实行并端后的计算结果, 并与未并端时测量的结果相比较。

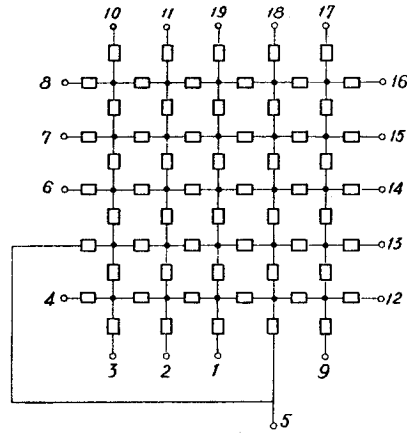


图 3 十九端网络

将电模型端点 2, 4 并入 3; 5, 7 并入 6; 8, 10 并入 9; 11, 13 并入 12; 14, 16 并入 15; 17 并入 18。对并端后的八端网络借助式(5)进行结构误差计算, 结果如下:

表 3

端 点 号	1	3	6	9	12	15	18	19
结 构 误 差	-0.726%	-1.016%	-1.69%	-1.734%	0.548%	2.42%	5.795%	0

未并端时边界电压结构误差(根据实测数据计算而得)如下:

表 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9
-0.682%	-0.814%	-0.92%	-1.06%	-1.31%	-1.49%	-1.46%	-1.4%	-1.35%
10	11	12	13	14	15	16	17	18
-0.901%	0.49%	0.785%	1.79%	2.31%	2.85%	3.3%	4.17%	3.67%
								19
								0

从未并端和已并端两种情况看来, 电压结构误差的范围及其变化规律大体是类似的。所以根据并端后的电模型网络进行不太繁复的计算就可以大致掌握电压结构误差的范围及其分布规律, 据此就可以选择多端分压器的电阻 r_D 了。这比将电模型网络一般地当作二端网络来处理^[1]要合理一些。

参 考 文 献

[1] Чутенмахер, Л. И., Электрические модели, Изд. АН СССР, 1949.