第 20 卷 第 6 期　　物 理 学 报　　Vol. 20, No. 6
1964 年 6 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　June, 1964

載直流椭圓柱內場的直接积分求解法*

林为干　林炎武

这一問题已在本期另一文[1]中解出，但是，如果我們利用 Bethe 用过的方法[2]，則此載直流椭圆柱内部的磁場可以通过直接积分法求出．这样的一个方法还可能在其他地方找到用处，故特应用到这一个問题上，作为一个例子．

当場点是在椭圓柱之内时，我們取場点 (x_0, y_0) 作为新原点，然后在新原点的极坐标中进行积分，可以得到磁場的分量（其中 φ_0 是新原点的輻角，(ξ, η) 是在上述坐标系中的直角坐标，(r, φ) 是在上述坐标系中的极坐标，如图 1 所示）．

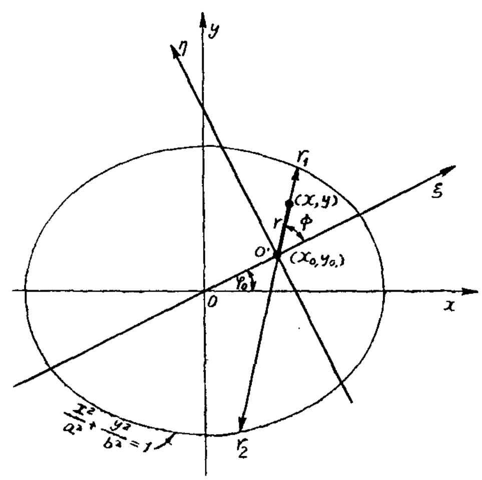

图 1

$$B_x = \mu\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\mu J}{2\pi}\iint_G \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial y}\,ds,$$

$$B_y = -\mu\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu J}{2\pi}\iint_G \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\,ds,$$

$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_0}{r}$，故 $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(\varphi + \varphi_0)$；同样，$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin(\varphi + \varphi_0)$．

現在我們在以 O' 为原点的极坐标上进行上面两个式子的积分，并令 $\varphi + \varphi_0 = \psi$，

$$B_x = \frac{\mu J}{2\pi}\int_{\varphi_0-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\sin(\varphi+\varphi_0)}{r}\,r\,dr\,d\varphi = \frac{\mu J}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(r_2 - r_1)\sin\psi\,d\psi,$$

$$B_y = -\frac{\mu J}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(r_2 - r_1)\cos\psi\,d\psi.$$

我們先将这两个分量的計算結果給出如下，然后說明如何进行积分：

$$B_x = \frac{\mu J}{\pi}\cdot\frac{1}{\epsilon^2 - 1}\{[(C_0 - A_0)\tilde{\beta} - 2B_0]M - [(C_0 - A_0\epsilon^2)\bar{\beta} - 2B_0\epsilon^2]N\}, \quad (1)$$

$$B_y = -\frac{\mu J}{\pi}\cdot\frac{1}{\epsilon^2 - 1}\{[2B_0\tilde{\beta} + (C_0 - A_0)]M - [2B_0\bar{\beta} + (C_0 - A_0\epsilon^2)]N\}. \quad (2)$$

式中

$$A_0 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2), \quad B_0 = x_0y_0\epsilon^2, \quad C_0 = \frac{b^2}{a^2}(b^2 - y_0^2),$$

* 1963 年 6 月 18 日收到．

$$\tilde{\alpha} = \frac{A_0 - C_0}{2B_0} - \sqrt{\left(\frac{A_0 - C_0}{2B_0}\right)^2 + 1}, \qquad \tilde{\beta} = \frac{A_0 - C_0}{2B_0} + \sqrt{\left(\frac{A_0 - C_0}{2B_0}\right)^2 + 1},$$

$$\bar{\alpha} = \frac{A_0\epsilon^2 - C_0}{2B_0} - \sqrt{\left(\frac{A_0\epsilon^2 - C_0}{2B_0}\right)^2 + \epsilon^2}, \quad \bar{\beta} = \frac{A_0\epsilon^2 - C_0}{2B_0} + \sqrt{\left(\frac{A_0\epsilon^2 - C_0}{2B_0}\right)^2 + \epsilon^2},$$

令 $f(\zeta) = A_0\zeta^2 + 2B_0\zeta + C_0$,

$$M = \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}}{\sqrt{1 + \tilde{\beta}^2}} \sqrt{\frac{1}{(1+\tilde{\alpha}^2)f(\tilde{\beta}) - (1+\tilde{\beta}^2)f(\tilde{\alpha})}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{(1+\tilde{\alpha}^2)f(\tilde{\beta}) - (1+\tilde{\beta}^2)f(\tilde{\alpha})}{(1+\tilde{\beta}^2)f(\tilde{\alpha})}},$$

$$N = \frac{\bar{\alpha} - \bar{\beta}}{\sqrt{\epsilon^2 + \bar{\beta}^2}} \sqrt{\frac{1}{(\epsilon^2+\bar{\alpha}^2)f(\bar{\beta}) - (\epsilon^2+\bar{\beta}^2)f(\bar{\alpha})}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{(\epsilon^2+\bar{\alpha}^2)f(\bar{\beta}) - (\epsilon^2+\bar{\beta}^2)f(\bar{\alpha})}{(1+\bar{\beta}^2)f(\bar{\alpha})}},$$

$$\epsilon = \frac{b}{a}.$$

以上两积分的求法是先求出 r_1 及 r_2 作为 φ 的函数形式,然后对 φ 进行积分. 为了要求出 r_1 及 r_2,过 (x_0, y_0) 作直綫

$$x = x_0 + t\cos(\varphi + \varphi_0), \quad y = y_0 + t\sin(\varphi + \varphi_0).$$

求此直綫与椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

的两交点,在此两交点上, t 是方程

$$\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = 0$$

的两个根,其中

$$\alpha = \frac{\cos^2(\varphi+\varphi_0)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi+\varphi_0)}{b^2} = \frac{\cos^2(\varphi+\varphi_0)}{b^2}[\epsilon^2 + \operatorname{tg}^2(\varphi + \varphi_0)],$$

$$\beta = \frac{x_0\cos(\varphi+\varphi_0)}{a^2} + \frac{y_0\sin(\varphi+\varphi_0)}{b^2} = \frac{\cos(\varphi+\varphi_0)}{b^2}[\epsilon^2 x_0 + y_0\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_0)],$$

$$\gamma = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1.$$

解之,卽得

$$t_{1,2} = -\frac{\beta}{\alpha} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}.$$

当 (x_0, y_0) 在椭圓内时, $\gamma < 0$. 由 $\psi = \varphi + \varphi_0$ 以及 $r_2 - r_1 = t_1 - t_2 = \frac{2\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}$ 得到

$$B_x = \frac{\mu J}{2\pi} \cdot 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\psi \frac{\sqrt{(x_0\epsilon^2 + y_0\operatorname{tg}\psi)^2 - b^2\gamma(\epsilon^2 + \operatorname{tg}^2\psi)}}{\epsilon^2 + \operatorname{tg}^2\psi} d\psi.$$

$$B_y = -\frac{\mu J}{2\pi} \cdot 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{(x_0\epsilon^2 + y_0\operatorname{tg}\psi)^2 - b^2\gamma(\epsilon^2 + \operatorname{tg}^2\psi)}}{\epsilon^2 + \operatorname{tg}^2\psi} d\psi.$$

令 $\operatorname{tg}\psi = u$, 上面两个积分分别变为

$$B_x = \frac{\mu J}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{A_0u^2+2B_0u+C_0}\,\frac{u}{\epsilon^2+u^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}\,du,$$

$$B_y = -\frac{\mu J}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{A_0u^2+2B_0u+C_0}\,\frac{1}{\epsilon^2+u^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}\,du.$$

用分項分式的方法，将积分号下的分式拆成两項，并化簡，得

$$B_x = \frac{\mu J}{\pi}\frac{1}{\epsilon^2-1}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(C_0-A_0)u-2B_0}{\sqrt{A_0u^2+2B_0u+C_0}}\frac{1}{1+u^2}\,du-\right.$$
$$\left.-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(C_0-A_0\epsilon^2)u-2B_0\epsilon^2}{\sqrt{A_0u^2+2B_0u+C_0}}\frac{1}{\epsilon^2+u^2}\,du\right],$$

$$B_y = -\frac{\mu J}{\pi}\frac{1}{\epsilon^2-1}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2B_0u+(C_0-A_0)}{\sqrt{A_0u^2+2B_0u+C_0}}\frac{1}{1+u^2}\,du-\right.$$
$$\left.-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2B_0u+(C_0-A_0\epsilon^2)}{\sqrt{A_0u^2+2B_0u+C_0}}\frac{1}{\epsilon^2+u^2}\,du\right].$$

分别对于括号中的第一个积分引用置换

$$\mu = \frac{\tilde{\alpha}t+\tilde{\beta}}{t+1},$$

又分别对于括号中的第二个积分引用置换

$$\mu = \frac{\bar{\alpha}t+\bar{\beta}}{t+1},$$

再舍去积分号下为奇函数的部分，便化成可以查用积分表的形式，而得到已給出的結果(1),(2).

当 (x_0, y_0) 在椭圓的边界上，可得到非常簡单的結果．此时

$$A_0 = y_0^2,\quad B_0 = x_0y_0\epsilon^2,\quad C_0 = x_0^2\epsilon^4,$$

$$f(u) = (y_0u+x_0\epsilon^2)^2 = (\sqrt{A_0}u+\sqrt{C_0})^2,$$

$$\tilde{\alpha} = -\frac{x_0}{y_0}\epsilon^2,\quad \tilde{\beta} = \frac{y_0}{x_0\epsilon^2},\quad \bar{\alpha} = -\frac{x_0}{y_0}\epsilon^2,\quad \bar{\beta} = \frac{y_0}{x_0},$$

$$f(\tilde{\alpha}) = f(\bar{\alpha}) = 0,\quad f(\tilde{\beta}) = \left(\frac{a^4y_0^2+b^4x_0^2}{x_0a^2b^2}\right)^2,\quad f(\bar{\beta}) = \frac{b^4}{x_0^2}.$$

并算出

$$M = \frac{-x_0b^2a^2}{x_0^2b^4+y_0^2a^4}\cdot\frac{\pi}{2},\quad N = -\frac{ax_0}{b^3}\frac{\pi}{2},$$

$$(C_0-A_0)\tilde{\beta}-2B_0 = -y_0\frac{a^4y_0^2+b^4x_0^2}{x_0b^2a^2},$$

$$(C_0-A_0\epsilon^2)\bar{\beta}-2B_0\epsilon^2 = \frac{a^4y_0^2+b^4x_0^2}{a^4},$$

$$2B_0\tilde{\beta}+(C_0-A_0) = \frac{a^4y_0^2+b^4x_0^2}{a^4},$$

$$2B_0\bar{\beta}+(C_0-A_0\epsilon^2) = b^2\epsilon^2,$$

于是有

$$B_x = \frac{\mu J}{\epsilon^2 - 1}[y_0(1-\epsilon)] = -\frac{\mu J}{1+\epsilon}y_0, \tag{3}$$

$$B_y = \frac{\mu J}{\epsilon^2 - 1}[x_0\epsilon(\epsilon-1)] = \frac{\mu J}{1+\epsilon}x_0\epsilon. \tag{4}$$

若引用 (x_0, y_0) 的輔助角 θ_0，由

$$x_0 = a\cos\theta_0, \quad y_0 = b\sin\theta_0$$

可得

$$B_x = -\frac{\mu J}{a+b}ab\sin\theta_0, \quad B_y = \frac{\mu J}{a+b}ab\cos\theta_0;$$

又得到

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \mu J\frac{ab}{a+b} = \frac{\mu}{\pi}\frac{I}{a+b},$$

此处 $I = J(\pi ab)$ 为椭柱电流；由此式可見，在椭柱周界上，磁場強度是一常数，与載直流正圓柱周界上的情形一样. (3),(4)又可写成

$$B_x = B\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0\right); \quad B_y = B\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0\right). \tag{5}$$

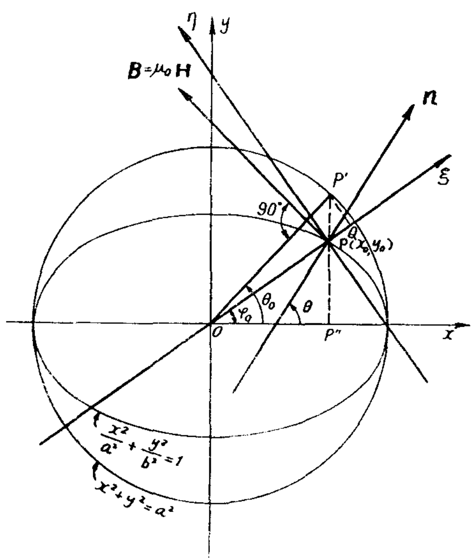

图 2

可見磁場方向是与輔助角終綫相垂直的，如图 2 所示. 椭柱周界上的磁場可以图解如下：过場点 P 作 x 軸上的垂綫，交圓 $x^2+y^2=a^2$ 于 P'，交 x 軸于 P''，联 OP'，則磁場 H 垂直于 OP'，而且，H_x 及 H_y 分別与 PP' 及 OP'' 成正比，故 OP' 与磁場 H 成正比，即

$$H = \frac{I}{a^2(1+\epsilon)}\overline{OP},$$

$$|H_x| = \frac{I}{a^2(1+\epsilon)}\overline{P'P''},$$

$$|H_y| = \frac{I}{a^2(1+\epsilon)}\overline{OP''}.$$

設 $\mathbf{n}$ 为过場点 $P(x_0, y_0)$ 的法綫方向，則不难証明，此法綫与 x 軸所成之角 θ，

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\epsilon}\operatorname{tg}\theta_0, \quad \operatorname{tg}\theta_0 = \frac{1}{\epsilon}\operatorname{tg}\varphi_0.$$

故 P 点磁場的法綫分量为

$$H_n = H_x\cos\theta + H_y\sin\theta = H\sin(\theta-\theta_0). \tag{6}$$

同样可得 P 点上磁場的切綫分量为

$$H_t = H\cos(\theta-\theta_0). \tag{7}$$

(6),(7)与文献[3]的結果一致. 同样，不难得出

$$H_\xi = -H\sin(\theta_0-\varphi_0), \tag{8}$$

$$H_\eta = H\cos(\theta_0-\varphi_0). \tag{9}$$

故如 Q 是 P' 在 $O\xi$ 軸上的投影，則 H_ξ 及 H_η 分别正比于 $\overline{P'Q}$ 及 $\overline{OQ}$.

又文中的輔助 θ_0 正是文献[1]中的椭柱坐标中的 η 角．文献[3]的結果是本文当場在周界上时的特例．文献[1]給出椭柱內、外的場，故包含本文的結果，但本文的結果似較为簡明．本文中所用的方法在于轉入极坐标后即可消去被积函数中在分母中出現的距离 r，使积分可以用初等方法处理，故在解电磁場問題中是值得注意的一种手法．

参　考　文　献

[1] 林为干、$\boxed{\text{鍾祥礼}}$，見本学报本期“均匀恒磁場中載流导綫的磁場計算問題”．

[2] Bethe, H. A., Theory of Diffraction by Small Holes, *Phys. Rev.*, **66**, Nos. 7 and 8, Oct. 1 and 15 (1944).

[3] Кулаков, Ю. И., Магнитное на поверхности цилиндрического проводника с эллиптическим сечением, *ЖТФ*, **33**, вып. 2 (1963), 150—153.