第20卷 第6期 物 理 学 报 Vol. 20, No. 6
1964 年 6 月 ACTA PHYSICA SINICA June, 1964

均匀恒磁場中載流导綫的磁場計算問題*

林为干 鍾祥礼

提　要

对于任意截面的載流导体在垂直均匀磁場中所生的影响問題研究得还不够，最近看到有关椭圓截面的导綫表面上的磁場的文献．本文指出，如果导綫的截面曲綫是由保角变换得到的曲綫坐标中的一个坐标等于常数表出，則此問題可以容易地解出，卽导綫內外的磁場可以求得．

一根无限长的橫截面为任意形状的載恆定电流 I 的导綫，在垂直(与导綫軸綫)均匀恆定磁場中所引起的总磁場的計算，是一个在理論上和实用上都有价値的問題．但是关于这一問題的解以及如何寻求一个比較一般的解决方法，在过去发表的文献和书籍中都是討論得不够的，在几本著名的电磁理論的书籍中，也只限于討論几个特殊的情况[1-3]．有人直接从比奥-沙瓦定律来計算磁場，但是这种处理方法常常碰到积分的具体困难，例如对于椭圓形截面載流导綫的磁場計算，最近有人从积分变換着手但只求出了在它的表面的磁場[4]．

本文仍将这一問題作为一个典型的边値問題来处理．从本文的結果可以看出：如果这导綫的截面曲綫可表成由保角变換从直角坐标 x, y 得出的坐标 ξ, η 中 $\xi=\text{const}$ 一曲綫，則这个問題就不难解出．

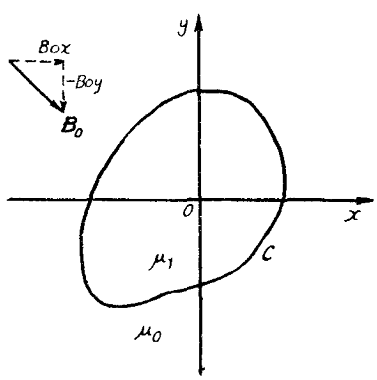

图 1

图 1 为一条无限长的載流导綫的任一截面，c 为导綫边界，电流沿截面均匀分布，其密度为 $\mathbf{J}$．导綫的导磁系数为 μ_1．均匀外磁場設为 $\mathbf{B}_0$，我們的任务在于求解导綫內外各点的磁場．

为了求解方便，引入磁位 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$，則 $\mathbf{A}$ 滿足以下方程：

导綫外部：$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=0,$ (1)

导綫內部：$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_1\mathbf{J}.$ (2)

由于导綫为无限长，場不随 z 变化，因而可将本題化为二維問題，根据 $\mathbf{J}$ 只在 z 方向，外磁場对应的 $\mathbf{A}$ 也只具有 z 分量，故在这种情况下，可将方程(1)，(2)化为二維标量方程．因

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\nabla\times\nabla\times(\mathbf{i}_zA_z)=-\mathbf{i}_z\nabla^2_{xy}A_z,$$

代入(1)，(2)，則

导綫外部：$\nabla^2_{xy}A_z=0,$ (3)

导綫內部：$\nabla^2_{xy}A_z=-\mu_1J_z.$ (4)

* 1963 年 4 月 27 日收到．

而外磁場 $\mathbf{B}_0 = \mathbf{i}_x B_{0x} - \mathbf{i}_y B_{0y}$（見图 1），設对应于 $\mathbf{B}_0$ 的 $\mathbf{A}$ 为 $\mathbf{A}_0$，則由 $\mathbf{B}_0 = \nabla \times \mathbf{A}_0$ 的关系，可求出

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{i}_z A_{0z} = \mathbf{i}_z (B_{0x} y + B_{0y} x). \tag{5}$$

如果导綫的边界 c 能通过保角变换 $w_2 = F(w_1)$，从平面 $w_1 = x + jy$ 变换到平面 $w_2 = \xi + j\eta$ 上；幷設 w_1 的共軛值为 $w_1^* = x - jy$，w_2 的共軛值为 $w_2^* = \xi - j\eta$，則

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(w_1 + w_1^*), \\ y &= -\frac{1}{2} j (w_1 - w_1^*). \end{aligned} \tag{6}$$

根据此式，w_1 和 w_1^* 可以代替 x，y 作为两个独立变量[5]．将 ∇_{xy}^2 用变量 w_1，w_1^* 表出，卽得

$$\nabla_{xy}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial w_1 w_1^*}. \tag{7}$$

将 x，y 坐标变换为 ξ，η 坐标，需要求出对新坐标 ξ，η 的度量系数，在柱面坐标系統情况下，

$$h_1 = h_2 = h = \left| \frac{dw_1}{dw_2} \right| = \left| \frac{dw_1}{dw_2} \frac{dw_1^*}{dw_2^*} \right|^{\frac{1}{2}},$$

則

$$\frac{\partial^2}{\partial w_1 \partial w_1^*} = \frac{1}{\left| \dfrac{dw_1}{dw_2} \dfrac{dw_1^*}{dw_2^*} \right|} \frac{\partial^2}{\partial w_2 \partial w_2^*}. \tag{8}$$

将(8)代入(7)中，得

$$\nabla_{xy}^2 = 4 \left| \frac{dw_1}{dw_2} \frac{dw_1^*}{dw_2^*} \right|^{-1} \frac{\partial^2}{\partial w_2 \partial w_2^*}. \tag{9}$$

将(9)代入(4)中，得

$$4 \frac{\partial^2 A_z}{\partial w_2 \partial w_2^*} = -\mu_1 J \frac{dw_1}{dw_2} \frac{dw_1^*}{dw_2^*}.$$

对此式积分二次，求出 A_z 的特解为

$$A_z = -\frac{\mu_1 J}{4} w_1 w_1^* = -\frac{\mu_1 J}{4} |w_1|^2. \tag{10}$$

A_z 的通解可从

$$\nabla_{xy}^2 A_z = 0$$

或

$$\nabla_{\xi\eta}^2 A_z = 0$$

利用分离变量法求出．由此可以得出結論，凡是載直流导綫截面边界形状能用保角变换从 $w_1 = x + jy$ 变换为 $w_2 = \xi + j\eta$ 中的 $\xi = \text{const}$ 表出，則問題是完全可用分离变量法作为边值問題解出．

图 2 表示的为載流导綫的椭圓形截面，a 为半长軸，b 为半短軸．通过如下的保角变换：

$$w_1 = x + jy = c \operatorname{ch}(\xi + j\eta) = c \operatorname{ch} w_2 \tag{11}$$

（式中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ 为椭圓的焦距），卽可将椭圓边界从直角坐标 (x, y) 变为椭圓坐标

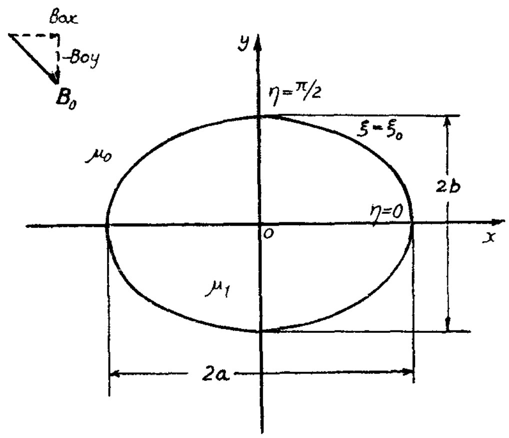

图 2

(ξ, η) 的 $\xi=\xi_0$. 由(11)式,

$$\left.\begin{aligned} x &= c\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta, \\ y &= c\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &\text{当} \quad \eta=0, \quad \xi=\xi_0, \ x=a=c\,\mathrm{ch}\,\xi_0, \\ &\text{当} \quad \eta=\frac{\pi}{2}, \ \xi=\xi_0, \ y=b=c\,\mathrm{sh}\,\xi_0, \end{aligned} \tag{13}$$

则

$$\mathrm{th}\,\xi_0=\frac{b}{a},$$

$$\xi_0=\mathrm{th}^{-1}\frac{b}{a}.$$

在(11)式的保角变换情况下,

$$\frac{dw_1}{dw_2}=c\,\mathrm{sh}\,w_2=c\,\mathrm{sh}\,(\xi+j\eta)=c(\mathrm{sh}\,\xi\cos\eta+j\,\mathrm{ch}\,\xi\sin\eta),$$

$$\left|\frac{dw_1}{dw_2}\right|^2=c^2(\mathrm{sh}^2\xi\cos^2\eta+\mathrm{ch}^2\xi\sin^2\eta)=c^2(\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\eta). \tag{14}$$

通过直角坐标与椭圆坐标的变换,(3),(4)二式变为

$$\nabla^2_{\xi\eta}A_z=\frac{\partial^2 A_z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial\eta^2}=0 \qquad \xi>\xi_0 \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2_{\xi\eta}A_z &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial\eta^2}=-\mu_1 J\left|\frac{dw_1}{dw_2}\right|^2=-\mu_1 Jc^2(\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\eta)= \\ &= -4I_0(\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\eta) \qquad 0<\xi<\xi_0, \end{aligned} \tag{16}$$

式中

$$I_0=\frac{\mu_1 Jc^2}{4}.$$

(5)式表示的外磁場的向量磁位为

$$\mathbf{A}_0=\mathbf{i}_z(B_{0y}\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta+B_{0x}\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta). \tag{17}$$

(10)式表示的 A_z 的特解为

$$A_z = -\frac{\mu_1 J}{4}|w_1|^2 = -\frac{\mu_1 J}{4}|c\ \mathrm{ch}\,(\xi + j\eta)|^2 = -\frac{\mu_0 J c^2}{4}(\mathrm{ch}^2\xi - \sin^2\eta) =$$

$$= -\frac{I_0}{2}(\mathrm{ch}\,2\xi + \cos 2\eta). \tag{18}$$

如果将(18)式代入(16)式中，甚易驗証它为所求的特解.

再求(15)和(16)两式的通解. 首先，利用熟知的分离变量法处理下式：

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial \eta^2} = 0.$$

再考虑到外加磁場的作用，即得到导綫內部和外部的 A_z 的通解如下：

$$\xi > \xi_0 \qquad A_z^+ = a_0\xi\eta + a_1\xi + a_2\eta + a_3 + \sum^{\infty} e^{-m\xi}(b_m\cos m\eta + c_m\sin m\eta) + $$
$$+ c(B_{0y}\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta + B_{0x}\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta), \tag{19}$$

$$0 < \xi < \xi_0 \qquad A_z^- = a_0'\xi\eta + a_1'\xi + a_2'\eta + a_3' + \sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{ch}\,m\xi(b_m'\cos m\eta + c_m'\sin m\eta) + $$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{sh}\,m\xi(b_m''\cos m\eta + c_m''\sin m\eta) - \frac{I_0}{2}(\mathrm{ch}\,2\xi + \cos 2\eta). \tag{20}$$

在利用边界条件决定系数以前，先进行选項. 我們根据下述两点理由，将(19)和(20)式进行簡化：

(i) 对导綫內部而言，各点的磁場应为有限值；

(ii) 对导綫外部而言，当 $\xi \to \infty$，即在无限远处的磁場与由綫电流产生的磁場相同.

为了要利用 (i)，先求出 $\mathbf{B}$ 的分量与 A_z 的关系，由

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{i}_z A_z) = \frac{1}{h}\left(\mathbf{i}_\xi \frac{\partial A_z}{\partial \eta} - \mathbf{i}_\eta \frac{\partial A_z}{\partial \xi}\right), \tag{21}$$

代入(14)式的 h 值，从而在导綫內部

$$B_\xi^- = \frac{1}{c\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta}}\frac{\partial A_z}{\partial \eta}, \quad B_\eta^- = -\frac{1}{c\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta}}\frac{\partial A_z}{\partial \xi}, \tag{22}$$

B_ξ^- 和 B_η^- 在导綫內部各点均为有限值，則在 $\xi = 0,\ \eta = 0$ 处应为有限值. 将(20)代入(22)中，先取 $\xi = 0$，則

$$B_\xi^-|_{\xi=0} = \frac{1}{c\sin\eta}\left[a_2' + \sum_{m=1}^{\infty} m(-b_m'\sin m\eta + c_m'\cos m\eta) + I_0\sin 2\eta\right]$$

$$B_\eta^-|_{\xi=0} = \frac{1}{c\sin\eta}\left[a_0'\eta + a_1' + \sum_{m=1}^{\infty} m(b_m''\cos m\eta + c_m''\sin m\eta)\right].$$

再令 $\eta = 0$，由 B_ξ^- 和 B_η^- 为有限值判断，

$$a_1' = a_2' = 0 \tag{23}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} mc_m' = 0, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} mb_m'' = 0. \tag{24}$$

为了满足(24)式,可取

$$c_m' = b_m'' = 0, \tag{24a}$$

因此(20)式可簡化为

$$0 < \xi < \xi_0 \qquad A_z^- = a_0'\xi\eta + a_3' + \sum_{m=1}^{\infty}(b_m' \operatorname{ch} m\xi \cos m\eta + c_m'' \operatorname{sh} m\xi \sin m\eta) - \\ - \frac{I_0}{2}(\operatorname{ch} 2\xi + \cos 2\eta). \tag{25}$$

为了利用 (ii),先求出 $\xi \to \infty$ 时 A_z 的极限值. 当 $\xi \to \infty$, 如果載流导綫看成是一綫电流,其产生的矢量磁位为

$$A_z^+ \to \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log r;$$

但当 $\xi \to \infty$ 时,

$$r^2 = x^2 + y^2 = c^2(\operatorname{ch}^2\xi \cos^2\eta + \operatorname{sh}^2\xi \sin^2\eta) \approx c^2 \operatorname{ch}^2\xi \approx c^2 \frac{e^{2\xi}}{4}.$$

故

$$\log r \approx \ln \frac{c}{2} + \xi,$$

即

$$A_z^+ \to \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\ln \frac{c}{2} + \xi\right). \tag{26}$$

但由(19)式,当 $\xi \to \infty$ 时,

$$A_z^+ \to a_0\xi\eta + a_1\xi + a_2\eta + a_3 + c(B_{0y} \operatorname{ch}\xi \cos\eta + B_{0x} \operatorname{sh}\xi \sin\eta). \tag{27}$$

比較(26)和(27)二式,可得

$$a_0 = a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{c}{2}, \tag{28}$$

式中 I 为导綫中的总电流

$$I = J\pi ab, \tag{29}$$

因此(19)式可簡化为

$$\xi > \xi_0 \qquad A_z^+ = a_1\xi + a_3 + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\xi}(b_m \cos m\eta + c_m \sin m\eta) + \\ + c(B_{0y} \operatorname{ch}\xi \cos\eta + B_{0x} \operatorname{sh}\xi \sin\eta). \tag{30}$$

經簡化后,利用边界条件进行場的匹配. 在导綫表面 A_z 应满足的边界条件为

$$\xi = \xi_0 \qquad A_z^+ = A_z^-, \tag{31}$$

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_z^-}{\partial \xi} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_z^+}{\partial \xi} \quad 或 \quad \frac{\partial A_z^-}{\partial \xi} = \frac{\mu_1}{\mu_0}\frac{\partial A_z^+}{\partial \xi} = \mu_r \frac{\partial A_z^+}{\partial \xi}, \tag{32}$$

式中 $\mu_r = \frac{\mu_1}{\mu_0}$ 为导綫的相对导磁系数.

根据(31)式的边界条件,代入(25)和(30)的值,可得

$$a_1\xi_0 + a_3 + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\xi_0}(b_m \cos m\eta + c_m \sin m\eta) + c(B_{0y} \operatorname{ch}\xi_0 \cos\eta + B_{0x} \operatorname{sh}\xi_0 \sin\eta) =$$

$$= a_0'\xi_0\eta + a_3' + \sum_{m=1}^{\infty}(b_m' \operatorname{ch} m\xi_0 \cos m\eta + c_m'' \operatorname{sh} m\xi_0 \sin m\eta) - \frac{I_0}{2}(\operatorname{ch} 2\xi_0 + \cos 2\eta).$$

比較 η 的对应項，得出

$$\left.\begin{aligned}
&a_1\xi_0 + a_3 = a_3' - \frac{I_0}{2}\operatorname{ch} 2\xi_0,\\
&a_0'\xi_0 = 0,\\
&e^{-\xi_0} b_1 + B_{0y}c \operatorname{ch}\xi_0 = b_1' \operatorname{ch}\xi_0,\\
&e^{-\xi_0} c_1 + B_{0x}c \operatorname{sh}\xi_0 = c_1'' \operatorname{sh}\xi_0,\\
&e^{-2\xi_0} b_2 = b_2' \operatorname{ch} 2\xi_0 - \frac{I_0}{2},\\
&e^{-m\xi_0} c_m = c_m'' \operatorname{sh} m\xi_0 \qquad m \geqslant 2,\\
&e^{-m\xi_0} b_m = b_m' \operatorname{ch} m\xi_0 \qquad m \geqslant 3.
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

根据(32)式的边界条件，代入(25)和(30)的值，可得

$$a_0'\eta + \sum_{m=1}^{\infty} m(b_m' \operatorname{sh} m\xi_0 \cos m\eta + c_m'' \operatorname{ch} m\xi_0 \sin m\eta) - I_0 \operatorname{sh} 2\xi_0 =$$

$$= \mu_r\left[a_1 - \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-m\xi_0}(b_m \cos m\eta + c_m \sin m\eta) + c(B_{0y} \operatorname{sh}\xi_0 \cos\eta + B_{0x} \operatorname{ch}\xi_0 \sin\eta)\right].$$

比較 η 的对应項，得出

$$\left.\begin{aligned}
&- I_0 \operatorname{sh} 2\xi_0 = \mu_r a_1,\\
&a_0' = 0,\\
&b_1' \operatorname{sh}\xi_0 = \mu_r(- e^{-\xi_0} b_1 + B_{0y}c \operatorname{sh}\xi_0),\\
&c_1'' \operatorname{ch}\xi_0 = \mu_r(-e^{-\xi_0} c_1 + B_{0x}c \operatorname{ch}\xi_0),\\
&b_2' \operatorname{sh} 2\xi_0 = - \mu_r e^{-2\xi_0} b_2,\\
&c_m'' \operatorname{ch} m\xi_0 = - \mu_r e^{-m\xi_0} c_m \qquad m \geqslant 2,\\
&b_m' \operatorname{sh} m\xi_0 = - \mu_r e^{-m\xi_0} b_m \qquad m \geqslant 3.
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

从(33)和(34)最后两个方程来看，满足此两式的 c_m, c_m'', b_m 及 b_m' 均应为 0，即

$$c_m = c_m'' = 0 \qquad m \geqslant 2,$$
$$b_m = b_m' = 0 \qquad m \geqslant 3.$$

其余各系数解出如下：

$$\left.\begin{aligned}
&a_0' = 0,\\
&a_1 = -\frac{I_0}{\mu_r}\operatorname{sh} 2\xi_0,\\
&a_3' = a_1\xi_0 + a_3 + \frac{I_0}{2}\operatorname{ch} 2\xi_0\\
&\quad = - \frac{I_0\xi_0}{\mu_r}\operatorname{sh} 2\xi_0 + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{c}{2} + \frac{I_0}{2}\operatorname{ch} 2\xi_0,\\
&b_1 = \frac{B_{0y}c(\mu_r - 1)\sin 2\xi_0 e^{\xi_0}}{2(\operatorname{sh}\xi_0 + \mu_r \operatorname{ch}\xi_0)},\\
&b_1' = \frac{\mu_r B_{0y} c e^{\xi_0}}{\operatorname{sh}\xi_0 + \mu_r \operatorname{ch}\xi_0},
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{B_{0x}c(\mu_r - 1)\sin 2\xi_0 e^{\xi_0}}{2(\operatorname{ch}\xi_0 + \mu_r \operatorname{sh}\xi_0)},\\
c_1'' &= \frac{\mu_r B_{0x} c e^{\xi_0}}{\operatorname{ch}\xi_0 + \mu_r \operatorname{sh}\xi_0},\\
b_2 &= -\frac{I_0 \operatorname{sh} 2\xi_0 e^{+2\xi_0}}{2(\operatorname{sh} 2\xi_0 + \mu_r \operatorname{ch} 2\xi_0)},\\
b_2' &= \frac{\mu_r I_0}{2(\operatorname{sh} 2\xi_0 + \mu_r \operatorname{ch} 2\xi_0)}.
\end{aligned}
\right\}
$$

最后求出矢量磁位及磁感強度如下:

$$
\left.
\begin{aligned}
\xi > \xi_0 \qquad A_z^+ &= a_1\xi + a_3 + e^{-\xi}(b_1\cos\eta + c_1\sin\eta) + e^{-2\xi}b_2\cos 2\eta +\\
&\quad + c(B_{0y}\operatorname{ch}\xi\cos\eta + B_{0x}\operatorname{sh}\xi\sin\eta),\\
0 < \xi < \xi_0 \qquad A_z^- &= a_3' + b_1'\operatorname{ch}\xi\cos\eta + c_1''\operatorname{sh}\xi\sin\eta + b_2'\operatorname{ch}2\xi\cos 2\eta -\\
&\quad - \frac{I_0}{2}(\operatorname{ch}2\xi + \cos 2\eta),
\end{aligned}
\right\} \quad (36)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\xi > \xi_0 \qquad B_\xi^+ &= \frac{1}{c\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta}}\frac{\partial A_z^+}{\partial\eta},\\
B_\eta^+ &= -\frac{1}{c\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta}}\frac{\partial A_z^+}{\partial\xi},\\
0 < \xi < \xi_0 \qquad B_\xi^- &= \frac{1}{c\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta}}\frac{\partial A_z^-}{\partial\eta},\\
B_\eta^- &= -\frac{1}{c\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta}}\frac{\partial A_z^-}{\partial\xi},
\end{aligned}
\right\} \quad (37)
$$

式中各系数的值由(35)和(28)式給出.

根据上节所得結果討論下列几种特例:

1. 当无外磁場存在时, $B_{0x} = B_{0y} = 0$, $\mu_1 = \mu_0$.

由(35)和(28)二式所定出的系数值如下:

$$
\left.
\begin{aligned}
a_1 &= -I_0 \operatorname{sh} 2\xi_0,\\
a_3 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{c}{2},\\
a_3' &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{c}{2} + \frac{I_0}{2}(\operatorname{ch}2\xi_0 - 2\xi_0\operatorname{sh}2\xi_0),\\
b_1 &= b_1' = c_1 = c_1'' = 0,\\
b_2 &= -\frac{I_0}{2}\operatorname{sh}2\xi_0,\\
b_2' &= \frac{I_0}{2}e^{-2\xi_0}.
\end{aligned}
\right\} \quad (38)
$$

導綫內外各点的矢量磁位及磁感強度为

$$\left.\begin{aligned}
&\xi \geqslant \xi_0 \quad && A_z^+ = a_1\xi + a_3 + b_2 e^{-2\xi}\cos 2\eta = \\
& && = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{c}{2} - I_0\left(\xi\,\mathrm{sh}\,2\xi_0 + \frac{1}{2}e^{-2\xi}\,\mathrm{sh}\,2\xi_0\cos 2\eta\right), \\
&0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0 \quad && A_z^- = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{c}{2} + \frac{I_0}{2}(\mathrm{ch}\,2\xi_0 - 2\xi_0\,\mathrm{sh}\,2\xi_0 - \mathrm{ch}\,2\xi - \\
& && - \cos 2\eta + e^{-2\xi_0}\,\mathrm{ch}\,2\xi\cos 2\eta), \\
&\xi \geqslant \xi_0 \quad && hB_\xi^+ = I_0 e^{-2\xi}\,\mathrm{sh}\,2\xi_0\sin 2\eta, \\
& && hB_\eta^+ = I_0\,\mathrm{sh}\,2\xi_0(1 - e^{-2\xi}\cos 2\eta), \\
&0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0 \quad && hB_\xi^- = I_0\sin 2\eta(1 - e^{-2\xi_0}\,\mathrm{ch}\,2\xi), \\
& && hB_\eta^- = I_0\,\mathrm{sh}\,2\xi(1 - e^{-2\xi_0}\cos 2\eta).
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

从(39)式我們可以求出在导綫表面上的磁感強度，当 $\xi = \xi_0$:

$$\left.\begin{aligned}
hB_\xi &= I_0 e^{-2\xi_0}\,\mathrm{sh}\,2\xi_0\sin 2\eta, \\
hB\eta &= I_0\,\mathrm{sh}\,2\xi_0(1 - e^{-2\xi_0}\cos 2\eta).
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

利用(13)式給出的 ξ_0 値：

$$c(\mathrm{ch}\,\xi_0 + \mathrm{sh}\,\xi_0) = ce^{\xi_0} = a + b,$$

$$e^{-2\xi_0} = \frac{c^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2} = \frac{a-b}{a+b}$$

及

$$c^2\,\mathrm{sh}\,\xi_0\,\mathrm{ch}\,\xi_0 = \frac{c^2}{2}\,\mathrm{sh}\,2\xi_0 = ab,$$

$$\mathrm{sh}\,2\xi_0 = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

代入(40)式，

$$hB_\xi = 2I_0\frac{ab}{(a+b)^2}\sin 2\eta,$$

$$hB_\eta = 2I_0\frac{ab}{a^2 - b^2}\left(1 - \frac{a-b}{a+b}\cos 2\eta\right).$$

求出导綫表面磁感应強度为

$$h^2|B|^2 = h^2(B_\xi^2 + B_\eta^2) =$$

$$= \frac{4I_0^2}{(a+b)^2}\left\{\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}\sin^2 2\eta + \left(\frac{ab}{a-b}\right)^2\left[1 - 2\frac{a-b}{a+b}\cos 2\eta + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\cos^2 2\eta\right]\right\}.$$

經过化簡，可得

$$h^2|B|^2 = \frac{8I_0^2}{(a+b)^2}\frac{a^2b^2}{c^2}\left(\frac{2a^2}{c^2} - 2\cos^2\eta\right) = \frac{16I_0^2}{(a+b)^2}\frac{a^2b^2}{c^2}(\mathrm{ch}^2\,\xi_0 - \cos^2\eta),$$

即

$$|B| = \frac{4I_0}{a+b}\frac{ab}{c^2}.$$

代入 I_0 値，

$$|B| = \frac{4\mu_0 Jc^2}{4(a+b)}\frac{2b}{c^2} = \mu_0 J\frac{ab}{a+b} = \frac{\mu_0 I}{4\pi(a+b)}, \tag{41}$$

式中 I 为导綫截面总电流．由(41)式所得結果証明，椭圓截面导綫表面的磁場是均匀的，

这与文献[4]所得結果完全一致.

我們不仅可求得导綫表面的磁場,由(39)式,导綫內外各点的磁場都很容易求出. 这比文献[4]的解答完备.

2. 当导体內无电流 $J_z = 0$, 且磁場仅有 x 分量时,

$$B_{0y} = 0.$$

由(35)和(28)二式所定出的系数值如下:

$$\left.\begin{aligned} a_0' = a_1 = a_3 = a_3' = 0, \\ b_1 = b_1' = b_2 = b_2' = 0, \\ c_1 = \frac{B_{0x}c(\mu_1 - 1)\sin 2\xi_0 e^{\xi_0}}{2(\operatorname{ch}\xi_0 + \mu_1 \operatorname{sh}\xi_0)}, \\ c_1'' = \frac{\mu_r B_{0x} c e^{\xi_0}}{\operatorname{ch}\xi_0 + \mu_r \operatorname{sh}\xi_0}. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

导綫內外各点的矢量磁位及磁感強度为

$$\left.\begin{aligned} \xi > \xi_0 \quad & A_z^+ = B_{0x}c\left[\operatorname{sh}\xi + \frac{(\mu_r - 1)\sin 2\xi_0 e^{\xi_0}}{2(\operatorname{ch}\xi_0 + \mu_r \operatorname{sh}\xi_0)} e^{-\xi}\right]\sin\eta, \\ 0 < \xi < \xi_0 \quad & A_z^- = B_{0x}c\,\frac{\mu_r e^{\xi_0}}{\operatorname{ch}\xi_0 + \mu_r \operatorname{sh}\xi_0}\operatorname{sh}\xi\sin\eta, \\ \xi > \xi_0 \quad & hB_\xi^+ = B_{0x}c\left[\operatorname{sh}\xi + \frac{(\mu_r - 1)\sin 2\xi_0 e^{\xi_0}}{2(\operatorname{ch}\xi_0 + \mu_r \operatorname{sh}\xi_0)} e^{-\xi}\right]\cos\eta, \\ & hB_\eta^+ = B_{0x}c\left[\operatorname{ch}\xi - \frac{(\mu_r - 1)\sin 2\xi_0 e^{\xi_0}}{2(\operatorname{ch}\xi_0 + \mu_r \operatorname{sh}\xi_0)} e^{-\xi}\right]\sin\eta, \\ 0 < \xi < \xi_0 \quad & hB_\xi^- = \mu_r B_{0x}c\,\frac{e^{\xi_0}}{\operatorname{ch}\xi_0 + \mu_r \operatorname{sh}\xi_0}\operatorname{sh}\xi\cos\eta, \\ & hB_\eta^- = \mu_r B_{0x}c\,\frac{e^{\xi_0}}{\operatorname{ch}\xi_0 + \mu_r \operatorname{sh}\xi_0}\operatorname{ch}\xi\sin\eta. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

由(43)式求出导綫內各点的磁感強度. 因

$$h^2|B^-|^2 = \left(\mu_r B_{0x}c\,\frac{e^{\xi_0}}{\operatorname{ch}\xi_0 + \mu_r \operatorname{sh}\xi_0}\right)^2(\operatorname{sh}^2\xi\cos^2\eta + \operatorname{ch}^2\xi\sin^2\eta) =$$

$$= \left(\mu_r B_{0x}c\,\frac{e^{\xi_0}}{\operatorname{ch}\xi_0 + \mu_r \operatorname{sh}\xi_0}\right)^2(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta),$$

則

$$|B^-| = \mu_r B_{0x}\frac{e^{\xi_0}}{\operatorname{ch}\xi_0 + \mu_r \operatorname{sh}\xi_0}. \tag{44}$$

再用由(13)式給出的 ξ_0 值,

$$|B^-| = \frac{\mu_1 B_{0x}(a + b)}{a + \mu_r b} = B_{0x}\left(\frac{\mu_1 a + \mu_1 b}{\mu_0 a + \mu_0 b}\right). \tag{45}$$

故椭圓导綫內部为均匀磁場,卽椭圓导綫沿 x 方向均匀磁化,其磁化強度

$$M_x = \frac{B_x - B_{0x}}{\mu_0} = \frac{B_{0x}}{\mu_0}\left[\frac{(\mu_1 - \mu_0)a}{\mu_1 a + \mu_1 b}\right]. \tag{46}$$

3. 当导体內无电流, $I = 0$, $I_0 = 0$,且磁場仅有 x 分量时,

$$B_{0y} = 0.$$

同样可得导綫內各点的磁感強度

$$|B| = B_{0x} = \frac{\mu_r B_{0y} e^{\xi_0}}{\operatorname{sh}\xi_0 + \mu_r \operatorname{ch}\xi_0} = \frac{\mu_r B_{0x}(a+b)}{b + \mu_r a} = B_{0x}\left(\frac{\mu_1 a + \mu_1 b}{\mu_1 a + \mu_0 b}\right). \tag{47}$$

椭圓导綫沿 y 方向均匀磁化，其磁化強度

$$M_x = \frac{B_x - B_{0x}}{\mu_0} = \frac{B_{0x}}{\mu_0}\left[\frac{(\mu_1 - \mu_0)b}{\mu_1 a + \mu_0 b}\right]. \tag{48}$$

(44)的結果与文献[3]中的 4.42c 題的結果相同，故可作这一个經典問題的另一个解法.

参　考　文　献

[1] Stratton, J. A., Electromagnetic Theory (1941).
[2] Smythe, W. R., Static and Dynamic Electricity (1950).
[3] Durand, E., Électrostatique et Magnétostatique (1953).
[4] Кулаков, Ю. И., Магнитное поле на поверхности цилиндрического проводника с эллиптическим сечением, *ЖТФ*, **XXXIII**, № 2, (1963).
[5] Morse, P. M. and Feshback, H., Methods of Theoretical Physics (1953).

CURRENT CARRYING CONDUCTOR OF SOME CROSS-SECTIONAL FORM IN A UNIFORM MAGNECTIC FIELD

LIN WEI-GUAN　　CHUNG SHIONG-LEE

ABSTRACT

Recently the magnetic field on the surface of an elliptical cylinder carrying d. c. current has been found. In this paper, we solve the problem of a conductor of some cross-sectional form carrying d. c. current in a uniform magnetic field by changing the contour of the cross section of the conductor to a coordinate line obtained by conformal transformation from the rectangular coordinates.