第20卷 第7期 物理学报 Vol. 20, No. 7
1964年7月 ACTA PHYSICA SINICA July, 1964

强磁場下橫向輸运过程的微扰理論*

陈式剛

提要

本文利用文献[9]的理論，討論了强磁場下輸运过程中的几个問題．文章首先指出在朗道表示中的輸运过程要明显考虑边界条件問題．对横向电导，在正确处理边界条件后，不需要解玻耳兹曼型的輸运方程，并在任意級的微扰下，証明 Titeica 图象是正确的．其次討論了外电場 $\omega \neq 0$ 时的解，及其向經典过渡的問題，指出在同样的 $\omega_H\tau > 1$，$E_0\tau \gg 1$ 的条件下，量子解与經典解是不同的．最后，在附录中討論了态密度积分引起的发散消除問題．指出在实际情况下，除了 $-\ln(\varepsilon_c/kT)$ 項外，$\left(\frac{\varepsilon_c}{kT}\right)^0$ 項是同样重要的，它使量子极限下的 ρ_T/ρ_L 值得到与实驗相符的結果．

一、引言

强磁場下的輸运过程由于其簡单性与特殊性，引起了人們的兴趣．这里所謂强磁場是指电子在磁場中的迴旋頻率 $\omega_H = eH/mc$ 与弛豫时間 τ 之积 $\omega_H\tau > 1$ 或 $\gg 1$ 的情况．在 $\omega_H\tau \gg 1$ 的极限情况，垂直磁場方向的輸运过程是一种最簡单的典型的局域态輸运过程的例子．这些局域状态在空間有規則地排列，但又不产生象能带論中 Bloch 公有化現象．此外，在理論上只要用微扰方法就能得到与实驗可以比較的結果．

强磁場下横向輸运过程理論，經过 Titeica[1]，Лифшиц[2,3]，Argyres[4,5]，Adams 与 Holstein[6] 及 Kubo, Hasegawa 与 Hashitsume[7] 等的工作，在最低級微扰下已經有了清楚的了解．但是对理論的基础，則了解得很少，尤其有下面二个方面的問題，使人感到是很不清楚的：第一，我們不了解作为一种輸运过程，它具有什么特点．任何輸运过程都与趋向平衡現象联系在一起，对这类問題往往需要解輸运方程，对作用展开会得到发散的結果．上述作者完全沒有考虑这些問題，因而容易使人怀疑，現在的理論是否已經包含了所有最主要項的貢献，是否部分的高次項之和会給出低次項．第二，我們不了解量子理論与經典理論之間的关系．現有的量子理論是在經典展开式

$$\tau/1 + \omega_H^2\tau^2 = \frac{1}{\omega_H^2\tau}\left(1 - \frac{1}{\omega_H^2\tau^2} + \cdots\right) \tag{1}$$

启发之下，認为 $\omega_H\tau \gg 1$ 时，輸运系数可以对作用展开而得到的．如果这种类比是正确的話，是否将量子理論中微扰級数的主要項加起来，也能得到（1）的結果呢？当我們沒有很好理解第一个問題时，第二个問題也具有基本意义，它牵涉到量子理論是否正确的問題．若不是如此，則第二个問題也具有实际意义．为了搞清楚这二个問題，需要研究輸运系数对作用展开的整个微扰級数的結构及其发散的消除問題．

* 1963年6月29日收到．

Van Hove[8] 在研究趋向平衡現象时指出，以平面波描述单粒子的多体系統具有对角奇异性，其作用矩陣元之对角部分比非对角部分大N倍以上（N 为系統总粒子数）．在文献[9]中指出，朗道表示的多体系統，对电子–电子作用有 $N^{2/3}$ 以上的对角奇异性．同样可以看到，在朗道表示中，对电子–声子作用，电子部分有 N_p 以上的对角奇异性（N_p 为声子数），声子部分有 $N^{2/3}$ 以上对角奇异性．对电子–杂質作用，則具有 N_i 以上奇异性（N_i 为杂質总数）．对角奇异性引起微扰級数的发散，消除发散后就給出趋向平衡的結果．在文献[9]中，利用文献[8]的結果，討論了綫性輸运系数，并将它用到強磁場下的輸运过程中去．在最后得到的表示式中，給出了輸运系数的完全微扰展开，并已消除了发散．这表示式可分为可約部分及不可約部分．可約部分相当于通常玻耳兹曼方程的解，它直接与趋向平衡現象联系在一起．在本文中将利用这些結果来討論前面提出的二个問題．为簡单与确定起見，我們只討論电流磁效应．

为了使文章完整与易讀，在第二节中先簡述电子在磁場中的算符与本征函数及文献[9]中有关的結果．以后利用文献[9]与趋向平衡理論紧密联系这一优点，討論輸运系数的某些性質，其中大部分在文献[7]中已經得到，不过用本文方法可以更合理地証明它．

在第三节中討論稳定态的輸运过程，証明輸运系数可約部分有二个解，一个对应平衡态的解，一个对应非平衡态的解．选择滿足輸运过程边界条件的解，对任何作用，輸运系数可約部分恆等于零．于是我們証明了可以用微扰方法計算輸运系数，所得的任意級微扰表达式表明 Titeica 的横向电导的跳跃图象是正确的．在这节中还簡单地討論了霍耳效应展开式的意义．第四节討論外电場 $\omega \neq 0$ 时輸运过程．在共振区域，$\omega \approx \omega_H$，得到与經典一致的結果，不过弛豫时間的意义与經典的不同．在 $\omega = 0$ 时，只要朗道表示可以作为未微扰态，量子理論与經典的結果(1)不同．在討論中，我們将本文結果与另一种局域态輸运过程——杂質电导[10]作了比較．

第三节的討論消除了与趋向平衡联系在一起的微扰展开的发散，第四节消除了 $\omega \simeq \omega_H$ 时将綫寬作为零引起的发散．在強磁場中，将綫寬作为零还会引起态密度积分的发散[6]．对这問題的理解在文献中是清楚的，不过用本文的方法能認眞地处理它．我們将在最后一个附录中討論它．正确地消除这个发散，使横阻与纵阻之比得到与实驗一致的結果．

二、輸运系数的表示式及其基本性質

在強磁場下，輸运过程中的电子可以用朗道表示描述．設磁場沿 z 方向，选择規范使 $\mathbf{A} = (0, xH, 0)$，則电子的哈密頓算符为

$$H_e = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + (p_y + m\omega_H x)^2 + p_z^2\right], \tag{2}$$

在这規范中，电子的本征态为

$$\psi_{nk_yk_z} = (L_yL_z)^{-\frac{1}{2}}\,\phi_n\left(x + \frac{\hbar k_y}{m\omega_H}\right) e^{ik_yy}\, e^{ik_zz}. \tag{3}$$

L_y, L_z 为系統的边长，ϕ_n 为簡諧振子波函数．相应的能量本征值为

$$\epsilon_{nk_yk_z} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_H + \frac{\hbar^2k_z^2}{2m}. \tag{4}$$

引入相对坐标 $\mathbf{r}=(r_x, r_y)$ 与中心坐标 $\mathbf{R}=(R_x, R_y)$:

$$r_x=\frac{c}{eH}(p_y+m\omega_H x),\quad r_y=-\frac{c}{eH}p_x, \tag{5}$$

$$R_x=x-r_x,\qquad R_y=y-r_y. \tag{6}$$

它們滿足交換关系:

$$[r_x, r_y]=\frac{\hbar}{i}\frac{c}{eH},\quad [R_x, R_y]=-\frac{\hbar}{i}\frac{c}{eH}, \tag{7}$$

$$[r_x, R_x]=[r_x, R_y]=[r_y, R_x]=[r_y, R_y]=0, \tag{8}$$

$$[He, R_x]=[He, R_y]=0. \tag{9}$$

在(3)表示中，R_x 是对角化的. 由于 R_x 与 R_y 满足(7)之交換关系，它們不能同时对角化.

在外电場 $E(t)=E(\omega)e^{i\omega t}$ 中的电导张量为

$$\sigma_{\mu\nu}(\omega)=\int_0^\infty dt\, e^{-i\omega t}\int_0^\beta d\lambda\, \mathrm{Sp}[j_\nu(-i\hbar\lambda)j_\mu(t)\rho], \tag{10}$$

$\rho=e^{-\beta H}$(暂不考虑归一化問題). 假設

$$f_{\mu\nu}(\omega)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dt\, e^{-i\omega t}\int_0^\beta d\lambda\, \mathrm{Sp}[j_\nu(-i\hbar\lambda)j_\mu(t)p], \tag{11}$$

則(10)可以写成

$$\sigma_{\mu\nu}(\omega)=f_{\mu\nu}(\omega)+\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^\infty d\omega'\,\frac{pf_{\mu\nu}(\omega')}{\omega'-\omega}. \tag{12}$$

完成(11)中对 λ 与 t 的积分:

$$f_{\mu\nu}(\omega)=\frac{2\pi}{\omega}\sinh\frac{1}{2}\beta\omega\int_{-\infty}^\infty dE\,\mathrm{Sp}\left[j_\nu\delta\left(H-E-\frac{1}{2}\omega\right)\times\right.$$
$$\left.\times j_\mu\delta\left(H-E+\frac{1}{2}\omega\right)\right]e^{-\beta E}. \tag{13}$$

利用預解式算符 $R(z)=1/(H-z)$ 与系統的对角奇异性，可以将 $f_{\mu\nu}(\omega)$ 展开:

$$f_{\mu\nu}(\omega)=(2\pi\omega)^{-1}\sinh\frac{1}{2}\beta\omega\int_{c_1}dE\left\{\mathrm{Sp}\left[j_\nu R\left(E+\frac{1}{2}\omega+i\varepsilon\right)j_\mu R\left(E-\frac{1}{2}\omega-i\varepsilon\right)\right]_{Bd}+\right.$$
$$\left.+j_{\nu-+}(E,-\omega)X_{+-}(E,\omega)j_{\mu+-}(E,\omega)\right\}e^{-\beta E}+$$
$$+(2\pi\omega)^{-1}\sinh\frac{1}{2}\beta\omega\int_{c_2}dE\left\{\mathrm{Sp}\left[j_\nu R\left(E+\frac{1}{2}\omega-i\varepsilon\right)j_\mu R\left(E-\frac{1}{2}\omega+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+i\varepsilon\right)\right]_{Bd}+j_{\nu+-}(E,-\omega)X_{-+}(E,\omega)j_{\mu-+}(E,\omega)\right\}e^{-\beta E}, \tag{14}$$

其中 c_1 表沿 E 平面实軸与上半平面大圓构成的閉合路綫; c_2 为相应的下半平面閉合路綫. Bd 指标表示括号中除了 j 算符中的中間态可以任意外，只取其不可約对角部分. $R(z)$ 可按其对角部分展开:

$$R(z)=D(z)-D(z)[V-VD(z)V+\cdots]_{nd}D(z). \tag{15}$$

$X_{+-}(E,\omega)$ 表示:

$$X_{+-}(E,\omega)=[\omega-i(\Gamma_{+-}(E,\omega)-\widetilde{W}_{+-}(E,\omega))]^{-1}\left[D_+\left(E+\frac{1}{2}\omega\right)-\right.$$
$$\left.-D_-\left(E-\frac{1}{2}\omega\right)\right] \tag{16}$$

是以态 α, α' 为指标的矩陣元构成的矩陣,其中 $\widetilde{W}$ 与 Γ 的矩陣元为

$$\widetilde{W}_{+-\alpha\alpha'}(E,\omega)=\frac{\delta}{\delta A(\alpha')}\left\langle\alpha\left|i^{-1}\left[D_+\left(E+\frac{1}{2}\omega\right)-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-D_-\left(E-\frac{1}{2}\omega\right)\right]\left[T_+\left(E+\frac{1}{2}\omega\right)AT_-\left(E-\frac{1}{2}\omega\right)\right]_{id}\right|\alpha\right\rangle, \tag{17}$$

$$\Gamma_{+-\alpha\alpha'}(E,\omega)=\delta(\alpha-\alpha')\int d\alpha''\widetilde{W}_{+-\alpha''\alpha}(E,\omega), \tag{18}$$

(17)中 A 为表示(3)之对角算符. $j_{+-}(E,\omega)$ 表示:

$$j_{+-\alpha}(E,\omega)=\left\langle\alpha\left|\left[\Omega_+^{+}\left(E+\frac{1}{2}\omega\right)j\Omega_-\left(E-\frac{1}{2}\omega\right)\right]_{Bd}\right|\alpha\right\rangle. \tag{19}$$

T 与 Ω 即通常的反应矩陣与波矩陣:

$$T(z)=V-VD(z)V+\cdots, \tag{20}$$
$$\Omega(z)=1-D(z)V+D(z)VD(z)V-\cdots, \tag{21}$$
$$\Omega^+(z)=1-VD(z)+VD(z)VD(z)-\cdots. \tag{22}$$

展开式(14)的可約部分 $j_{-+}X_{+-}j_{+-}$ 与 $j_{+-}X_{-+}j_{-+}$ 对应通常玻耳茲曼方程的解,在这里也必須求解輸运方程才能得到实际的結果. 由(16)看到,当 $\Gamma_{+-}\gtrsim\omega$ 时,輸运系数不能对作用展开. 在(14)中已将这种由对角奇异引起的对作用展开的发散部分消除掉了. 只将每个不可約部分在其所处的位置上展开,不会再有发散困难.

在稳定态时, $\omega=0$,(12)往往可以簡化. 将 $\sigma_{\mu\nu}$ 中 j_ν, j_μ 代以 $\dot{A}$, $\dot{B}$,并記为 σ_{BA}. 假設 $\mathrm{Sp}\{[\rho,A]B\}$ 存在,則 σ_{BA} 对应之(12)的第二項可以化成

$$\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\frac{P}{\omega'}\frac{2\pi}{\omega'}\sinh\frac{1}{2}\beta\omega'\int_{-\infty}^{\infty}dE\ \mathrm{Sp}\left[[H,A]\delta\left(H-E-\frac{1}{2}\omega'\right)\times\right.$$
$$\left.\times[B,H]\delta\left(H-E+\frac{1}{2}\omega'\right)\right]e^{-\beta E}=i\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\int_{-\infty}^{\infty}dE\ \mathrm{Sp}\left[A\delta\left(H-E-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\omega'\right)B\delta\left(H-E+\frac{1}{2}\omega'\right)\right](e^{-\beta(E-\frac{1}{2}\omega')}-e^{-\beta(E+\frac{1}{2}\omega')})=$$
$$=i\mathrm{Sp}\{[\rho,A]B\}=i\mathrm{Sp}\rho[A,B], \tag{23}$$

故
$$\sigma_{BA}=i\mathrm{Sp}\,\rho[A,B]+f_{BA}. \tag{24}$$

如利用

$$\mathbf{j}=e(\dot{\mathbf{r}}+\dot{\mathbf{R}}), \tag{25}$$

将电导 σ_{xx} 分为四部分:

$$\sigma_{xx}=\sigma_{r_xr_x}+\sigma_{r_xR_x}+\sigma_{R_xr_x}+\sigma_{R_xR_x}, \tag{26}$$

則由(12)与(24)得

$$\left.\begin{array}{c}\sigma_{r_xr_x}=f_{r_xr_x},\quad \sigma_{r_xR_x}=f_{r_xR_x},\\ \sigma_{R_xr_x}=f_{R_xr_x}.\end{array}\right\} \tag{27}$$

对 $\sigma_{R_xR_x}$ 由于 $\mathrm{Sp}\{[\rho,R_x]R_x\}$ 是不定式,不能应用(24). 但是容易看到, $f_{R_xR_x}(\omega')$ 是 ω' 的偶函数, $\sigma_{R_xR_x}$ 对应的(12)之第二項为零,所以

$$\sigma_{R_xR_x}=f_{R_xR_x}. \tag{28}$$

对霍耳效应 σ_{xy} 可相似地討論.

在文献[7]中，利用各态历經假設証明了稳定态輸运系数的一些性质，这些性质对实际計算有指导性的意义。但是各态历經是系統未被証明的性质，我們感到有必要用上述結果重新加以討論。由于本文的理論直接与趋向平衡理論联系在一起，而后者是建立在多体系統的熟知性质之上的，因此将給出更合理的証明。

对横向輸运过程，可以証明：

$$\sigma_{r_x r_x} = \sigma_{r_x R_x} = \sigma_{R_x r_x} = 0. \tag{29}$$

現在只以 $\sigma_{r_x r_x}$ 为例加以証明。由(27)与(13)得

$$\sigma_{r_x r_x} = \pi\beta e^2 \int_{-\infty}^{\infty} dE\ \mathrm{Sp}[\dot{r}_x \delta(H-E)\dot{r}_x\delta(H-E)]e^{-\beta E}. \tag{30}$$

将其中 Sp 部分取作下面的极限：

$$\lim_{\omega\to 0} i\omega\,\mathrm{Sp}\left[\dot{r}_x\delta\left(H-E-\frac{\omega}{2}\right)r_x\delta\left(H-E+\frac{\omega}{2}\right)\right],$$

对它作相似(14)之展开。由文献[8]知道，其不可約部分在 $\omega=0$ 沒有极点，所以 $\omega\to 0$ 时为零，于是：

$$\sigma_{r_x r_x} = \frac{e^2\beta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dE \lim_{\omega\to 0} i\omega \dot{r}_{x-+}(E,-\omega)X_{+-}(E,\omega)r_{x+-}(E,\omega)e^{-\beta E}. \tag{31}$$

$\dot{r}_{x-+}(E,-\omega)$ 与 $r_{x+-}(E,\omega)$ 在 $\omega=0$ 处沒有极点；$X_{+-}(E,\omega)$ 則有一阶极点：

$$\lim_{\omega\to 0}\pi^{-1} i\omega X_{+-\alpha\alpha'}(E,\omega) = \left[\int \Delta_E(\alpha'')d\alpha''\right]^{-1}\Delta_E(\alpha)\Delta_E(\alpha'), \tag{32}$$

其中

$$\Delta_E(\alpha) = (2\pi i)^{-1}[D_{+\alpha}(E) - D_{-\alpha}(E)]. \tag{33}$$

利用文献[11]中的公式

$$\mathrm{Sp}[r\delta(H-E)] = \sum_\alpha r_{+-}(E)\Delta_E(\alpha) = \sum_\alpha r_{-+}(E)\Delta_E(\alpha), \tag{34}$$

得

$$\sigma_{r_x r_x} = \frac{1}{2}e^2\beta\int_{-\infty}^{\infty} dE\ \mathrm{Sp}[\dot{r}_x\delta(H-E)]\mathrm{Sp}[r_x\delta(H-E)]e^{-\beta E}. \tag{35}$$

它将(30)分解为 $\dot{r}_x$, r_x 的微正則系綜平均之积的积分。因为

$$\mathrm{Sp}[\dot{r}_x\delta(H-E)] = 0, \quad \mathrm{Sp}[r_x\delta(H-E)] < \infty,$$

所以

$$\sigma_{r_x r_x} = 0. \tag{36}$$

对 $\sigma_{R_x r_x}$ 与 $\sigma_{R_x r_x}$ 在上述相似討論中保留对 R_x 的微商 $\dot{R}_x$，可同样地証明(29)中另二等式。横向电导归結于中心运动：

$$\sigma_{xx} = f_{R_x R_x}. \tag{37}$$

对霍耳效应可作相似的討論，結果是

$$\sigma_{r_x r_y} = nec/H, \tag{38}$$

$$\sigma_{r_x R_y} = \sigma_{R_x r_y} = 0, \tag{39}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{nec}{H} + \sigma_{R_x R_y}. \tag{40}$$

三、稳定态輸运过程与边界条件

稳定輸运过程，特别是横向电导(37)比較簡单，我們由它开始研究引言中提出的第一个問題. 利用(14)将(37)展开，注意到 $f_{R_xR_x}$ 对二个足标是对称的，(14) 中二个积分可以合并为一，并取实部：

$$\sigma_{xx}=\frac{e^2\beta}{2\pi}\mathrm{Re}\int_c dE\,\{\mathrm{Sp}[\dot{R}_xR(E+i\varepsilon)\dot{R}_xR(E-i\varepsilon)]_{Bd}+ + \dot{R}_{x-+}(E)X_{+-}(E)\dot{R}_{x+-}(E)\}e^{-\beta E}, \tag{41}$$

c 可以是 c_1，也可以是 c_2.

(41)之不可約部分，可以用(15)作微扰展开計算. 它可以化成物理意义更清楚的形式. 在附录 I 中，我們将証明恆等式

$$\begin{aligned}&2\mathrm{Sp}\{[V,R_x]R(E+i\varepsilon)[R_x,V]R(E-i\varepsilon)\}_{Bd}=\\&=\mathrm{Sp}\{[R_x,V][R_x,R(E+i\varepsilon)]\}_{Bd}+\mathrm{Sp}\{[R_x,V][R_x,R(E-i\varepsilon)]\}_{Bd}-\\&-\mathrm{Sp}\{(D_+(E)-D_-(E))[R_x,T(E+i\varepsilon)](D_+(E)-\\&-D_-(E))[T(E-i\varepsilon),R_x]\}_{Bd}.\end{aligned} \tag{42}$$

假設(41)中 c 为 c_1，則将(42)代入时其右边第一項积分为零. 第二項积分后为純虚数，在 Re 符号下也为零. 結果只保留(42)第三項. 利用朗道表示(3)将它展开，得到(41)不可約部分为

$$\sigma_{xxBd}=\pi e^2\beta\int_{-\infty}^{\infty}dE\sum_{\alpha\alpha'}\Delta_E(\alpha)W_{+-}(E;\alpha,\alpha')\Delta_E(\alpha')(R_x(\alpha)-R_x(\alpha'))^2e^{-\beta E}. \tag{43}$$

在这里考虑到 Δ_E 的存在使沿大圓积分为零，因此将沿閉合迴路 c 的积分改为沿实軸由 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的积分.

(41)之可約部分对应一輸运方程的解. 引入函数

$$f_{+-}(E)=\frac{e\beta}{2\pi}X_{+-}(E)\dot{R}_{x+-}(E). \tag{44}$$

由(16)知道，它滿足輸运方程

$$[\Gamma_{+-}(E)-\widetilde{W}_{+-}(E)]f_{+-}(E)=-\Delta_Ee\beta\dot{R}_{x+-}(E). \tag{45}$$

相应于通常对外場綫性化了的玻耳兹曼方程. 为了得到有物理意义的解，对(45)及其边界条件問題須要仔細討論. 在經典玻耳兹曼方程中我們知道，它至少有二个不同的解，一个是平衡态的解，一个是輸运过程的解，到底取哪个解是由边界条件决定的. 輸运过程的边界条件要求系統的电荷在空間分布是均匀的. 在量子理論中，由于坐标与动量不能同时測定，选择用动量描述粒子时就不能再用坐标. 因此选用动量表示自动地滿足輸运过程边界条件的要求，这間題往往被人們忽略. 但在朗道表示中，电子可以在空間局域地存在，不能自动滿足电荷空間分布均匀性的要求. 这时必須明显地考虑边界条件間題. 为使結果显得更加清楚一些，下面先証明(45)有一平衡态的解.

在附录 II 中我們証明：

$$\dot{R}_{x+-}(E)=-\sum_{\alpha'}W_{+-}(E;\alpha\alpha')i(D_{+\alpha'}(E)-D_{-\alpha'}(E))(R_x(\alpha)-R_x(\alpha')), \tag{46}$$

所以(45)可以改写为

$$[\Gamma_{+-}(E)-\widetilde{W}_{+-}(E)]f_{+-}(E)=(\Gamma_{+-}(E)-\widetilde{W}_{+-}(E))e\beta\Delta_ER_x, \tag{47}$$

它显然有一解是

$$f_{+-}(E)=e\beta\Delta_E R_x. \tag{48}$$

利用 $\dot{R}_{x-+}$ 的与(46)相似的关系式，得

$$\dot{R}_{x-+}(E)f_{+-}(E)=-2\pi e\beta\sum_{\alpha\alpha'}\Delta_E(\alpha)W_{+-}(\alpha,\alpha')\Delta_E(\alpha')(R_x(\alpha)-R_x(\alpha'))R_x(\alpha). \tag{49}$$

σ_{xx} 即 (41) 对指标 $+-$ 是可以交换的，交换 (49) 中 $+-$ 指标，利用关系 $W_{+-}(\alpha,\alpha')=$ $=W_{-+}(\alpha'\alpha)$，得(41)之可約部分为

$$\sigma_{xxd}=-\pi e^2\beta\int_{-\infty}^{\infty}dE\sum_{\alpha\alpha'}\Delta_E(\alpha)W_{+-}(\alpha\alpha')\Delta_E(\alpha')(R_x(\alpha)-R_x(\alpha'))^2e^{-\beta E}=$$
$$=-\sigma_{xxBd}. \tag{50}$$

結果刚好与 σ_{xxBd} 抵消，由(48)之 $f_{+-}(E)$ 給出的电导率为 0：

$$\sigma_{xx}=0. \tag{51}$$

可見(48)是平衡态的解．从(48)給出的电荷在空間分布更可証明这一点．电荷算符 Q 在朗道表示中是对角化的，它对外場的响应只有可約部分：

$$\Delta Q=\int_{-\infty}^{\infty}dE\ Qf_{+-}(E)e^{-\beta E}=e\beta\,\mathrm{Sp}\,[QR_xe^{-\beta H}]. \tag{52}$$

这刚好是平衡态密度矩陣对外場展开至一次項給出的电荷分布．系統粒子的热运动趋向使这种空間分布变成均匀，它产生“扩散电流”．由电場激发的“直接电流”将阻止这种趋向．在平衡态时，直接电流与扩散电流刚好抵消．容易看到，σ_{xxBd} 是直接电流，其方向与电場相同；σ_{xxd} 是扩散电流，其方向与电場相反．这些正是經典平衡态中熟識的图象．

系統的輸运过程解要求沒有空間电荷堆积，其分布是均匀的．另一方面，綫性輸运系数理論基本思想表明輸运系数只与平衡态的涨落有关，輸运系数中出現的矩陣元将具有系統平衡态的所有对称性质．利用空間反演不变性可以求得 (45) 的輸运过程解．由(46)可見，空間反演不变，使得固定 α，有一使 $R_x(\alpha)-R_x(\alpha')$ 为正的 α' 态，則必定有一使 $R_x(\alpha)-R_x(\alpha')$ 为負的而絕对值不变的 α' 态，对这二个态 $W_{+-}(\alpha,\alpha')$ (D_+-D_-) 具有相同的值，于是

$$\dot{R}_{x+-}(E)=0. \tag{53}$$

(45)变成

$$[\Gamma_{+-}(E)-\widetilde{W}_{+-}(E)]f_{+-}(E)=0, \tag{54}$$

其一显然解为

$$f_{+-}(E)=0,$$

由它給出的电荷空間分布是均匀的：

$$\Delta Q=0, \tag{55}$$

满足所需的边界条件．与(53)相似，$\dot{R}_{x-+}(E)=0$，所以 σ_{xx} 可約部分 σ_{xxd} 为零，而

$$\sigma_{xx}=\pi e^2\beta\int_{-\infty}^{\infty}dE\sum_{\alpha\alpha'}\Delta_E(\alpha)W_{+-}(E;\alpha\alpha')\Delta_E(\alpha')(R_x(\alpha)-R_x(\alpha'))^2e^{-\beta E}. \tag{56}$$

引入归一化的态密度：

$$\rho_E(\alpha')=\Delta_E(\alpha')e^{-\beta E}\Big/\int dE\sum_{\alpha'}\Delta_E(\alpha')e^{-\beta E}, \tag{57}$$

得到 σ_{xx} 的最后表示式:

$$\sigma_{xx} = e^2\beta \int_{-\infty}^{\infty} dE \sum_{\alpha\alpha'} \frac{1}{2} (R_x(\alpha) - R_x(\alpha'))^2 \widetilde{W}_E(\alpha, \alpha')\rho_E(\alpha'), \tag{58}$$

这是按 Titeica 图象展开的完全微扰表示式,它表明強磁場下电子是以中心跳跃运动参与横向电导的. 任意級的微扰只要将跃迁几率与态密度改成任意級的微扰展开就行.

这样,我們消除了趋向平衡引起的发散,証明对横向电导不需要解玻耳兹曼型輸运方程,不会出現部分高次項之和給出低次項現象. 与这里討論的情况不同,在杂质电导中沒有空間反演不变性, σ_{xx} 的可約部分不是零,它給出的"堵塞"效应[10]是不能被忽略的.

对霍耳效应,要討論 σ_{xy} 的反对称部分 σ^a_{xy}. 由(40),(12),(13)知,

$$\sigma^a_{xy} = \frac{nec}{H} + 2ie^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{p}{\omega^2} \sinh \frac{1}{2}\beta\omega \int_{-\infty}^{\infty} dE \times \\ \times \mathrm{Sp}\left[\dot{R}_x \delta\left(H - E - \frac{1}{2}\omega\right) \dot{R}_y \delta\left(H - E + \frac{1}{2}\omega\right)\right] e^{-\beta E}. \tag{58}$$

利用(14)展开后, σ^a_{xy} 各項的意义不再象 σ_{xx} 那样清楚. 不过由 σ_{xx} 討論中用到的原理,(58)可以进一步簡化. 交換(58)中 $\dot{R}_x$ 与 $\dot{R}_y$ 的位置,对其可約部分,代替(44)我們要討論

$$f_{+-}(E,\omega) = \frac{e\beta}{2\pi} X_{+-}(E,\omega)\dot{R}_{x+-}(E,\omega). \tag{59}$$

代替(46)的是

$$\dot{R}_{x+-}(E,\omega) = -\sum_{\alpha'} W_{+-}(E,\omega;\alpha,\alpha')i\left(D_{+\alpha'}\left(E + \frac{1}{2}\omega\right) - \\ - D_{-\alpha'}\left(E - \frac{1}{2}\omega\right)\right)(R_x(\alpha) - R_x(\alpha')). \tag{60}$$

关于对 $\dot{R}_{x+-}(E)$ 反演不变性的討論对 $\dot{R}_{x+-}(E,\omega)$ 同样成立,于是 $\dot{R}_{x+-}(E,\omega) = 0$,有

$$f_{+-}(E,\omega) = 0. \tag{61}$$

在(3)表示中 $\dot{R}_{y-+}(E,-\omega)$ 有限,所以(58)的可約部分是零:

$$\sigma^a_{xy} = \frac{nec}{H} + \frac{ie^2}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\rho}{\omega} \sinh \frac{1}{2}\beta\omega \left\{ \int_{c_1} dE\, \mathrm{Sp}\left[\dot{R}_x R\left(E + \frac{1}{2}\omega + i\varepsilon\right) \times \\ \times \dot{R}_y R\left(E - \frac{1}{2}\omega - i\varepsilon\right)\right]_{Bd} e^{-\beta E} + \int_{c_2} dE\, \mathrm{Sp}\left[\dot{R}_x R\left(E + \frac{1}{2}\omega - i\varepsilon\right) \times \\ \times \dot{R}_y R\left(E - \frac{1}{2}\omega + i\varepsilon\right)\right]_{Bd} e^{-\beta E}\right\}. \tag{62}$$

利用(15)展开后,只有 $R\left(E + \frac{1}{2}\omega \pm i\varepsilon\right)$ 与 $R\left(E - \frac{1}{2}\omega \mp i\varepsilon\right)$ 中总共偶数个 $D_\pm$ 取相应 Δ 的項才对 σ^a_{xy} 有貢献. (62)在一般情况下不能再簡化. 对它所表达的意义可作如下說明: $\frac{nec}{H}$ 为自由系統的霍耳效应;由于朗道表示中在电場下任一态的 $\dot{X} = cE/H$,所以散射作用不会引起霍耳效应的改变,(62)的第二项是由非散射的微扰引起状态变化給出的貢献. 与 σ_{xx} 同样,(62)中消除了 σ_{xy} 的趋向平衡引起的发散.

四、非稳定輸运过程及与經典的比較

引言中提出的第二个間題可以与外电場頻率 $\omega \neq 0$ 时的情况一起进行討論. 这时将

$\mathbf{j}$ 分成 $e\dot{\mathbf{r}}$ 与 $e\dot{\mathbf{R}}$ 二部分沒有方便之处，因为不只中心运动，而且相对运动也会参与输运过程．注意到通常的微扰作用，例如电声子散射与杂质散射都具有关系：

$$[V, x] = 0, \tag{63}$$

于是

$$\begin{aligned} \dot{x} &= i[H, x] = i[H_0, x] = i[H_0, r_x] \equiv \dot{r}_x^0, \\ \dot{y} &= i[H_0, r_y] \equiv \dot{r}_y^0. \end{aligned} \tag{64}$$

这可以使输运系数化成最簡单的形式，尤其对实际的低級微扰計算有利．$\dot{r}_x^0$ 与 $\dot{r}_y^0$ 在(3)之表示中的矩陣元为

$$\dot{r}_{xnm}^0 = i(\hbar\omega_H/2m)^{1/2}\left[-(n+1)^{1/2}\delta_{m,n+1} + n^{1/2}\delta_{m,n-1}\right]. \tag{65}$$

$$\dot{r}_{ynm}^0 = -\frac{mc}{eH} i[H_0, \dot{r}_x^0]_{nm} = (\hbar\omega_H/2m)^{1/2}\left[(n+1)^{1/2}\delta_{m,n+1} + n^{1/2}\delta_{m,n-1}\right]. \tag{66}$$

在下面，我們将 $\dot{r}^0$ 看作所有电子的 $\dot{r}^0$ 之和，只在单电子近似时将它看成单电子算符．

首先須要証明用 $\dot{r}^0$ 展开之輸运系数的可約部分是零，因此在实际計算中可不必考虑．与上节討論 $\dot{R}_{+-}(E)$ 同样的理由，要求 $\dot{r}_{+-}^0(E, \omega)$ 是空間反演不变的．在空間反演变换下，磁場与 ω 不变，朗道表示中的态 n, k_y, k_z 变成 n, $-k_y$, $-k_z$．但是 B 不可約对角部分 $\dot{r}_{+-}^0(E, \omega)$ 与 α 的 k_y, k_z 之正負号无关，并且中間态包含对 k_y, k_z 的求和．所以在空間反演下，$\dot{r}_{+-}^0(E, \omega)$ 只改变符号，于是

$$\dot{r}_{+-}^0(E, \omega) = 0, \tag{67}$$

輸运系数的可約部分等于零．(14)簡化为

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu}(\omega) = \frac{e^2}{2\pi\omega}\sinh\frac{1}{2}\beta\omega\Bigg\{&\int_{c_1} dE\, \mathrm{Sp}\left[\dot{r}_\nu^0 R_+\left(E+\frac{1}{2}\omega\right)\dot{r}_\mu^0 R_-\left(E-\frac{1}{2}\omega\right)\right]_{Bd} e^{-\beta E} + \\ &+\int_{c_2} dE\, \mathrm{Sp}\left[\dot{r}_\nu^0 R_-\left(E+\frac{1}{2}\omega\right)\dot{r}_\mu^0 R_+\left(E-\frac{1}{2}\omega\right)\right]_{Bd} e^{-\beta E}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{68}$$

利用关系

$$R(z) = D(z) - D(z)T(z)D(z),$$

将(68)中 Sp 部分展开，c_1 积分部分为

$$\begin{aligned} &\mathrm{Sp}\left[\dot{r}_\nu^0 D_+\left(E+\frac{1}{2}\omega\right)\dot{r}_\mu^0 D_-\left(E-\frac{1}{2}\omega\right)\right]_{Bd} - \\ &-\mathrm{Sp}\left[\dot{r}_\nu^0 D_+\left(E+\frac{1}{2}\omega\right)\dot{r}_\mu^0 D_-\left(E-\frac{1}{2}\omega\right)T_-\left(E-\frac{1}{2}\omega\right)D_-\left(E-\frac{1}{2}\omega\right)\right]_{Bd} - \\ &-\mathrm{Sp}\left[\dot{r}_\nu^0 D_+\left(E+\frac{1}{2}\omega\right)T_+\left(E+\frac{1}{2}\omega\right)D_+\left(E+\frac{1}{2}\omega\right)\dot{r}_\mu^0 D_-\left(E-\frac{1}{2}\omega\right)\right]_{Bd} + \\ &+\mathrm{Sp}\left[\dot{r}_\nu^0 D_+\left(E+\frac{1}{2}\omega\right)T_+\left(E+\frac{1}{2}\omega\right)D_+\left(E+\frac{1}{2}\omega\right)\dot{r}_\mu^0 \times\right. \\ &\qquad\left.\times D_-\left(E-\frac{1}{2}\omega\right)T_-\left(E-\frac{1}{2}\omega\right)D_-\left(E-\frac{1}{2}\omega\right)\right]_{Bd}. \end{aligned} \tag{69}$$

其在 E 平面上的解析性質如图1所示，二个黑点表示 $\dot{r}_0$ 二边的 D 之极点的相对位置．按普通微扰論的观点，$V_{\alpha\alpha'}$ 能联系能量差較大的态 $\alpha\alpha'$，由它的微扰給出割綫上的跳跃是平滑的．若割綫上譜密度不趋向零的綫段长度 E_0（經典情况 $E_0 \sim kT$），比相对极点的距离 $\omega_H \pm \omega$ 大得多，則在(68)的积分中可以只考虑相对极点的貢献，忽略割綫的貢献．

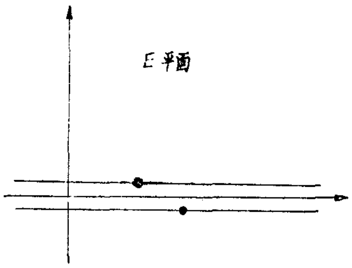

图 1

Adams 与 Holstein[6] 将問題按磁場強度分成三个区域：第一，經典区域，这时 $\hbar\omega_H \ll kT$，$kT \sim E_0$；第二，振蕩区域 $kT \ll \hbar\omega_H$，$E_0 > \hbar\omega_H$；第三是量子极限区域，$\hbar\omega_H > E_0$，若 $\hbar\omega_H \gg E_0$ 称为极端量子极限区域．由上面討論知道，在經典区域与振蕩区域里，$E_0 \gg \hbar\omega_H$，因此只要 $\omega_H\tau > 1$，取相对极点給出的貢献就是足够好的近似．$\omega_H\tau > 1$ 的条件使朗道表示可以作为被微扰态，而除了相对极点外，其他項的貢献是 $(E_0\tau)^{-1}$ 級的．在量子极限与接近量子极限区域，必需要求 $\omega_H\tau \gg 1$ 与 $E_0\tau \gg 1$ 同时成立，这时 (69) 的最低次項給出正确的貢献．(69) 的后三項只在 ω 远离 ω_H 或 $\omega = 0$ 时是重要的，在附录 III 中将証明 $\omega = 0$ 时它們的最低次項与第一項一起給出与 (58) 最低次項相同的結果．此外我們感到兴趣的是共振区域，在共振区域只需要計算 (69) 的第一項，它的貢献是作用常数的負二次幂，其他項起碼是零次幂．

下面采用单电子近似．为了使以后容易完成对 E 与 ω 的积分，将 (68) 写作

$$f_{\mu\nu}(\omega) = \frac{\pi}{\omega}\int_{-\infty}^{\infty} dE \left\langle \left[j_\nu\delta\left(H - E - \frac{1}{2}\omega\right),\ j_\mu\delta\left(H - E + \frac{1}{2}\omega\right)\right]\right\rangle. \tag{70}$$

用統計微扰論方法[12]作如 (69) 的展开，容易得到共振区域的横向电导之 f^0_{xx} 为

$$\begin{aligned} f^0_{xx}(\omega) = \frac{e^2}{2m}\frac{\omega_H}{\omega}\sum_\alpha \Bigg[&\frac{(n_\alpha+1)\Gamma_{\alpha,\alpha+1}(\omega)}{(\omega_H-\omega)^2+\Gamma^2_{\alpha,\alpha+1}(\omega)} + \\ &+ \frac{n_\alpha\Gamma_{\alpha,\alpha-1}(\omega)}{(\omega_H+\omega)^2+\Gamma^2_{\alpha,\alpha-1}(\omega)} - \frac{(n_\alpha+1)\Gamma_{\alpha,\alpha+1}(-\omega)}{(\omega_H+\omega)^2+\Gamma^2_{\alpha,\alpha+1}(-\omega)} - \\ &- \frac{n_\alpha\Gamma_{\alpha,\alpha-1}(-\omega)}{(\omega_H-\omega)^2+\Gamma^2_{\alpha,\alpha-1}(-\omega)}\Bigg] f(\varepsilon_\alpha), \end{aligned} \tag{71}$$

其中 $\alpha \pm 1$ 表示与 α 态的电子能級差一个朗道能級的状态，$\Gamma_{\alpha,\alpha'}$ 为

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha,\alpha'} &= \pi\langle\alpha|V\delta(H_0-\varepsilon_\alpha)(1-f(H_0))V|\alpha\rangle + \\ &\quad + \pi\langle\alpha'|V\delta(H_0-\varepsilon_\alpha+\omega)(1-f(H_0))V|\alpha'\rangle \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} &= \pi\langle\alpha|V\delta(H_0-\varepsilon_{\alpha'}-\omega)(1-f(H_0))V|\alpha\rangle + \\ &\quad + \pi\langle\alpha'|V\delta(H_0-\varepsilon_{\alpha'})(1-f(H_0))V|\alpha'\rangle. \end{aligned} \tag{72}$$

由于 (70) 中的积分可以在上半平面或下半平面閉合，$\Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega)$ 与 $\Gamma_{\alpha'\alpha}(-\omega)$ 可以互换．在 (71) 中作这种代換，并将 α 指标作适当变化后，得

$$\begin{aligned} f^0_{xx}(\omega) = \frac{e^2}{2m}\frac{\omega_H}{\omega}\sum_\alpha \Bigg[&\frac{((n_\alpha+1)f(\varepsilon_\alpha) - n_{\alpha+1}f(\varepsilon_{\alpha+1}))\Gamma_{\alpha,\alpha+1}(\omega)}{(\omega_H-\omega)^2+\Gamma^2_{\alpha,\alpha+1}(\omega)} + \\ &+ \frac{(n_\alpha f(\varepsilon_\alpha) - (n_{\alpha-1}+1)f(\varepsilon_{\alpha-1}))\Gamma_{\alpha,\alpha-1}(\omega)}{(\omega_H+\omega)^2+\Gamma^2_{\alpha,\alpha-1}(\omega)}\Bigg]. \end{aligned} \tag{73}$$

横向电导的整个表达式为

$$\begin{aligned} \sigma^0_{xx}(\omega) &= \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega'-\omega+i\varepsilon} f^0_{xx}(\omega')d\omega' = \\ &= \frac{e^2}{2m}\sum_\alpha \left[\frac{\Gamma_{\alpha,\alpha+1}(\omega)}{\omega_H-\omega+i\Gamma_{\alpha,\alpha+1}(\omega)}((n_\alpha+1)f(\varepsilon_\alpha) - n_{\alpha+1}f(\varepsilon_{\alpha+1})) + \right. \end{aligned}$$

$$+\frac{-i\Gamma_{\alpha,\alpha-1}(\omega)}{-\omega_H-\omega+i\Gamma_{\alpha,\alpha-1}(\omega)}\left(n_\alpha f(\varepsilon_\alpha)-(n_{\alpha-1}+1)f(\varepsilon_{\alpha-1})\right)\Big]. \tag{74}$$

若認为 $\Gamma_{\alpha,\alpha\pm1}$ 与 α 及 $\alpha\pm1$ 无关，設 $\tau=1/\Gamma$，則

$$\sigma^0_{xx}(\omega)=\frac{ne^2}{m}\frac{\tau}{2}\left\{\frac{1}{1+i(\omega-\omega_H)\tau}+\frac{1}{1+i(\omega+\omega_H)\tau}\right\}. \tag{75}$$

这里我們将 $f(\varepsilon_\alpha)$ 归一化为粒子密度：

$$\sum_\alpha f(\varepsilon_\alpha)=n.$$

对于 $f^0_{xy}(\omega)$ 与 $\sigma^0_{xy}(\omega)$ 可同样地得到如下結果：

$$f^{0\,\text{s}}_{xy}(\omega)=\frac{e^2}{2m}\frac{\omega_H}{\omega}\sum_\alpha\left[\frac{(n_\alpha+1)(\omega_H-\omega)}{(\omega_H-\omega)^2+\Gamma^2_{\alpha,\alpha+1}(\omega)}+\frac{n_\alpha(\omega_H+\omega)}{(\omega_H+\omega)^2+\Gamma^2_{\alpha,\alpha-1}(\omega)}-\right.$$

$$\left.-\frac{(n_\alpha+1)(\omega_H+\omega)}{(\omega_H+\omega)^2+\Gamma_{\alpha,\alpha+1}(-\omega)}-\frac{n_\alpha(\omega_H-\omega)}{(\omega_H-\omega)^2+\Gamma^2_{\alpha,\alpha-1}(-\omega)}\right]f(\varepsilon_\alpha), \tag{76}$$

$$\sigma^0_{xy}(\omega)=\frac{e^2}{2m}\sum_\alpha\left[\frac{1}{\omega_H-\omega+i\Gamma_{\alpha,\alpha+1}(\omega)}\left(n_{\alpha+1}f(\varepsilon_{\alpha+1})-(n_\alpha+1)f(\varepsilon_\alpha)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{-\omega_H-\omega+i\Gamma_{\alpha,\alpha-1}(\omega)}\left(n_\alpha f(\varepsilon_\alpha)-(n_{\alpha-1}+1)f(\varepsilon_{\alpha-1})\right)\right]. \tag{77}$$

当 $\Gamma_{\alpha,\alpha\pm1}$ 和 α 及 $\alpha\pm1$ 无关时，

$$\sigma^0_{xy}(\omega)=-\frac{ne^2}{m}\frac{\tau}{2i}\left\{\frac{1}{1+i(\omega-\omega_H)\tau}-\frac{1}{1+i(\omega+\omega_H)\tau}\right\}. \tag{78}$$

对于縱向电导，結果将与 Argyres 的一致，沒有特别問題需要討論，所以从略.

(75)与(78)在形式上完全与經典結果一致. 按上面討論，它們加以 (69) 后三項的貢献，在經典強場下只要 $\omega_H\tau>1$，将給出足够好的近似. 因此本文結果将与經典理論有二方面的不同：(75)与(78)中的 τ 是 α 与 $\alpha\pm1$ 态綫寬的平均值，而不是玻耳兹曼方程給出的沒有磁場时的輸运过程的弛豫时間；在任意頻率下，(75)与(78)还有附加項，这些項在 $\omega=0$ 时不能被忽略，它們也不能被看作是輸运过程弛豫时間变为綫寬所作的某种近似的結果所多出来的項. 我們已經証明，在強磁場中，对横向电导与霍耳效应不存在通常玻耳兹曼方程的解的問題，并且对作用展到二次在 $E_0\tau\gg1$ 时是适用的. 因此，經典与量子理論的差别不能被看作是近似程度的不同，而是在于一开始就用了朗道表示，它使得量子理論不能直接过渡到經典的. 本文結果与量子理論中的共振吸收图象一致.

在振蕩区域，为了能观察到振蕩效应，必須要求 $\omega_H\tau\gg1$. 在量子极限情况，$\hbar\omega_H>>E_0$，所以也必須 $\omega_H\tau\gg1$. 在这二种情况下，ω 不在共振区域时，(75)，(78)的貢献只有按 $1/\omega_H\tau$ 展开的最低次項貢献是重要的.

在工作过程中，經霍裕平与于渌同志討論与指正，謹在此表示深切的謝意.

附录 I. 証明(42)式

試計算下面的和：

$$\mathrm{Sp}\{(D_+(E)-D_-(E))[R_x,T_+(E)](D_+(E)-D_-(E))\times[T_-(E),R_x]\}+$$

$$+2\mathrm{Sp}\{[R_x,V]R_+(E)[V,R_x]R_-(E)\}. \tag{A.1}$$

由第一項展开,得到下列項:

$$\mathrm{Sp}[D_+R_xT_+D_+T_-R_x] + \mathrm{Sp}[D_+T_+R_xD_+R_xT_-] -$$

$$- \mathrm{Sp}[D_+R_xT_+D_+R_xT_-] - \mathrm{Sp}[D_+T_+R_xD_+T_-R_x] \tag{A.2}$$

$$+ \text{同样的将 } D_+ \text{ 改作 } D_- \text{ 的四項} \tag{A.3}$$

$$+ \mathrm{Sp}[D_+R_xT_+D_-R_xT_-] + \mathrm{Sp}[D_+T_+R_xD_-T_-R_x] \tag{A.4}$$

$$- \mathrm{Sp}[D_+R_xT_+D_-T_-R_x] - \mathrm{Sp}[D_+T_+R_xD_-R_xT_-] \tag{A.5}$$

$$+ \mathrm{Sp}[D_-R_xT_+D_+R_xT_-] + \mathrm{Sp}[D_-T_+R_xD_+T_-R_x] \tag{A.6}$$

$$- \mathrm{Sp}[D_-R_xT_+D_+T_-R_x] - \mathrm{Sp}[D_-T_+R_xD_+R_xT_-] \tag{A.7}$$

由后一項展开,得到

$$+ 2\mathrm{Sp}[R_xVR_+VR_xR_-] + 2\mathrm{Sp}[VR_xR_+R_xVR_-] \tag{A.8}$$

$$- 2\mathrm{Sp}[D_+R_xT_+D_-R_xT_-] - 2\mathrm{Sp}[D_-R_xT_+D_+R_xT_-], \tag{A.9}$$

其中(A.4),(A.6)与(A.9)相互抵消. (A.2)中四項可合并写为

$$\mathrm{Sp}[[R_x,D_+T_+D_+][T_-,R_x]] = -\mathrm{Sp}[[R_x,R_+][T_-,R_x]], \tag{A.10}$$

(A.3)四項合并写为

$$\mathrm{Sp}[[R_x, D_-T_+D_-][T_-, R_x]] = \mathrm{Sp}[[R_x, T_+] \times$$

$$\times [D_-T_-D_-, R_x]] = -\mathrm{Sp}[[R_x, T_+][R_-, R_x]], \tag{A.11}$$

(A.5),(A.7),(A.8)合并为

$$\mathrm{Sp}[[R_x, VR_+V][R_x, R_-]] + \mathrm{Sp}[[R_x, VR_-V][R_x, R_+]], \tag{A.12}$$

总的貢献是 (A.10), (A.11), (A.12) 之和:

$$(\mathrm{A}.1) = \mathrm{Sp}[[R_x, R_+][R_x, T_-]] + \mathrm{Sp}[[R_x, T_+][R_x, R_-]] +$$

$$+ \mathrm{Sp}[[R_x, R_+][R_x, V - T_-]] + \mathrm{Sp}[[R_x, V - T_+][R_x, R_-]]$$

$$= \mathrm{Sp}[[R_x, R_+][R_x, V]] + \mathrm{Sp}[[R_x, R_-][R_x, V]], \tag{A.13}$$

这是一恆等式,在二边都取 B 不可約对角部分,即得到(42)式.

附录 II. 証明(46)式

$$\dot{R}_{x+-}(E) = i\{(1 - VD_+ + VD_+VD_+ - \cdots)[V,R_x](1 -$$

$$- D_-V + D_-VD_-V - \cdots)\}_{Bd} = i\{T_+R_x(1 - D_-T_-)\}_{id} -$$

$$- i\{(1 - T_+D_+)R_xT_-\}_{id} = -i\{T_+R_xD_-T_-\}_{id} +$$

$$+ i\{T_+R_xD_+T_-\}_{id} + i\{T_+R_x\}_{id} - i\{R_xT_-\}_{id} =$$

$$= \{T_+i(D_+ - D_-)R_xT_-\}_{id} + i\{R_x(T_+ - T_-)\}_{id}. \tag{A.14}$$

van Hove[8] 証明:

$$\{T_+ - T_-\}_{id} = -\sum_{\alpha'} W_{+-\alpha\alpha'}(D_+(\alpha') - D_-(\alpha')). \tag{A.15}$$

将(A.15)代入(A.14),得到

$$\dot{R}_{x+-}(E;\alpha) = \sum_{\alpha'} W_{+-}(E;\alpha\alpha')i(D_+(\alpha') - D_-(\alpha'))R_x(\alpha') -$$

$$- \sum_{\alpha'} W_{+-}(E;\alpha\alpha')i(D_+(\alpha') - D_-(\alpha'))R_x(\alpha) =$$

$$= -\sum_{\alpha'} W_{+-}(E;\alpha\alpha')i(D_+(\alpha')-D_-(\alpha'))(R_x(\alpha)-R_x(\alpha')). \quad (A.16)$$

这就是所要証明的結果.

附录 III. 証明(69)最低次項对 σ_{xx} 在 $\omega=0$ 时的貢献与(56)式相同

在 V^2 級近似下(69)成为

$$\mathrm{Sp}[\dot r_x^0 D_+(E)\dot r_x^0 D_-(E)] + \mathrm{Sp}\left[\dot r_x^0 \frac{1}{H_0-E-i\varepsilon}\dot r_x^0 \frac{1}{H_0-E+i\varepsilon}\times\right.$$
$$\left.\times V\frac{1}{H_0-E+i\varepsilon}V\frac{1}{H_0-E+i\varepsilon}\right]_{Bd}+$$
$$+\mathrm{Sp}\left[\dot r_x^0\frac{1}{H_0-E-i\varepsilon}V\frac{1}{H_0-E-i\varepsilon}V\frac{1}{H_0-E-i\varepsilon}\dot r_x^0\frac{1}{H_0-E+i\varepsilon}\right]_{Bd}+$$
$$+\mathrm{Sp}\left[\dot r_x^0\frac{1}{H_0-E-i\varepsilon}V\frac{1}{H_0-E-i\varepsilon}\dot r_x^0\frac{1}{H_0-E+i\varepsilon}V\frac{1}{H_0-E+i\varepsilon}\right]_{Bd}, \quad (A.17)$$

第一項的 D 展开至最低次，等价于不要第一項同时取消第二項与第三項的 Bd 符号. 第四項中算符是 $\dot r_x^0 V\dot r_x^0 V$ 形式排列的，因此取 Bd 符号的运算不重要. 完成 σ_{xx} 中对(A.17)的 E 的积分时，由于取实部的要求，必需有二个 $\dfrac{1}{H_0-E\pm i\varepsilon}$ 要取虛部. 显然它只能是如下的取法:

$$\pi^2\int dE\left\{\mathrm{Sp}\left[\dot r_x^0\delta(H_0-E)\dot r_x^0\frac{1}{H_0-E}V\delta(H_0-E)\frac{1}{H_0-E}\right]+\right.$$
$$+\mathrm{Sp}\left[\dot r_x^0\frac{1}{H_0-E}V\delta(H_0-E)V\frac{1}{H_0-E}\dot r_x^0\delta(H_0-E)\right]+$$
$$+\mathrm{Sp}\left[\dot r_x^0\delta(H_0-E)V\frac{1}{H_0-E}\dot r_x^0\delta(H_0-E)V\frac{1}{H_0-E}\right]+$$
$$\left.+\mathrm{Sp}\left[\dot r_x^0\frac{1}{H_0-E}V\delta(H_0-E)\dot r_x^0\frac{1}{H_0-E}V\delta(H_0-E)\right]\right\}. \quad (A.18)$$

在这里只要注意，在 $\dot r_x^0$ 二边的能量分母不能同时守恆，所以取一边的虛部就不能再取另一边的虛部. 用 $\dot r_x^0=i[H_0, r_x]$ 中的 H_0 可以消去其旁边的 $1/H_0-E$，(A.18)变成:

$$\pi^2\int dE\{\mathrm{Sp}[r_x\delta(H_0-E)r_xV\delta(H_0-E)V]+\mathrm{Sp}[r_xV\delta(H_0-E)Vr_x\delta(H_0-E)]-$$
$$-\mathrm{Sp}[r_x\delta(H_0-E)Vr_x\delta(H_0-E)V]-\mathrm{Sp}[r_xV\delta(H_0-E)r_xV\delta(H_0-E)]=$$
$$=\pi^2\int dE\,\mathrm{Sp}[[V, r_x]\delta(H_0-E)[r_x, V]\delta(H_0-E)]. \quad (A.19)$$

利用交換关系 $[x, V]=0$，就得

$$(A.19)=\pi^2\int dE\,\mathrm{Sp}[[V, R_x]\delta(H_0-E)[R_x, V]\delta(H_0-E)]. \quad (A.20)$$

它給出的結果与(56)最低次項相同.

附录 IV. 态密度积分发散的消去及 ρ_T/ρ_L 值的修正

本文中对电子态的求和 $\sum_\alpha$ 事实上表示下述积分与求和:

$$\sum_{\alpha} = \sum_{n,s} (2\pi)^{-2} L_y L_z \int dk_y \, dk_z, \tag{A.21}$$

s 表自旋. (A.21)可写为

$$\sum_{\alpha} = \frac{L_y L_z}{(2\pi)^2} \frac{(2m)^{3/2}}{2} \sum_{n,s} \int dk_y \int \left[\epsilon - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_H \right]^{-\frac{1}{2}} d\epsilon. \tag{A.22}$$

平方根在 $\epsilon = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_H$ 时是发散的,因此在下列类型求和:

$$\sum_{\alpha\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} dE D_+(E, \alpha) D_-(E, \alpha') \tag{A.23}$$

中的 D 函数不能用 δ 函数来代替,否則导致发散的結果.

Adams 与 Holstein[6] 討論了(A.23)中 D 代以 δ 函数时的发散及其消除問題,指出考虑声子的能量或綫寬能消除发散,其中重要的是綫寬效应,但是他們沒有認眞对待这个問題. 用本文得到的公式能自然地处理它. 下面以稳定横向电导为例进行討論.

在单电子近似下,(56)展至 W 的最低級可以写为

$$\sigma_{xx} = e^2 \sum_{\alpha\alpha'} \frac{1}{2} (R_x(\alpha) - R_x(\alpha'))^2 2\pi |V_{\alpha\alpha'}|^2 \beta f(\varepsilon_\alpha)(1 - f(\varepsilon_{\alpha'})) \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dE \Delta_E(\alpha) \Delta_E(\alpha'). \tag{A.24}$$

假設除了态密度以外,其他函数都是 ε_α, $\varepsilon_{\alpha'}$ 的平滑函数(这至少在半导体中可以成立),在这些函数中可令 $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha'}$, (A.24)成为

$$\sigma_{xx} = e^2 \sum_{\alpha\alpha'} \frac{1}{2} (R_x(\alpha) - R_x(\alpha'))^2 2\pi |V_{\alpha\alpha'}|^2 \Delta(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha'}) \frac{df}{d\zeta}, \tag{A.25}$$

ζ 为费米能量. 在(A.25)中,完成对 $\varepsilon_{\alpha'}$ 的积分:

$$\sigma_{xx} = \frac{2}{(2\pi)^4} m^3 e^2 \sum_{nn'} \int \frac{dk_y}{L_x} \frac{dk'_y}{L_x} \int_{(n+\frac{1}{2})\omega_H}^{\infty} \left[\varepsilon_\alpha - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_H \right]^{-\frac{1}{2}} d\varepsilon_\alpha \times$$
$$\times \frac{1}{2} (R_x(\alpha) - R_x(\alpha'))^2 2\pi |V_{\alpha\alpha'}|^2 E^{-\frac{1}{2}} \left(\varepsilon_\alpha - \left(n' + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_H \right) \frac{df(\varepsilon_\alpha)}{d\zeta}, \tag{A.26}$$

其中 $E^{-\frac{1}{2}}(x)$ 函数的定义是

$$E^{-\frac{1}{2}}(x) = \Gamma_{\alpha\alpha'} [2(x^2 + \Gamma_{\alpha\alpha'}^2)(\sqrt{x^2 + \Gamma_{\alpha\alpha'}^2} - x)]^{-\frac{1}{2}}. \tag{A.27}$$

它具有漸近性質:

$$E^{-\frac{1}{2}}(x) \approx x^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{当 } x \gg \Gamma_{\alpha\alpha'}.$$

在得到(A.25)时,我們曾認为 $\Gamma_{\alpha\alpha'}$ 是一小数,但是用(72)来計算 $\Gamma_{\alpha\alpha'}$,发現它在 ε_α(或 $\varepsilon_{\alpha'}$) 等于 $\left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_H$ $\left[或 \left(n' + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_H \right]$ 时是发散的, 因此得到不自洽的結果. 为了使結果自洽, 在計算 $\Gamma_{\alpha\alpha'}$ 时也必須考虑消除发散問題, 由此将导致一决定 $\Gamma_{\alpha\alpha'}$ 的积分方程:

$$\Gamma_{\alpha\alpha'} = \sum_{\alpha''} \left\{ |V_{\alpha\alpha''}|^2 \frac{\Gamma_{\alpha\alpha''}}{(\varepsilon_{\alpha''} - \varepsilon_\alpha)^2 + \Gamma_{\alpha\alpha''}^2} + |V_{\alpha'\alpha''}|^2 \frac{\Gamma_{\alpha'\alpha''}}{(\varepsilon_{\alpha''} - \varepsilon_{\alpha'})^2 + \Gamma_{\alpha'\alpha''}^2} \right\} \times$$
$$\times (1 - f(\varepsilon_\alpha)). \tag{A.28}$$

α, α' 与 α'' 态的能量近于相同. (A.28) 在一般情况下是不能解的, 若只为了对切断的数

量級作一估計，可以認为

$$\Gamma_{\alpha\alpha''} \approx \Gamma_{\alpha'\alpha''} \approx \Gamma_{\alpha\alpha'}. \tag{A.29}$$

作为一个例子，考虑量子极限情况，这时可以忽略(A.28)中对 n'' 的求和．完成对 $\varepsilon_{\alpha''}$ 的积分，利用(A.29)得到

$$[2(\varepsilon_\alpha^2+\Gamma_{\alpha\alpha'}^2)(\sqrt{\varepsilon_\alpha^2+\Gamma_{\alpha\alpha'}^2}-\varepsilon_\alpha)]^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_\alpha^{\frac{1}{2}}\Gamma_{\alpha\alpha'}^0. \tag{A.30}$$

$\Gamma_{\alpha\alpha'}^0$ 是将 D 代以 δ 得到的发散的綫寬，$\Gamma_{\alpha\alpha'}^0 \propto \varepsilon_\alpha^{-\frac{1}{2}}$（当 $\varepsilon_\alpha \to 0$ 时）．由(A.30)得到 $\Gamma_{\alpha\alpha'}$ 的漸近行为：

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_{\alpha\alpha'} \approx \Gamma_{\alpha\alpha'}^0 \qquad &&\text{当 } \varepsilon_\alpha \gg \Gamma_{\alpha\alpha'}^0 \text{ 时},\\ &\Gamma_{\alpha\alpha'} \approx \left(\frac{1}{2}\varepsilon_\alpha\Gamma_{\alpha\alpha'}^{02}\right)^{1/3} &&\text{当 } \varepsilon_\alpha \ll \Gamma_{\alpha\alpha'}^0 \text{ 时}.\end{aligned}\right\} \tag{A.31}$$

在消除发散后 $\Gamma_{\alpha\alpha'}$ 是 ε_α 的平滑函数，$\varepsilon_\alpha^{\frac{1}{2}}\Gamma_{\alpha\alpha'}^0$ 也是 ε_α 的平滑函数，于是可以由下式决定能量 ε_α^c：

$$\varepsilon_\alpha^c = 2^{-\frac{1}{2}}\Gamma_{\alpha\alpha'}^0(\varepsilon_\alpha^c). \tag{A.32}$$

近似地有：

$$\begin{aligned} &\Gamma_{\alpha\alpha'} \approx \Gamma_{\alpha\alpha'}^0 \qquad &&\text{当 } \varepsilon_\alpha > \varepsilon_\alpha^c \text{ 时},\\ &\Gamma_{\alpha\alpha'} \approx \varepsilon_\alpha^c &&\text{当 } \varepsilon_\alpha \leqslant \varepsilon_\alpha^c \text{ 时}.\end{aligned} \tag{A.33}$$

由(A.28)得到

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\alpha'} &= (2\pi)^{-2}\frac{1}{2}(2m)^{3/2}\int\frac{dk_y''}{L_x}(\pi|V_{\alpha\alpha''}|^2+\pi|V_{\alpha'\alpha''}|^2)\varepsilon_\alpha^{-\frac{1}{2}}(1-f(\varepsilon_\alpha))\\ &\qquad\qquad \text{当 } \varepsilon_\alpha > \varepsilon_\alpha^c \text{ 时},\\ \Gamma_{\alpha\alpha'} &= m(2\pi)^{-4/3}\left[\int\frac{dk_y''}{L_x}(\pi|V_{\alpha\alpha''}|^2+\pi|V_{\alpha'\alpha''}|^2)(1-f(\varepsilon_\alpha))\right]^{2/3}\\ &\qquad\qquad \text{当 } \varepsilon_\alpha \leqslant \varepsilon_\alpha^c \text{ 时}.\end{aligned}\right\} \tag{A.34}$$

为討論上述消除发散的实际效果，考虑 $E^{-\frac{1}{2}}(x)$ 函数的性質．图2給出了 $x^{-\frac{1}{2}}$ 与 $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma x)\Gamma^{\frac{1}{2}}$ 的比較．当 $x>1$ 时，可用 $x^{-\frac{1}{2}}$ 近似代替 $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma x)\Gamma^{\frac{1}{2}}$．当 $x<1$ 时，由于 $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma x)\Gamma^{\frac{1}{2}}$ 是 x 的平滑函数，可用 $x=0$ 的值代替它：

$$\Gamma^{\frac{1}{2}}E^{-\frac{1}{2}}(0) \approx 1/\sqrt{2}.$$

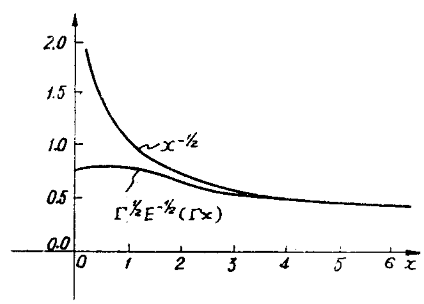

图 2

于是横向电导在量子极限下可以将对 ε_α 的积分分成二部分：

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} = 2(2\pi)^{-4}m^3e^2\int\frac{dk_y}{L_x}\frac{dk_y'}{L_x}\Bigg[\int_{\varepsilon^c}^{\infty}\frac{d\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha}\times\\ \times\frac{1}{2}(R_x(\alpha)-R_x(\alpha'))^2 2\pi|V_{\alpha\alpha'}|^2\frac{df(\varepsilon_\alpha)}{d\zeta}+\\ +\frac{1}{2}(R_x(\alpha)-R_x(\alpha'))^2 2\pi|V_{\alpha\alpha'}|^2\frac{df(0)}{d\zeta}\sqrt{2}\Bigg].\end{aligned} \tag{A.35}$$

其第一項即 Adams 与 Holstein 計算的对数发散項 $-\ln\frac{\varepsilon^c}{kT}$，相对这一項說，第二項是

$\left(\frac{\varepsilon^c}{kT}\right)^0$ 項．在实际情况下，这二者具有相同的数量級，不能将后者忽略掉．例如(A.35)将使横阻与縱阻的比值 ρ_T/ρ_L 增加一倍，从而与实驗值符合．

Sladek[13] 在 InSb 中的实驗表明，高温压电散射是主要的散射机构．对这种散射机构得到[13]

$$\rho_T/\rho_L = 3\left(\frac{\hbar\omega_H}{kT}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{Ei(\epsilon)}{\sqrt{\pi}\,J(\epsilon)} - \frac{1}{2}\left(\frac{kT}{\hbar\omega_H}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \tag{A.36}$$

其中

$$J(\epsilon) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\epsilon} e^{-x}\, x^{-\frac{1}{2}}\, dx,$$

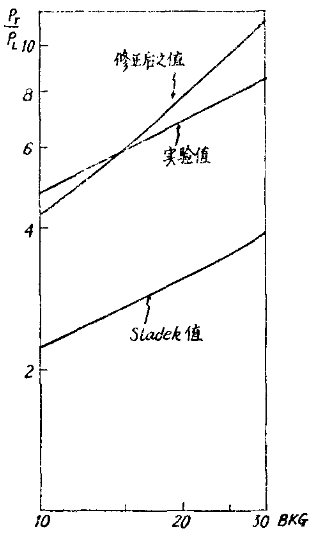

图 3

$\epsilon = \varepsilon^c/kT$．利用(A.35)得到的結果是簡单地将(A.36)改为下式：

$$\rho_T/\rho_L = 3\left(\frac{\hbar\omega_H}{kT}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{E_i(\epsilon) + \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2}\left(\frac{kT}{\hbar\omega_H}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \tag{A.37}$$

$J(\epsilon)$ 积分在 $\epsilon \to 0$ 时沒有发散問題，在(A.37)中就取为 1．估計对 ϵ 的重新計算不会有較大的改进，假設仍取 Sladek 的結果，則(A.37)对 Sladek 的值的修正为

$$\Delta(\rho_T/\rho_L) = 3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\hbar\omega_H}{kT}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{A.38}$$

对 Sladek 在 77° K时进行的实驗有

$$\Delta(\rho_T/\rho_L) = 2.6 \times 10^{-2} B^{\frac{1}{2}}. \tag{A.39}$$

其中 $B = H$，以高斯为单位．由图 3 可見，(A.39) 的修正能使理論值与实驗值接近符合．由于实驗条件并不与量子极限情况很一致，在这里将不把二者作仔細比較．

参 考 文 献

[1] Titeica, V. S., *Ann. Physik*, **22** (1935), 129.
[2] Лифшиц, И. М., *ЖЭТФ*, **3** (1956) 774; *Jour. Phys. Chem. Solids*, **4** (1958), 11.
[3] Косевич, А. М., Андреев, В. В., *ЖЭТФ*, **38** (1960), 882.
[4] Argyres, P. N., *Phys. Rev.*, **109** (1958) 1115.
[5] Argyres, P. N., *Phys. Rev.*, **117** (1960), 315.
[6] Adams, E. N. and Holstein, T. D., *J. Phys. Chem. Solids*, **10** (1959), 254.
[7] Kubo, Hasegawa and Hashitsume, *J. Phys. Soc. Japan.*, **14** (1959), 56.
[8] Van Hove, *Physica*, **21** (1955), 517; **23** (1957), 441.
[9] 陈式刚，物理学报，**19** (1963), 456.
[10] 霍裕平，物理学报，**19** (1963), 791.
[11] Van Hove, *Physica*, **25** (1959), 268.
[12] 例如参考 陈春先，物理学报，**18** (1962), 563.
[13] Sladek, R. J., *J. Phys. Chem. Solids*, **16** (1960), 11.

PERTURBATION THEORY OF TRANSVERSE TRANSPORT PROCESS IN STRONG MAGNETIC FIELD

CHEN SHI-KANG

ABSTRACT

Using the theory developed in [9], certain questions of transport process in strong magnetic field are discussed. In the first place, we show that for this type of transport process one must consider the boundary condition explicitly. For transverse conductivity, it is not necessary to solve the kinetic equation of the Boltzmann type when the boundary condition is treated correctly, and Titeica's picture is shown to be correct in general order of perturbation expansion. Secondly, the solution of the case of external electric field's $\omega \neq 0$ and its transition to the classical case are discussed. We show that under the same condition $\omega_H \tau > 1$, $E_0 \tau \gg 1$, the quantum solution is different from that of the classical case. Finally, in an appendix, the question of eliminated divergence produced by the integral of state density is discussed. We indicate that in the realizable case a term of magnitude $(\varepsilon_c/kT)^{\circ}$ is as important as that of $-\ln(\varepsilon_c/kT)$. This correction makes the theoretical value of ρ_T/ρ_L consistent with the experimental data.