第19卷 第5期 物理学报 Vol. 19, No. 5
1963年5月 ACTA PHYSICA SINICA May, 1963

科学技术简报和经验交流

两无限长共軸椭錐体間的特性阻抗*

林为干

計我們先研究一下球錐面坐标. 試取如下的以原点为公共頂点的錐面系:

$$\frac{x^2}{u}+\frac{y^2}{u-b^2}+\frac{z^2}{u-c^2}=0, \tag{1}$$

$$0<b^2<c^2.$$

已經証明[1], 如(1)所代表的两个不同曲面在原点以外有一个公共点的話, 则在此公共点这两个曲面互成正交, 又如 x, y, z 的值已定, 则(1)有两个异根 ν^2 及 μ^2, $0\leqslant \nu^2\leqslant b^2$ 及 $b^2\leqslant\mu^2\leqslant c^2$. 如在(1)中分别以 ν^2 及 μ^2 代 u, 再取 $r^2=x^2+y^2+z^2$, 则我們有三个方程, 故可解出

$$\left.\begin{aligned} x^2&=r^2\nu^2\mu^2/b^2c^2,\ 0\leqslant\nu^2\leqslant b^2,\ b^2\leqslant\mu^2\leqslant c^2,\\ y^2&=\frac{r^2(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{b^2(c^2-b^2)},\\ z^2&=\frac{r^2(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{c^2(c^2-b^2)}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

为了要得到坐标(x, y, z)及坐标(r, μ, ν)間的一一对应关系, 我再引进两个新变数 θ 及 φ, 定义如下:

$$\nu=b\cos\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

$$\sqrt{c^2-\mu^2}=\sqrt{c^2-b^2}\cos\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \tag{3}$$

更取

$$k=b/c,$$

卽得到如下的球錐面坐标(r, θ, φ):

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\theta(1-k'^2\cos^2\varphi)^{1/2},\\ y&=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z&=r\cos\varphi(1-k^2\cos^2\theta)^{1/2},\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中

$$k'=(1-k^2)^{1/2},$$

由(4)可見, 对于 $\theta=\theta_1\geqslant 0$, 则在 $y=0$ 平面上, 我們可得 $\sin\varphi=0$, 故

$$\left.\begin{aligned} x_1&=kr_1\cos\theta_1\\ z_1&=r_1(1-k^2\cos^2\theta_1)^{1/2},\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

而在 $z=0$ 平面上, 对于同一个 $\theta=\theta_1\geqslant 0$,

* 1962年1月15日收到.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r_1'\cos\theta_1 \\ y_1 &= r_1'\sin\theta_1 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

故得

$$\tan\theta_1 = y_1/x_1. \tag{7}$$

比較(5)及(6)式的 x_1 的值，卽得到

$$r_1' = kr_1.$$

故可見因为$(1 - k^2\cos^2\theta_1)^{1/2} \geqslant \sin\theta_1 = \sqrt{1-\cos^2\theta_1}$,

$$z_1 \geqslant y_1,$$

亦卽在 $x = x_1$ 平面上，我們所研究的錐体 $\theta = \theta_1$ 的截面为一椭圓，其長軸及短軸分别位于 $y = 0$ 及 $z = 0$ 平面上，而短軸及两焦点在原点所张的角分别为 θ_1,(7) 及ε_1，其中

$$\mathrm{tg}\varepsilon_1 = \sqrt{z_1^2 - y_1^2}/x_1 = \frac{k'}{k}\sec\theta_1. \tag{8}$$

由(8)，可得

$$\cos\theta_1\mathrm{tg}\varepsilon_1 = k'/k. \tag{9}$$

但由于在(4)中我們已把 k 及 k' 取作常数，故在球錐面坐标(4)中，此椭錐面族是在(9)式的意义下“共焦”的，卽是說，如下的关系成立：

$$\cos\theta\mathrm{tg}\varepsilon = \sqrt{1/k^2 - 1} = \mathrm{const} \tag{10}$$

曲面 $\theta = \mathrm{const}$ 是一半无限长錐体，在 $x = x_0$ 面上的截面則由(5)至(10)給出．曲面 $\varphi = \mathrm{const}$ 則是一半无限长半錐体，在 $z = z_0$ 面上的截面为一半椭圓，坐标 φ 具有与坐标 θ 同样的几何意义．如上面已經指出的，$\theta = \mathrm{const}$ 及 $\varphi = \mathrm{const}$ 两曲面是相互成正交的，因而，如果 $\theta = \mathrm{const}$ 曲面是一等位面，則 $r = \mathrm{const}$ 及 $\varphi = \mathrm{const}$ 的交曲綫可看作力綫．

在此球錐面坐标中标量波动方程可給出如下：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r^2}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \alpha_0^2 u \\ &+\frac{1}{k^2\sin^2\theta + k'^2\sin^2\varphi}\left[\sqrt{1-k^2\cos^2\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sqrt{1-k^2\cos^2\theta}\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \right. \\ &\left. + \sqrt{1-k'^2\cos^2\varphi}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sqrt{1-k'^2\cos^2\varphi}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right] = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\alpha_0^2 = \mu\varepsilon\omega^2 = (2\pi/\lambda)^2$，$\lambda$ 是工作波长．

現在我們来解两个椭圓截面的錐体的传輸綫問題，此两錐体的截面椭圓是在(10)条件的意义下“共焦”的．图(1)表示此传輸綫．

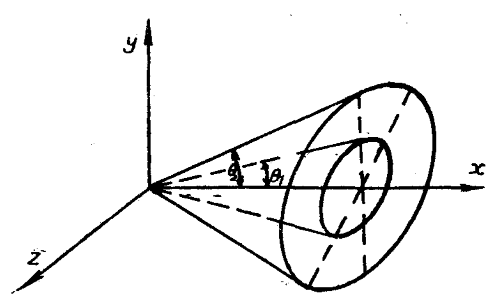

图 1

我們現在将(11)分解为两个方程，卽令头两項的和及第三項分别等于零，从而得到

$$\frac{\partial}{\partial r^2}(ru) + \alpha_0^2(ru) = 0, \tag{12}$$

及其解

$$u = \frac{e^{\pm i\alpha_0 r}}{r}u(\theta,\varphi), \tag{13}$$

$$i=\sqrt{-1},$$

及得到

$$\sqrt{1-k^2\cos^2\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sqrt{1-k^2\cos^2\theta}\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right]+\sqrt{1-k'^2\cos^2\varphi}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\sqrt{1-k'^2\cos^2\varphi}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right]=0. \tag{14}$$

对于(14),我們采取如下的变換:

$$\alpha=\int_0^\theta\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\cos^2x}}=-F\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1 k\right)=F(\theta,k)-K(k), \tag{15}$$

$$\beta=\int_0^\varphi\frac{dx}{\sqrt{1-k'^2\cos^2x}}=-F\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,k'\right)=F(\varphi,k')-K(k'), \tag{16}$$

$$k^2+k'^2=1,$$

其中 $F(\theta,k)$ 是雅各俾椭圓函数. (14)卽变为

$$\frac{\partial^2u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\beta^2}=0, \tag{17}$$

(17)是直角坐标(α,β,γ)中的二維拉普拉斯方程,因而可見当我們在两个同軸的、“共焦”的椭圓錐体的两頂点間加入一交变源(体积为无限小的交变电源),則所发出的球面波正相当于两平板传輸綫間的平面波,在此平板綫上坐标系为

$$\alpha=F(\theta,k)-K(k),\ \beta=F(\varphi,k')-K(k'),\ \gamma=r, \tag{18}$$

今試取两个共軸的椭錐体 $\theta=\theta_1$ 及 $\theta=\theta_2$, 則其等效平板传輸綫的两板的寬度为

$$\beta_2-\beta_1=F(2\pi,k')-F(0,k')=4K(k'), \tag{19}$$

而两板間的距离为

$$\alpha_2-\alpha_1=F(\theta_2,k)-F(\theta_1,k), \tag{20}$$

故其特性阻抗为

$$Z_0=\eta\,\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\beta_2-\beta_1}=\eta\,\frac{F(\theta_2,k)-F(\theta_1,k)}{4K(k')}, \tag{21}$$

其中K是第一类全椭圓积分,而 $\eta=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$ 是两錐体間所用媒質的特性阻抗,对于自由空間其值为 $\eta=120\pi$ 欧.

如此二共軸,共頂椭錐体在任一平面 $x=x_0$ 上的截面椭圓分别具有半长軸及半短軸 a_1, b_1 及 a_2, b_2, 則由(7),可得

$$\theta_2=\operatorname{arctg}(b_2/x_0),\ \theta_1=\operatorname{arctg}(b_1/x_0), \tag{22}$$

而由(8)可得

$$\operatorname{tg}\varepsilon_2=\sqrt{a_2^2-b_2^2}/x_0,\ \operatorname{tg}\varepsilon_1=\sqrt{a_1^2-b_1^2}/x_0, \tag{23}$$

又如下面的关系成立:

$$\cos\theta_1\operatorname{tg}\varepsilon_1=\cos\theta_2\operatorname{tg}\varepsilon_2=k'/k, \tag{24}$$

或

$$k=(1+\operatorname{tg}^2\varepsilon_1\cos^2\theta_1)^{-1/2}=(1+\operatorname{tg}^2\varepsilon_2\cos^2\theta_2)^{-1/2}, \tag{25}$$

則由此两椭錐体所构成的传輸綫的特性阻抗卽由(21)式給出.

試举几个例子．对于两个共軸，等椭錐体，由(21)，令 $\theta_2 = \pi - \theta_0$，$\theta_1 = \theta_0$，即得到

$$Z_0 = \frac{K(k) - F(\theta_0, k)}{2K(k')}, \tag{26}$$

而对于垂直于导体平面的椭錐体，則此椭錐体与此平面間的特性阻抗恰为(26)的値之半，这亦可直接在(21)中代入 $\theta_2 = \pi/2$，$\theta_1 = 0$ 得到．对于两个共軸共面等角三角形导片，而其半角为 ψ，則由(16)，$b_1 = b_2 = 0$，故可取 $\theta_2 = \pi$，$\theta_1 = 0$，而由(17)及(18)可得

$$k = \cos\varepsilon_1 = \cos\varepsilon_2 = \cos\psi, \tag{27}$$

故由(21)即得到

$$Z_0 = \eta \frac{K(\cos\psi)}{2K(\sin\psi)}. \tag{28}$$

(28)式与早些得到的結果[2]是相符合的，如果我們应用了如下的变換[3]：

$$K\left(\frac{1 - \sin\psi}{1 + \sin\psi}\right) = \frac{1 + \sin\psi}{2} K(\cos\psi),$$

$$K\left(\frac{2\sqrt{\sin\psi}}{1 + \sin\psi}\right) = (1 + \sin\psi)K(\sin\psi).$$

参　考　文　献

[1] Kraus, L. and Levine, L. M., Diffraction by an Elliptic Cone, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 49—68.

[2] Carrel, R. L., The Characteristic Impedance of two Infinite Cones of Arbitrary Cross Section, *Trans. IRE.*, Vol. AP-6, 1958, pp. 197—201.

[3] Oberhettinger F. und Magnus, W., Anwendung der Elliptischen Funktionen in Physik und Technik, 1949.