散射矩陣的角分布不变变换羣*

侯 伯 宇

如所周知[1—6]，可能有若干个不同的散射矩陣具有相同的角分布.

最近，黃念宁[6]討論了具有相同角分布的各散射矩陣間的变換矩陣 L 所必須滿足的充分必要条件，从而得到了求 L 构成的变換羣 $\mathscr{L}$ 的所有元的普遍方法. 但是由于采用的是固定极軸坐标系，計算过程比較曲折麻煩，因此沒有能够求出一般解的明显表达式，以致解究竟存在与否，有多少个解，解的羣結构等問題都沒法搞清楚，而且所包含的情况仍旧不够完全.

我們曾經[7]利用局部坐标系求得一种 L 的明显表达式，不过这仅仅相当于繞局部軸轉动 π 角的特殊情况. 黃念宁[6]指出：在高自旋下，这种变換是不完全的.

本文先在局部系中討論 L 的充分必要条件，求得了羣 $\mathscr{L}$ 的独立生成元数及阶数，并且分析了它的結构. 然后化到固定极軸坐标系，求得 L 在 $jmls$ 表象中的明显表达式. 发現文献[6]少考虑了一个独立生成元，因此羣的阶数少了一半. 最后，我們旣在局部系中又直接地求得了黃的方程的解.

本文的方法也适用于在道自旋非守恆量时求各种表象中矩陣 L 的明显表达式. 但是为了避免討論过于繁瑣反而掩盖了問題的主要特征，只在本文的末尾稍微提到求道自旋非守恆量时的 L 的方法.

一、变換矩陣 L 在局部系中的必要充分条件及 L 的形式

局部坐标系中散射幅 M 的形式为[7]

$$M=\sum_{j,m}\frac{2\pi}{iK}\sum_{\mu,\mu',s}\psi_s^{j,m,\mu'}(\theta',\varphi')R^{j,s}_{\mu',\mu}\,\psi_s^{j,m,\mu}(\theta,\varphi)^*, \tag{1.1}$$

式中 $\psi_s^{j,m,\mu}(\theta,\varphi)$ 为有确定动量矩 j，j 在固定极軸上投影 m、在局部軸上投影 μ 及自旋矩 s 的波函数；始态的量无撇，終态的量带撇；“$*$”表示复数共軛. 由此可得非极化粒子散射后的角分布[7]

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega}&=\frac{TrMM^\dagger}{(2s_a+1)(2s_b+1)}=\\&=\sum_{\substack{j_1,\mu,s\\ j_2,\mu'}}\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4K^2(2s_a+1)(2s_b+1)}D^{j_2^*}_{\mu,\mu'}(\varphi',\theta',0)\,D^{j_1}_{\mu,\mu'}(\varphi',\theta',0)\,R^{j_2,s}_{\mu',\mu}R^{j_1,s^*}_{\mu,\mu'} \quad (1.2)\\&=\sum_{\substack{L,j_1,\mu\\ s,j_2,\mu'}}\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4K^2(2s_a+1)(2s_b+1)}(-)^{\mu',-\mu}C^{L,0}_{j_1,\mu';j_2,-\mu'}C^{L,0}_{j_1,\mu;j_2,-\mu}R^{j_2,s}_{\mu',\mu}R^{j_1,s^*}_{\mu,\mu'}\,P_L(\cos\theta'),\end{aligned} \tag{1.3}$$

* 1963 年 6 月 15 日收到.

式中 s_a、s_b 为二粒子的自旋矩；$D^j_{\mu,\mu'}$ 为广义球函数；P_L 为 Legendre 函数；† 表示 Hermitean 共軛.

我們的任务是要找到散射幅M的变换算子 U，使得变换后的散射幅 $M^\times = UMU^\dagger$ 具有同样的角分布. 这就相当于要找 R 矩陣的么正变换矩陣 L，使得 $R^\times = LRL^\dagger$ 对应同样的角分布，而 $U^{is}\psi_s^{j,m,\mu} = \sum_{\mu^\times} L_{\mu^\times,\mu}\psi_s^{j,m,\mu^\times}$（請参看文献[6]中的討論）.

I. 不改变角分布的条件：容易看出，不变式(1.2)或(1.3)的变换矩陣在 $jm\mu s$ 表象中有两种形式：

I$^\backslash$. L 是对角形的么正矩陣

$$\left.\begin{aligned} L^\backslash_{\mu^\times,\mu} &= \epsilon(\mu)\delta_{\mu^\times,\mu}, \\ \epsilon(\mu)\epsilon^*(\mu) &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{i})^\backslash$$

式中 $\epsilon(\mu)$ 是依赖于μ的相因子，$\delta_{\mu^\times,\mu}$ 是 Kronecker 符号. 因为在始态非极化、又沒有測終态极化的場合下，(1.2)式中旣沒有不同μ之間的干涉項，也沒有不同 μ' 之間的干涉項，只含 $D^{j_1}_{\mu,\mu'}D^{j_2*}_{\mu,\mu'}$ 形式的項，所以，改变μ值不同的各散射幅之間的相位不影响角分布.

I$'$. 由于 $D^{j_2*}_{\mu,\mu'}D^{j_1}_{\mu,\mu'} = D^{j_2*}_{-\mu,-\mu'}D^{j_1}_{-\mu,-\mu'}$，所以还存在另外一种可能性：$L$ 是么正的次对角形矩陣，

$$\left.\begin{aligned} L'_{\mu^\times,\mu} &= \epsilon(\mu)\delta_{\mu^\times,-\mu}, \\ \epsilon(\mu)\epsilon^*(\mu) &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{i})'$$

利用(1.3)式可以証明只能有这两种情况. 的确，将 $R_{\mu,\mu'} = \sum_{\mu^\times,\mu'^\times} L_{\mu,\mu^\times}R_{\mu^\times,\mu'^\times}L_{\mu'^\times,\mu'}$ 代入(1.3)式，并且将 $C^{L,0}_{j_1,-\mu;j_2,\nu}$ 写作矩陣形式 $C_{\mu,\nu}$，则角分布不变的条件为

$$\sum_{\mu,\nu,\mu',\nu'} L_{\mu^\times,\mu}C_{\mu,\nu}L^*_{\nu,\nu^\times}L_{\mu'^\times,\mu'}C_{\mu',\nu'}L^*_{\nu',\nu'^\times} = C_{\mu^\times,\nu^\times}C_{\mu'^\times,\nu'^\times}.$$

由之易得 $LCL^\dagger = \pm C$. 再利用L的么正性，就可証明L与对角形矩陣 $C_{\mu,\nu}$ 对易或反对易. 这就要求仅仅对于 $C_{\mu,\mu} = \pm C_{\mu^\times,\mu^\times}$ 的 μ、$\mu^\times$ 才能有 $L_{\mu,\mu^\times} \neq 0$. 因此 I$^\backslash$ 与 I$'$ 是仅有的两种情况.

II. 时間反演不变性要求：$R_{\mu',\mu} = R_{-\mu,-\mu'} \equiv \tilde{\tilde{R}}_{\mu',\mu}$，式中 ∽ 表示矩陣对次对角綫摺轉. 故 $LRL^\dagger = R^\times = \tilde{\tilde{R}}^\times = \tilde{\tilde{L}}^\dagger R\tilde{\tilde{L}}$，而 $L = e^{i\varphi}\tilde{\tilde{L}}^\dagger$，亦卽

$$\epsilon(\mu) = e^{i\varphi}\epsilon^*(-\mu). \qquad (\mathrm{ii})$$

式中 $e^{i\varphi}$ 为与μ无关的共同相因子.

III. 空間反射不变性要求：在 $jm\mu ps$（p 表示宇称，請参看文献[7]）表象中，弹性散射宇称守恆的条件为 $R_{p,-p} = 0$；这相当于 $R_{\mu,\mu'} = R_{-\mu,-\mu'}$. 欲使变换后仍有 $R^\times_{\mu,\mu'} = R^\times_{-\mu,-\mu'}$，必須

$$\epsilon(\mu)\epsilon^{-1}(-\mu) = \epsilon^*(\mu')\epsilon^{*-1}(-\mu') = \lambda. \qquad (\mathrm{iii})$$

式中 λ 与 μ 无关，取 $\mu = \mu'$，可見 λ 为实数. 由 (i) 易見 λ 的模为 1，故 $\lambda = \pm 1$. 再用 (ii) 式卽得 (ii) 中的 φ 为 0 或 π，而 $\epsilon(\mu)^2 = 1$，最后有 $\lambda = 1$ 时，

$$\epsilon(\mu) = \epsilon(-\mu) = \epsilon_+(\mu), \qquad (\mathrm{iii})_+$$

这时 $R_{p,p'}$ 变为 $R_{p,p'}$；$\lambda = -1$ 时，

$$\epsilon(\mu) = -\epsilon(-\mu) = \epsilon_-(\mu), \qquad \text{(iii)}_-$$

这时 $R_{p,p'}$ 变为 $R_{-p,-p'}$.

二、矩陣 L 的分类及羣 $\mathscr{L}$ 的結构

满足上节条件 (i), (ii), (iii) 的矩陣可分为四类:

$$L^{+\backslash}_{\mu^\times,\mu} = \epsilon_+(\mu)\delta_{\mu^\times,\mu};$$
$$L^{-\backslash}_{\mu^\times,\mu} = \epsilon_-(\mu)\delta_{\mu^\times,\mu};$$
$$L^{+/}_{\mu^\times,\mu} = \epsilon_+(\mu)\delta_{\mu^\times,-\mu};$$
$$L^{-/} = \epsilon_-(\mu)\delta_{\mu^\times,-\mu}.$$

矩陣 $L_{\mu^\times,\mu}$ 的各元素都是 ± 1，各行各列都只有一个非零元素，故 L 为赝置換矩陣. $L^\backslash$ 是对角形的，$L^{+\backslash}$ 对于次对角綫对称，$L^{-\backslash}$ 对于次对角綫反对称. $L^/$ 是次对角形的，$L^{+/}$ 是对称的，$L^{-/}$ 是反对称的.

如果道自旋为整数，而且体系可以有 $\mu = 0$ 的分量，則 (iii) 式的 λ 必須为 1 而不能为 -1，亦卽这时不可能有奇宇称的变换 L^-.

但是，如果不存在 $\mu = 0$ 的分量(例如光子 π 介子散射，或双光子系)，則仍然可以有变換 L^-.

此外易見有一一对应关系：$L^/ = L^\backslash\delta_{\mu,-\mu'}$；而 $L^- = L^+\dfrac{\mu}{|\mu|}$(除有 $\mu = 0$ 分量外).

故当无 $\mu = 0$ 分量时，$\mathscr{L}$ 可表为不变子羣 $\mathscr{L}^{+\backslash}$ (羣的中心) 与商羣 $\left(1, \dfrac{\mu}{|\mu|}\right)$；$(1, \delta_{\mu,-\mu})$ 的直积，这时 $\mathscr{L}^+$，$\mathscr{L}^\backslash$ 都是 Abel 子羣，陪集 $L^{+/}$，$L^{-\backslash}$，$L^{-/}$ 互为反对易. 在有 $\mu = 0$ 分量时，只剩下 Abel 羣 $\mathscr{L}^+$，可表为 $\mathscr{L}^{+\backslash}$ 与 $\left(1, \dfrac{\mu}{|\mu|}\right)$ 的直积. 再考虑到 $\mathscr{L}^{+\backslash}$ 又是若干个互相对易的二阶巡迴羣[例如：仅一 $|\mu|$ 値下的 $\epsilon_+(\mu)$ 为負，其余 $|\mu|$ 値下 $\epsilon_+(\mu)$ 均为正的 $\epsilon_+(\mu)$ 构成的 $(1, \epsilon_+(\mu)\delta_{\mu\mu^\times})$] 的直积，就可以得到

1. 当 s 为半整数时：子羣 $\mathscr{L}^{+\backslash}$ 有 $s + \dfrac{1}{2}$ 个独立生成元 $\left(是\ s + \dfrac{1}{2}\right.$ 个二阶巡迴羣的直积$\Big)$，阶数为 $2^{s+\frac{1}{2}}$；羣 $\mathscr{L}$ 有 $s + \dfrac{5}{2}$ 个独立生成元，阶数为 $2^{s+\frac{5}{2}}$.

2. 当 s 为整数且有 $\mu = 0$ 分量时，子羣 $\mathscr{L}^{+\backslash}$ 的阶数为 2^{s+1}；羣 $\mathscr{L}$ 的阶数为 2^{s+2}.

3. 当 s 为整数但不能有 $\mu = 0$ 分量时，子羣 $\mathscr{L}^{+\backslash}$ 的阶数为 2^s，羣 $\mathscr{L}$ 的阶数为 2^{s+2}.

由于 $R^\times = LRL^+ = (-L)R(-L^+)$，可見 L 与 $-L$ 对应同一个变换，故实质上变換羣 $\mathscr{L}$ 的阶数要少一半，独立生成元少一个[例如，不考虑 $\epsilon_+(s) = -1$ 的情况].

三、$jmls$ 表象中的 L 矩陣

文献[7]中指出，由 $jm\mu s$ 表象化到有确定軌道动量矩 l 的 $jmls$ 表象的变換矩陣为 $(-)^{s+\mu}C^{l,0}_{j,-\mu;s,\mu}$，代入 (i) 得

$$L^{\backslash}_{l^\times,l} = \sum_{\mu} C^{l^\times,0}_{j,-\mu;s,\mu}\,\epsilon(\mu)\,C^{l,0}_{j,-\mu;s,\mu}. \qquad (3.1)^{\backslash}$$

$$L'_{l^\times,l} = \sum_{\mu} C^{l^\times,0}_{j,-\mu;s,\mu}\,\epsilon(\mu)\,C^{l,0}_{j,\mu;s,-\mu} = (-)^{l+j+s}L^{\backslash}_{l^\times,l}. \qquad (3.1)'$$

例如：在 $(3.1)^{\backslash}$ 式中取 $\epsilon(\mu)=(-)^{s-\mu}$ 就是文献[7]中得到的繞局部軸轉 π 角的式子.

又如：当 $s=\frac{3}{2}$ 时，在 $(3.1)^{\backslash}$ 中取 $\epsilon(\mu)\equiv 1$ 就是恆等变换；取 $\epsilon_-(\mu)=\mu/|\mu|=1, 1, -1, -1$ (按 μ 递減排列)就是文献[6]中的 L''，取 $\epsilon_-(\mu)=(-)^{s-\mu}=1, -1, 1, -1$ 就是他的 L'''；取 $\epsilon_+(\mu)=(-)^{s-\mu}\mu/|\mu|=1, -1, -1, 1$ 就是他的 L'. 若将上述四种 $\epsilon(\mu)$ 代入 $(3.1)'$ 还可以得到四个 L' 与上述各 $L^{\backslash}$ 在相邻列間相差一个正負号，这是文献[6]中沒有的. 因为他只考虑了与 l 不对易的算子 $s\cdot p$. 而我們考虑到的 $\delta_{\mu^\times,-\mu}$ 是与 l 对易的，例如当 $s=\frac{1}{2}$ 时就可以用 $s\cdot l+\frac{1}{2}$ 构成这样的算子[7]. 根据熟知的选择律 $l_1+l_2+L=l'_1+l'_2+L$ [L 为(1.3)式中 P_L 的下标]容易在 $jmls$ 表象中直接看出与 $\delta_{\mu^\times,-\mu}$ 对应的变換 $L_{l^\times,l}=(-)^{l+j+s}$ 不变角分布. 可見，严格些說，黃念宁的結果还不算是完全的. 少了一个独立元 $(-)^{l+j+s}$，从而少了 L 的一半——L'.

四、黄念宁方程的解[6]

将文献 [6] 中的 $\mathscr{F}^{j,s,k}_{l^\times,l}=(-)^{j+s}\sqrt{(2s+1)(2k+1)(2l+1)(2l^\times+1)}\begin{pmatrix}k & l & l^\times\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\begin{Bmatrix}l & k & l^\times\\ s & j & s\end{Bmatrix}$ 里面的 $3j$ 与 $6j$ 系数的积展开为 $\sum_{\nu}(-)^{j+2s+3\nu}\begin{pmatrix}k & s & s\\ 0 & \nu & -\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j & s & l^\times\\ \nu & -\nu & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j & l & s\\ -\nu & \nu & 0\end{pmatrix}$，再化为 $jm\mu s$ 表象，

$$\mathscr{F}^{j,s,k}_{\mu^\times,\mu}=\sum_{l,l^\times}(-)^{2s+\mu+\mu^\times}\,C^{l,0}_{j,-\mu;s,\mu}\,C^{l^\times,0}_{j,-\mu^\times;s,\mu^\times}\,\mathscr{F}^{j,s,k}_{l^\times,l}=$$

$$=(-)^{s-\mu+k}\sqrt{(2s+1)(2k+1)}\begin{pmatrix}k & s & s\\ 0 & \mu & -\mu^\times\end{pmatrix}.$$

将 $jm\mu s$ 表象中 $\mathscr{F}^{j,s,k}$ 的式子(上式)及 L 的式子[(i)式]代入 $L=\sum_k \beta_k\mathscr{F}^{j,s,k}$，易求得

$$\beta_k=\sum_{\mu}(-)^{s-\mu+k}\sqrt{(2k+1)/(2s+1)}\;\epsilon(\mu)\begin{pmatrix}k & s & s\\ 0 & \mu & -\mu\end{pmatrix}.$$

β_k 的組数与 $\epsilon(\mu)$ 的可能組数相同.

将文献[6]中 $b^{s,k''}_{k,k'}$ 里面的 $3j$ 与 $6j$ 系数如上分解为三个 $3j$ 系数乘积的和，容易直接看出 β_k 为解.

五、道自旋改变的散射过程

这时最好采用 $jms_a\mu_a s_b\mu_b$ 表象，这里 s_a, s_b 为散射粒子的自旋矩；μ_a, μ_b 为其在局部軸上的投影. 在这样的表象里，L 裂为分块对角形的或分块次对角形的，各块內的

$\mu=\mu_a+\mu_b$ 是相同的．各块子矩陣都是实正交矩陣．各块前的相位系数 $\epsilon(\mu)$ 与 s 守恆时同．化至 $jmls$ 表象的方法請参看文献[7]中的一个特例．

这方法在自旋矩为 s_a，s_b 的粒子轉变为自旋矩为 s_a'，s_b' 的粒子的非弹性散射过程中也适用．

参　考　文　献

[1] Minami, S., *Prog. Theor. Phys.*, **11** (1954), 213. Hayakawa, S., Kawaguchi, M., Minami, S., *Prog. Theor. Phys.*, **11** (1954), 332; **12** (1954), 385.
[2] Рындин, Р., Смородинский, Я., *ДАН*, **103** (1955), 69.
[3] Пузиков, Л., Рындин, Р., Смородинский, Я., *ЖЭТФ*, **32** (1957), 592.
[4] Заставенко, Л., Рындин, Р., 周光召, *ЖЭТФ*, **34** (1958), 526.
[5] 时学丹，物理学报，**18** (1962)，184．
[6] 黃念宁，物理学报，**19** (1963)，306．
[7] 侯伯宇，物理学报，**19** (1963)，341．